

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(PREMIÈRE PARTIE.)

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Émile Picard*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, quai Conti, n° 25, Paris, VIe.

66750-22 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. É. PICARD ET P. APPELL,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BRILLOUIN, E. CARTAN, J. DRACH, E. GOURSAT, C. GUICHARD,
J. HADAMARD, G. KŒNIGS, G. LORIA, S. RINDI, H. VILLAT, V. VOLTERRA, ETC.,
PIERRE GAUJA, *secrétaire de la rédaction*,
ERN. LEBON, *secrétaire honoraire*.

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR M. G. DARBOUX,

CONTINUÉE DE 1871 A 1875 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY,
DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,
ET DE 1910 A 1917 PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XLVI. — ANNÉE 1922

(LVII[e] VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET C[ie], ÉDITEURS,

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1922

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ANTOINE (Louis). — Sur l'homéomorphie de deux figures et de leurs voisinages. (Thèse soutenue devant la Faculté des Sciences de Strasbourg, le 9 juillet 1921.)

1. Deux figures sont dites homéomorphes quand elles se correspondent point à point de façon univoque et continue. M. Antoine remarque que l'homéomorphie est en quelque sorte plus parfaite quand la correspondance peut être étendue à divers points extérieurs aux figures considérées et il distingue les trois cas suivants :

Premier cas. — La correspondance peut être étendue à tout l'espace ;

Deuxième cas. — La correspondance ne peut être étendue qu'à un voisinage ;

Troisième cas. — La correspondance ne peut être étendue à aucun voisinage.

Il se propose de rechercher si ces trois cas, conçus *a priori*, se présentent effectivement. La notion d'homéomorphie étant la base même de l'*Analysis Situs*, on comprend l'intérêt de l'étude entreprise par M. Antoine dans sa Thèse.

Il étudie les homéomorphies entre courbes, ouvertes ou fermées,

planes ou gauches, et entre ensembles parfaits partout discontinus. Son résultat peut s'énoncer ainsi : *On est toujours dans le premier cas quand il s'agit de figures planes; avec des figures gauches, les trois cas se présentent effectivement.*

2. Le résultat, en quelque sorte préliminaire, relatif aux courbes planes est connu. Il semble bien que chacune des preuves du célèbre théorème de M. Jordan sur les courbes planes fermées, convenablement complétée, en fournirait une démonstration. Celle de M. Antoine complète la preuve donnée par M. de la Vallée Poussin dans les dernières éditions de son *Traité d'Analyse*, laquelle a le caractère des raisonnements de géométrie élémentaire. C'est sur cette base, essentiellement géométrique, que repose tout le travail de M. Antoine.

Cette particularité vaut d'être notée, car les raisonnements géométriques ont actuellement mauvaise presse et nombreux sont ceux qui n'admettent que les raisonnements « arithmétisés ». Certes, tout raisonnement correct est arithmétisable, théoriquement, et cette arithmétisation fournirait une vérification; mais il n'en résulte ni que l'arithmétisation soit indispensable, ni, *a fortiori*, qu'on doive déclarer inexact tout raisonnement qui n'est pas exprimé dans le langage analytique à la mode.

Un mathématicien, qui s'était trompé au cours d'un travail, d'ailleurs difficile et très intéressant, a cru pouvoir écrire ensuite : « Ma démonstration n'échappait pas à certaines critiques se réduisant à ceci qu'elle faisait appel à l'intuition géométrique ». Non, ce n'est pas l'intuition qui trompe, c'est le fait de ne pas avoir eu assez d'intuition. Il ne faut pas, au reste, confondre intuition et raisonnement. L'intuition géométrique guide dans la construction du raisonnement, et rien ne saurait la remplacer dans ce rôle quand il s'agit, comme ici, de faits géométriques, c'est pourquoi l'arithmétisation d'un raisonnement d'*Analysis Situs* est toujours, à certains égards, partielle et artificielle, mais un raisonnement ne doit pas être remplacé par un appel à l'intuition. Le gros écueil des démonstrations géométriques, c'est qu'on y est toujours tenté de dire : « Il est évident que... ».

Est-ce une raison pour renoncer aux raisonnements dont l'arithmétisation serait si longue qu'elle est pratiquement impossible?

M. Antoine ne l'a pas pensé ; il s'est habitué à voir les faits sous leur jour géométrique et il y a gagné d'affiner assez son intuition pour arriver aux exemples paradoxaux que j'exposerai plus loin.

3. Il est évident que, pour les courbes gauches, le cas 1 ne sera plus seul à se présenter ; tout le monde connaît en effet des courbes gauches formant un nœud ; il est clair que la correspondance entre une telle courbe et une circonférence ne saurait être étendue à tout l'espace. Pour transformer cet aperçu en démonstration, il faut des raisonnements très délicats basés sur les propriétés des courbes enlacées. Grâce à ces propriétés, M. Antoine élucide entièrement le cas des courbes tracées sur le tore. Chacune de ces courbes peut être caractérisée, au point de vue de l'*Analysis Situs*, par deux entiers α et β qui représentent en quelque sorte le nombre de tours que la courbe fait autour de l'axe du tore et autour de la circonférence lieu des centres des méridiens. *Pour que l'homéomorphie d'une circonférence et d'une courbe tracée sur le tore rentre dans le cas* 1, *il faut et il suffit que, pour cette courbe, l'un au moins des deux nombres α et β soit égal à* 0 *ou* 1. *Si cette condition n'est pas remplie, l'homéomorphie rentre dans le cas* 2.

4. Pour construire une courbe fermée dont l'homéomorphie avec une circonférence rentre dans le cas 3, l'auteur emploie un procédé dont le principe est très simple, mais dont la légitimation est fort difficile. Partons d'une courbe Γ_0 ayant un nœud, comme celles fournies par l'étude du tore. Soient Γ_1, Γ_2, ... des homothétiques de Γ_0, de plus en plus petites et tendant vers un point O. Enlevons de Γ_0 un tout petit arc A_0B_0 ; de Γ_1 deux petits arcs $A'_0B'_0$, A_1B_1 ; de Γ_2 deux petits arcs $A'_1B'_1$, A_2B_2, etc. et joignons $A_0A'_0$, $B_0B'_0$, $A_1A'_1$, etc. Nous arrivons à une courbe γ ayant une infinité de nœuds et qui est la courbe cherchée.

Un arc de γ comprenant le point O, associé à un segment de droite, donne un exemple d'une homéomorphie entre deux courbes ouvertes qui rentre dans le cas 3.

Ainsi, tous les résultats annoncés relatifs aux courbes sont obtenus ; sauf en ce qui concerne l'existence du cas 2 pour l'homéomorphie entre courbes ouvertes.

Ceci résultera de l'étude des ensembles parfaits partout discontinus.

5. Pour définir un tel ensemble E, M. Antoine emploie un procédé bien simple que l'on peut décrire ainsi : imaginons que E soit réalisé matériellement ; ce sera une sorte de nébuleuse résoluble ; regardons-la. Nous voyons, non des points, mais des apparences de corps, des masses dirait un professeur de dessin. Les surfaces S_1 (ou les courbes, si E est plan) délimitant ces corps sont les surfaces de définition d'ordre 1. Regardons mieux E, avec une lunette par exemple ; là où nous voyions un corps, nous en voyons maintenant d'autres serrant de plus près E. Ils sont limités par les surfaces S_2. Avec un meilleur grossissement nous aurions des surfaces S_3, etc. E est l'ensemble des points communs à la fois aux surfaces d'ordre 1, aux surfaces d'ordre 2, etc.

Cette façon de voir les ensembles, qui généralise certaines définitions des irrationnelles, est si naturelle qu'elle a été souvent employée dans des cas particuliers ; mais M. Antoine est, je crois, le premier à l'avoir utilisée systématiquement et à en avoir montré la grande souplesse. Grâce à ce procédé, M. Antoine démontre très simplement ce théorème, dû à M. Denjoy, que par les points de E on peut faire passer une courbe de Jordan sans point multiple. De là on pourrait déduire que deux ensembles E sont toujours homéomorphes, d'où la question étudiée par M. Antoine : les trois cas prévus existent-ils effectivement pour ces homéomorphies?

Le cas des ensembles plans se traite facilement grâce aux résultats sur les courbes planes et à la considération des courbes S_i. Les exemples relatifs aux courbes gauches sont obtenus à l'aide d'un certain ensemble parfait, partout discontinu, P. Au premier examen, P se présente sous la forme d'un tore S_1 ; un meilleur examen montre, à la place du tore S_1, une chaîne fermée dont les maillons sont des tores S_2 ; un examen plus minutieux conduit à remplacer chaque tore S_2 par une chaîne de tores S_3, etc.

L'homéomorphie de P et d'un ensemble E parfait, partout discontinu, linéaire, donne un exemple du cas 3. Deux courbes (ouvertes ou fermées) passant l'une par tous les points de P, l'autre par tous ceux de E, donnent un nouvel exemple d'homéo-

morphie entre courbes (ouvertes ou fermées) rentrant dans le cas 3.

Prenons maintenant deux ensembles Q et Q_1 formés chacun par deux ensembles égaux à P; les deux tores S_1 relatifs aux constituants de Q sont extérieurs l'un à l'autre et non enlacés; ceux relatifs à Q_1 sont extérieurs l'un à l'autre et enlacés. Il est évident que l'homéomorphie entre Q et Q_1 peut s'étendre à un voisinage; M. Antoine démontre qu'elle ne peut s'étendre à tout l'espace. Voici donc un exemple du cas 2 pour les ensembles; d'où, comme plus haut, un exemple du cas 2 pour deux courbes ouvertes ou pour deux courbes fermées.

6. Tous les résultats annoncés sont maintenant obtenus; je ne puis essayer de donner une idée des raisonnements qui y ont conduit : raisonnements subtils, souvent laborieux, où chaque détail doit être examiné avec minutie; en particulier, dès qu'intervient l'ensemble P dont les propriétés sont des plus paradoxales.

Par exemple : toute surface simplement connexe, fermée, qui contient des points de P à son extérieur et à son intérieur, passe par des points de P. On serait tenté de conclure de là que P est un continu, il est cependant partout discontinu; mais il se conduit comme un continu vis-à-vis des surfaces simplement connexes, sa discontinuité n'apparaît que dans ses relations avec les surfaces multiplement connexes.

Voici plus étrange encore et qui fera apparaître P, non plus comme un continu quelconque, mais comme une sorte de courbe fermée et enlacée avec chacune des circonférences méridiennes des tores S_i : si C est une de ces circonférences, toute calotte simplement connexe limitée à C rencontre P.

Ces faits appellent une étude de la notion de continuité, aux fins de décomposition en notions plus primitives, dans une direction non encore abordée. A ce sujet il y aura intérêt à se rappeler certaines circonstances très simples relatives aux ensembles plans. Soit E l'ensemble des points $y = f(x)$, $f(x)$ étant définie dans (a, b). Les points de la bande $a \leq x \leq b$ sont toujours, à un certain égard, partagés par E entre les deux ensembles E_1 et E_2, pour les points desquels on a respectivement $y > f(x)$ et $y < f(x)$; cela quelle que soit $f(x)$; cependant, si $f(x)$ est discontinue, on pourra tou-

jours, sans sortir de la bande, aller d'un point M_1 de E_1 à un point M_2 de E_2 par un chemin continu. Cette remarque, très banale, bien qu'elle explique pourquoi l'étoile de M. Mittag-Leffler d'une fonction sans ligne singulière peut être tout entière à distance finie, paraît fort loin des propriétés de P ; nous nous en rapprocherons en supposant que $f(x)$ est une fonction dérivée discontinue dans tout intervalle. Il résulte des propriétés des fonctions dérivées [1] que tout chemin continu joignant M_1 à M_2, *et de la forme* $y = g(x)$, rencontre E. On ne pourra donc pas éviter E si l'on prend un chemin ne rencontrant qu'une fois, ou même un nombre fini de fois, les parallèles à Oy ; par rapport à ces chemins, E apparaîtra continu.

Sa discontinuité se manifeste seulement quand on prend des chemins rencontrant une infinité de fois des parallèles à Oy.

7. La dernière propriété indiquée pour P est contraire au bon sens. Remarquons, avec M. Antoine, que puisque toute calotte limitée à C rencontre P, elle rencontre toute courbe contenant P. Soit γ une telle courbe ouverte, soient a et b ses extrémités.

Par la circonférence C on peut faire passer une calotte simplement connexe Σ, ne contenant pas a. Faisons déplacer un point α sur γ, de a vers b. L'arc $a\alpha$ de γ ne rencontrera pas Σ tout d'abord, cela n'arrivera que lorsque α atteindra une certaine position α_1 sur Σ. A ce moment il suffira, cela semble clair, de déformer légèrement Σ, de produire en α_1 une petite invagination, pour que α puisse dépasser α_1 sans que l'arc $a\alpha$ rencontre la nouvelle calotte Σ. Et il semble bien que α pourra ainsi aller jusqu'en b. Eh bien ! tout cela, qui est évident, est faux. N'y a-t-il pas là une belle occasion de proclamer la faillite de l'intuition ?

Le fait paraîtrait moins surprenant si l'on avait pris pour γ une courbe fermée, car nous connaissons des couples de courbes, les couples de courbes enlacées, telles que toute calotte limitée à l'une rencontre l'autre. A l'aide d'un exemple élémentaire, M. Antoine nous apprend que ce fait se présente aussi avec des courbes non enlacées, même quand il s'agit de courbes très simples, de courbes analytiques sans point singulier, ou de lignes polygonales. Cette

---

[1] Voir mes *Leçons sur l'Intégration*, p. 91.

remarque est très importante, car elle nous montre que la position topologique de deux courbes, même simples, n'est pas caractérisée par leur seul coefficient d'enlacement; elle présage et prépare ainsi l'introduction de nouveaux invariants en *Analysis Situs*.

8. La Thèse de M. Antoine fait apparaître des différences essentielles entre les ensembles plans et les ensembles gauches. Cependant, dans une Note : *Sur les ensembles parfaits partout discontinus* (*Comptes rendus*, 1er août 1921), M. Antoine a obtenu un résultat, positif, applicable à tous les ensembles, quel que soit le nombre de dimensions de l'espace qui les contient. Je l'énonce pour l'espace ordinaire.

On peut attacher à chaque ensemble E, de la famille considérée, une surface simplement connexe illimitée S (homéomorphe d'un plan) passant par tous les points de E et telle que l'homéomorphie entre deux ensembles E et E_1 peut toujours être prolongée, dans l'espace de E à tous les points de S et de l'une des deux régions infinies limitées par S et, dans l'espace de E_1, à tous les points de la surface correspondante S_1 et de l'une des régions limitées par S_1.

Les études profondes et importantes que vient de faire M. Antoine montrent que l'*Analysis Situs*, à laquelle se sont intéressés des savants comme Poincaré, comme MM. Jordan, Picard et Hadamard, continuera à avoir en France des représentants très qualifiés.

9. Me permettra-t-on de sortir du domaine mathématique et de dire que ces études ont été entreprises par M. Antoine seulement après qu'une terrible blessure de guerre l'eut rendu aveugle. Que M. Antoine, nommé Maître de Conférences, ne se soit pas contenté de se dire que c'était là qu'il pouvait rendre le plus de services et qu'il ait tenu à conquérir le grade de Docteur que possèdent presque tous les Maîtres de Conférences, cela prouve une force d'âme qui trouve sa récompense en elle-même et dont je n'ai pas à le féliciter; mais je voudrais le remercier de l'exemple instructif qu'il nous a donné.

Nous avons en France très peu de Docteurs en Mathématiques bien que nos Agrégés aient une haute culture. C'est que les Fran-

çais n'aiment guère le médiocre et de peur de ne faire qu'assez bien, beaucoup ne font rien qui pourraient faire très bien. Malgré ses brillantes qualités, sans la guerre M. Antoine n'aurait peut-être jamais fait de travail personnel. Son exemple incite à oser.

Tous ceux qui le peuvent doivent travailler à maintenir et à développer la production scientifique française ; faute de cet effort nous perdrions vite la très haute place que nos aînés ont su nous conquérir dans l'esprit des savants étrangers.

Je souhaite vivement que l'exemple de M. Antoine décide quelques jeunes à être moins timides et à avoir en eux la confiance qu'ils peuvent avoir très légitimement.

Henri Lebesgue.

Pierre BOUTROUX. — L'Idéal scientifique des Mathématiciens. Paris, Alcan, 1920

Le Volume de M. Pierre Boutroux sur l'*Idéal scientifique des Mathématiciens* est plein de vues intéressantes sur l'histoire des Mathématiques et leur orientation actuelle. La présentation en est rapide et dans une langue excellente, à la fois précise, simple et imagée, qui contribuera certainement à augmenter l'éclat de la Chaire d'histoire des sciences dont M. Pierre Boutroux vient de recevoir la charge au Collège de France.

Une des raisons qui font le prix des réflexions de M. Pierre Boutroux sur l'histoire des Mathématiques et leur orientation actuelle, c'est qu'il est précisément un de ceux par lesquels la Science se fait. Cette distinction, déjà bien souvent établie entre la Science faite, enseignée, et la Science qui se fait, l'auteur la place dès le début même de son Ouvrage ; elle en indique l'esprit. Examinons-en le but et la méthode.

Son but est de chercher quelles ont été et quelles sont les idées philosophiques ou simplement extra-techniques qui ont guidé les mathématiciens dans leurs travaux et ont orienté la science, dans son ensemble, vers des progrès certains en empêchant une trop grande dissémination des efforts. Mais sur ces idées générales

même les savants ont toujours été assez sobres de confidences. Méfiance instinctive, dit M. Boutroux, du vague que présentent souvent les idées considérées comme philosophiques. Mais peut-être aussi inhabileté foncière ou antipathie naturelle pour l'introspection psychologique.

L'attitude intellectuelle des philosophes ne pourrait-elle en effet se distinguer nettement de celle des savants, par la tendance qu'ont invinciblement ceux-ci à extérioriser les notions qu'ils étudient? Même lorsque ces notions ne leur apparaissent pas comme données par la nature; même quand elles résultent d'une création, d'un libre choix de l'entendement, elles deviennent, aussitôt fait ce choix, indépendantes de nous, et comme extérieures à l'esprit qui les a conçues. Elles deviennent des « êtres mathématiques » et l'idée qu'évoquent ces termes est parfois si forte, qu'elle s'accompagne de la croyance qu'il existe réellement en dehors de nous un monde d'idées pures, de nombres et de figures. C'était le cas de Charles Hermite. « Il pensait modestement, dit M. Émile Picard, que les études de Philosophie mathématique, si en honneur aujourd'hui, devaient être de grande importance, puisque tant d'esprits éminents s'y adonnent; mais, malgré toute sa bonne volonté, il ne pouvait arriver à s'y intéresser. La cause en était peut-être dans sa philosophie un peu mystique sur l'essence du nombre; il croyait que les nombres forment un monde ayant son existence propre en dehors de nous, monde dont nous pouvons saisir seulement ici-bas quelques-unes des harmonies profondes. Dans l'antiquité, il eût été platonicien, et au moyen âge, dans la longue querelle entre le réalisme et le nominalisme, il aurait suivi Guillaume de Champeaux avec les réalistes. »

Tous les mathématiciens, il s'en faut, n'ont pas été jusqu'à cette conception quasi théologique du nombre et de la géométrie. Mais, sans la formuler d'une manière aussi positive, la plupart d'entre eux agissent comme si elle était leur. Chercher à savoir par une question directe, comment ils pénètrent et se dirigent dans le monde des êtres mathématiques, revient donc à solliciter une confession de leurs plus intimes pensées sur la Science, de ces pensées qu'ils hésiteront toujours à formuler, ne pouvant leur donner la forme impeccablement logique qu'ils ont coutume de donner à toutes leurs productions techniques.

Faute de pouvoir recourir aux confidences des spécialistes, M. Pierre Boutroux a fait usage d'une autre méthode, la méthode historique. Encore faut-il bien entendre de quelle manière il la comprend. Ce ne sera pas celle de l'érudit qui déchiffre et analyse les anciens textes. Celui-là prépare des matériaux pour le véritable historien. Il ne s'agira pas non plus de l'histoire purement descriptive des systèmes : histoire des « erreurs humaines », elle pourrait constituer un salutaire avertissement des écueils logiques à éviter. Ecrire, avec les préoccupations d'un légitime nationalisme, une histoire des progrès positifs aurait l'avantage de rétablir la vérité touchant l'origine de découvertes célèbres que certaines nations s'efforcent de faire entrer indûment dans leur patrimoine spirituel. Mais elle n'éclairerait pas sur la manière dont ces découvertes ont pris naissance. Le genre d'histoire auquel M. Pierre Boutroux demande de nous éclairer sur l'orientation des sciences mathématiques est assez différent. Ce qui l'intéresse, ce sont les grands courants de la pensée mathématique depuis l'antiquité jusqu'à nos jours. Et ces courants seront définis par les travaux mêmes des mathématiciens, en donnant une place prééminente non pas aux découvertes elles-mêmes, mais à l'esprit dans lequel elles ont été faites.

Il est fort intéressant, sous ce rapport, de voir quelle a été, d'après M. Boutroux, la grandeur du rôle de René Descartes. Arrêtons-nous sur cette partie de son Livre.

Le grand mérite de Descartes réside non pas tant dans les découvertes positives dont la Science lui est redevable que dans une sorte de renversement complet de la démarche même de la pensée mathématique. Ni dans l'antiquité, Archimède avec sa méthode d'exhaustion, ni même dans les temps modernes, Leibnitz et Newton avec le calcul différentiel et le calcul intégral n'auraient créé, à beaucoup près, du point de vue de M. Boutroux, un courant d'idées aussi vaste et aussi puissant que celui dont on trouve l'origine dans les idées de Descartes et les premiers effets dans sa géométrie.

Dans l'antiquité, en effet, la démarche des géomètres a toujours un caractère analytique, en ce sens qu'ils considèrent comme unique objet de la Science les propriétés des nombres et des

figures qu'une analyse directe doit faire découvrir après qu'une intuition, plus directe encore, en a fourni à l'esprit le concept. Quant à cette analyse, elle procédera suivant une série de propositions dont l'enchaînement logique devra être parfait. C'est la forme à laquelle reste attaché le nom d'Euclide. Et quant au choix des notions initiales, auxquelles devra s'appliquer la puissance analytique des géomètres, il sera principalement dicté par le caractère de beauté, de régularité et de simplicité (apparente) qu'elles présentent.

L'exemple achevé de cette conception est fourni par l'étude des polyèdres, considérés par Platon comme jouissant d'une éclatante beauté. Au moyen du tétraèdre régulier, de l'octaèdre régulier, de l'icosaèdre régulier et du cube, polyèdres compris respectivement sous 4, 8 ou 20 triangles équilatéraux égaux et sous 6 carrés égaux, Platon veut expliquer la genèse de l'univers.

Le moindre inconvénient de tels points de départ était l'arbitraire qui régnait dans la hiérarchie esthétique des notions fondamentales de la géométrie. Leur complexité réelle n'entrait que peu en ligne de compte. Il était inévitable qu'une pareille méthode aboutît à une impasse.

Il ne nous semble pas possible, cependant, de dire que l'impasse se soit produite, et cela grâce à Archimède. Ses travaux sur les leviers et la statique, sur l'hydrostatique et les corps flottants, sur les hélices spirales ou vis sans fin, le rapprochent de nous plus qu'aucun savant de l'antiquité. La méthode d'exhaustion dont, au ve siècle, les Pythagoriciens avaient déjà fait, il est vrai, quelques applications à la mesure du cercle, reçut de lui une forme plus parfaite et une puissance considérablement accrue. Elle était pour son époque l'équivalent de nos méthodes modernes de développement en série et de passage à la limite par degrés infinitésimaux. Elle lui fournit, pour l'évaluation des aires et des volumes, des procédés si ingénieux que « pendant deux mille ans, aucun géomètre ne devait être capable de les développer ». Pourtant, M. Pierre Boutroux n'en fait pas un grand novateur, comme Descartes; il veut qu'il n'ait été que le continuateur des platoniciens parce qu'il partageait leur culte pour la beauté intrinsèque des notions géométriques. Mais la modestie d'Archimède ne lui

était-elle pas naturellement inspirée par la pléiade de savants illustres qui l'avaient précédé de peu, comme la sévérité un peu anguleuse de Descartes pour ses prédécesseurs n'était-elle pas rendue plus naturelle par l'indécise timidité avec laquelle les Tartaglia et les Viete s'étaient engagés dans la voie algébrique, ouverte au IXe siècle par l'Al' Djebr Ou'Al Moukabalah du savant Mohammed ben Musa-Alkhwarizmy (¹), de Bagdad? Si l'influence d'Archimède a été moindre dans l'histoire de la Science que celle de Descartes, cela ne proviendrait-il pas, en partie, de ce que les circonstances de sa vie, sa fin tragique ou la civilisation de son temps ne lui ont pas procuré les disciples capables de développer sa pensée, comme les Leibnitz et les Newton ont su développer celle de Descartes? Car c'est sur quoi M. Pierre Boutroux insiste avec beaucoup d'originalité et peut-être une pointe d'exagération.

Comment donc le rôle de Descartes a-t-il été si grand?

Venue des hindous, puis des arabes, comme un ensemble de recettes pour faciliter le calcul, l'algèbre eût été méprisée des Grecs, comme les équivalents qu'ils en connaissaient et auxquels ils n'accordaient pas le nom de science. Les yeux constamment fixés sur la nature intrinsèque des objets géométriques, ils n'auraient pu même comprendre le sens des calculs qui portaient sur des symboles dénués de signification propre. Aussi, les premiers progrès de l'algèbre furent-ils dus non pas à des savants mais à des ingénieurs où à des praticiens fort peu embarrassés de scrupules théoriques. Visiblement, ces scrupules ne simplifièrent pas la tâche des savants du XVIe siècle, héritiers à la fois de la tradition hellénique et de la tradition arabe. L'algèbre est loin d'être pour eux un instrument de généralisation. Chaque cas particulier fait l'objet, pour eux, d'un calcul spécial. Le trait de génie de Descartes fut de voir que la langue algébrique, loin d'être simplement un mode de calcul, constituait un moyen merveilleux de construire synthétiquement, par la combinaison d'éléments simples, les êtres ou les objets mathématiques les plus « composés ». Au lieu d'aborder de front l'étude analytique de ces objets, conçus par une intuition directe, mais d'une complexité souvent insoupçonnée, une voie détournée, purement synthétique, et partant des éléments

(¹) D'où le nom d'*algorithme*.

les plus simples (longueurs rectilignes, figurées par des signes algébriques), permettait de les insérer dans un moule parfait dont toutes les propriétés pouvaient ensuite être mécaniquement déduites. « Dès lors, la Science, au lieu d'être, comme le croyaient les anciens, une contemplation d'objets idéaux, se présentera comme une construction de l'esprit. » D'analytique dans son objet (avec un mode d'exposition le plus souvent synthétique), elle deviendra essentiellement synthétique dans sa démarche constructrice, mais avec des formes de démonstrations analytiques, si bien même qu'une des branches les plus importantes de l'algèbre, la théorie des fonctions, prendra au XVIIIe siècle le nom d'analyse mathématique.

Cette conception fondamentale de Descartes a fait la fécondité de sa méthode. Des applications du calcul avaient été faites avant lui à des problèmes spéciaux de géométrie par Appolonius de Pergame, au milieu du IIIe siècle avant Jésus-Christ, puis au XIVe siècle par Nicole Oresmes, puis encore au XVIe siècle par Mariño Ghetaldi. Mais elles étaient restées sans haute portée. Si donc on entend par géométrie analytique l'application du calcul algébrique à des figures géométriquement données, on peut dire que Descartes n'en est pas le premier inventeur. Son œuvre géniale a été de concevoir la *création* de figures géométriques ou de courbes géométriques par la seule combinaison d'éléments algébriques. Que les plus simples de ces combinaisons représentassent les courbes mêmes qu'étudiaient les géomètres antiques, droite, cercle, sections coniques, ce n'en était que plus heureux et plus propre à donner au début confiance dans la méthode. Cela n'en épuisait pas, à beaucoup près, la merveilleuse richesse. Au fait, par le détour de l'image géométrique, Descartes créait la notion fondamentale de fonction algébrique. Trois siècles exceptionnellement brillants pour le développement des mathématiques, ne devaient pas en tarir la fécondité.

Que Descartes ait pressenti la puissance de sa méthode non seulement pour des problèmes géométriques, mais aussi pour l'étude générale des phénomènes de la nature, c'est ce qui paraît assez incertain. M. Pierre Boutroux reconnaît en tout cas que le moyen technique d'accrocher le calcul à ces phénomènes pour les « réduire à l'étendue et au mouvement » paraît lui être resté

caché. Et pourtant, ces moyens, le calcul différentiel et intégral, les développements en série, M. Boutroux veut ne les considérer que comme une suite toute naturelle de la méthode algébrico-synthétique de Descartes. Ici, l'argumentation de M. Boutroux nous paraît un peu forcée. S'il n'y a pas lieu de parler de révolution scientifique (il n'y a jamais de révolution scientifique) à propos des puissants instruments d'investigation auxquels les noms de Leibnitz et de Newton restent communément attachés, il semble que les notions introduites avec ces méthodes de calcul aient joué un rôle sans lequel l'algèbre purement cartésienne serait peut-être restée stérile. Pour M. Pierre Boutroux, elles sont venues simplement se placer dans le cadre que Descartes s'était contenté de préparer. Et voici comment :

En 1635, le P. Bonaventure Cavalieri, dans sa Géométrie des indivisibles, pose le principe qu'il est possible de construire des figures continues par la considération d'éléments « indivisibles », c'est-à-dire infiniment petits. C'était le point de départ du calcul intégral. En 1658, d'ailleurs, Pascal devait préciser les raisons pour lesquelles il ne saurait y avoir désaccord entre le calcul des indivisibles et la géométrie classique.

D'autre part, en 1636, Fermat considère pour la première fois la dérivée d'une fonction. Cette notion de dérivée est assurément le point de départ du calcul différentiel. Or, cette découverte de Fermat, à quelle occasion vit-elle le jour? A l'occasion d'un problème de géométrie, la construction de la tangente à une parabole ; et la solution qu'en donnait Fermat était évidemment susceptible, dans la géométrie algébrique cartésienne, d'une vaste généralisation pour la construction des tangentes à toutes les courbes.

Mais il est assez piquant de constater que Descartes, le premier, ne vit pas ou ne voulut pas voir, en raison d'une certaine humeur contre Fermat ou contre la prédilection de celui-ci pour les cas particuliers, quel appoint cette notion de dérivée était capable d'apporter au développement de la méthode algébrico-géométrique.

M. Pierre Boutroux considère d'autre part que les premières études systématiques, avec Leibnitz et Newton, des développements en série, devaient découler tout naturellement de la conception synthétiste de l'algèbre cartésienne. On sait d'ailleurs que

la théorie des développements en série a rendu possible l'étude générale des fonctions, et formait la partie la plus remarquable et la plus féconde de la nouvelle mathématique newtonienne et leibnitzienne. Or, la pensée de M. Boutroux paraît être qu'une fois posée la notion cartésienne de construction d'une fonction au moyen d'opérations algébriques (en nombre fini, il est vrai), il était bien naturel d'envisager la construction d'une fonction au moyen d'un nombre infini d'opérations algébriques. Si Leibnitz, toutefois, se considérait comme un complet novateur, M. Boutroux enregistre que Newton se croyait simplement un continuateur de Descartes, lequel par contre s'était résolument séparé de tous ses prédécesseurs. Il tire avantage de cet aveu pour conclure que la prétendue coupure introduite dans l'histoire de la Science par Leibnitz et Newton n'a pas réellement existé.

Peut-être cet argument (analogue à celui que donne M. Boutroux pour effacer un peu, semble-t-il, l'originalité d'Archimède) repose-t-il trop sur des particularités de vie ou de caractère. La conception d'opérations algébriques indéfiniment répétées ne dépassait-elle pas, de beaucoup, la pensée même de Descartes? Quelque admiration et quelque vénération même qu'il faille avoir pour l'auteur du Discours et de la Géométrie, nous demandons à M. Boutroux s'il n'a pas été porté à exagérer ses dons de prophétie, touchant l'avenir de sa découverte.

Louis Dunoyer.

MÉLANGES

SUR LA CLASSIFICATION DES COURBES ALGÉBRIQUES ET SUR LE THÉORÈME D'EXISTENCE DE RIEMANN (A PROPOS D'UN OUVRAGE DE M. SEVERI);

Par M. Annibale COMESSATTI,
à Cagliari.

Les progrès de la Géométrie algébrique, dans ces dernières années, ont conduit à la solution de beaucoup de questions difficiles et de haute importance théorique; mais on est encore bien loin d'être réduit à l'étude de simples questions de détail. Au contraire, il y a dans le champ algébrique des problèmes qui demeurent toujours, pour ainsi dire, au premier plan, et dont la résolution laisse prévoir des résultats très importants, soit au point de vue général, soit pour leurs applications particulières. Parmi ces questions, ont trouvé place pour longtemps celles qui se rattachent à la classification des courbes algébriques planes, gauches ou hyperspatiales; car on peut dire qu'après les importantes recherches de Halphen, Nöther et Valentiner, qui ont fait progresser notamment la théorie des courbes gauches algébriques et mis en lumière quelques-unes de ses caractéristiques singulières, et malgré les encouragements des sociétés savantes (1), on n'avait à signaler, jusqu'à ces dernières années, aucun travail vraiment notable sur ces questions, qui, à l'égard des courbes hyperspa-

(1) En 1902, l'Académie royale des Sciences du Danemark, sur proposition de M. Zeuthen, avait mis à concours la question de reconnaître si, pour toute famille de courbes gauches algébriques, il existe ou non des formes limites exclusivement composées de droites; mais le concours demeura sans résultats. La *Médaille Guccia* avait été instituée par feu le fondateur du Cercle mathématique de Palerme, à l'occasion du IVe Congrès international des Mathématiciens qui eut lieu à Rome en 1908, dans le but de couronner un Mémoire qui *eut fait faire un progrès essentiel à la théorie des courbes gauches algébriques*, ou, subordonnément, *à la théorie des surfaces ou d'autres variétés algébriques*. Le prix a été décerné à M. Severi pour ses recherches sur les surfaces algébriques, mais pour ce qui tient aux courbes gauches le concours n'eut aucun résultat.

tiales, n'étaient presque pas encore posées [1]; et même dans la théorie des courbes planes il y avait des lacunes assez curieuses, à cause desquelles quelques procédés importants attendaient d'être mis à l'abri de toute critique.

Les questions dont nous venons de parler ont attiré dernièrement l'attention de M. Severi, qui en a fait l'objet d'une étude approfondie, d'où découlent beaucoup de résultats intéressants [2]. Je me propose de rappeler sur eux l'attention des lecteurs du *Bulletin* qui voudront me suivre dans le cours de cette analyse.

Les recherches de M. Severi ont pour fondement la distinction des courbes algébriques (planes gauches et hyperspatiales) en *familles*, c'est-à-dire en *systèmes algébriques irréductibles et complets* (en prenant comme éléments les courbes) et visent principalement l'étude de certaines *formes limites* qui y appartiennent. Ces formes limites peuvent être, soit des courbes douées de points multiples, soit des courbes réductibles, en particulier des systèmes connexes de droites, au moyen desquelles on peut, comme nous le verrons, donner une réponse à bien des questions, et même envisager, à un point de vue tout à fait nouveau, des résultats classiques.

Commençons par les courbes planes. On sait que le nombre d des points doubles d'une courbe plane *irréductible* C, d'ordre n, ne peut dépasser $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, et que le genre p d'une courbe pareille vaut $\frac{(n-1)(n-2)}{2}-d$. Mais on peut poser la question suivante : « Étant donné un entier d satisfaisant aux inéga-

(1) Ajoutons, à ces problèmes, ceux qui concernent la classification des *surfaces* algébriques d'un hyperespace, en particulier du S_4. Il y a là d'intéressantes questions nouvelles : savoir par exemple la détermination des *surfaces irrégulières d'ordre minimum* qui ne sont pas réferables birationnellement à des surfaces réglées. En S_4 il est probable qu'on aura à faire à des surfaces (hyperelliptiques) de *dixième* ordre, à sections hyperplanes de genre 6 : un cas particulier de ces surfaces a été envisagé récemment par moi (voir les *Memorie della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL*, 3e série, t. XXI, 1919).

(2) Un court exposé des recherches de M. Severi se trouve dans des Notes des *Atti della R. Accademia dei Lincei*, 5e série, t. XXIV, 1915, p. 877-888 et 1011-1020; t. XXV, 1916, p. 459-471 et 551-562). Les raisonnements en ont été en grande partie développés et complétés par l'Auteur dans un *Appendice* de l'édition allemande de son Traité *Lezioni di Geometria algebrica*, qui a paru récemment, bien qu'elle fût presque achevée avant la guerre. C'est de là que nous avons extrait la plupart de ces notices.

lités $0 \leqq d < \frac{(n-1)(n-2)}{2}$, peut-on trouver *toujours* (c'est-à-dire pour *toute* valeur de d) des courbes planes *irréductibles* avec d (et pas plus que d) points doubles (ordinaires)? »

Voilà une demande très simple et très importante à laquelle on n'avait pas encore donné une réponse rigoureuse. On peut observer qu'aucune conclusion générale ne saurait être obtenue en faisant recours aux projections des courbes gauches ou hyperspatiales *dépourvues de points multiples*, car le genre p de ces courbes ne peut dépasser une limite, qui a été donnée pour les courbes gauches par Halphen et Nöther et pour les courbes d'un espace quelconque par M. Castelnuovo, et qui est toujours inférieure à $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$; on doit encore ajouter que, en général, on ne saurait trouver des courbes irréductibles, *dépourvues de points multiples* pour toutes les valeurs de p inférieures à cette limite, car ces courbes *n'existent pas* pour certaines valeurs *lacunaires* de p qui, pour les courbes gauches, ont été données par Halphen.

Pour voir clairement l'ensemble des questions qui se rattachent à notre problème, il suffit de le poser de la façon la plus simple et la plus naturelle. La condition pour qu'une courbe plane d'ordre n ait d points doubles est *algébrique* (¹), de sorte que les courbes C qui y satisfont forment une *variété algébrique* V. Mais on ne peut pas affirmer *a priori* que, ces conditions vérifiées, il n'en soit *par conséquent* de même d'autres conditions qui soient entraînées par elles, de sorte que les courbes de V aient *plus que d* points doubles, ou des points de multiciplicité supérieure, ou bien qu'elles soient *réductibles*. Ajoutons que la variété V peut être elle-même *réductible*, de façon à donner *plusieurs familles* de courbes, même de *dimensions différentes*.

Parmi ces familles, combien y en a-t-il qui se composent de courbes *irréductibles* et quelles sont leurs dimensions? On doit chercher une réponse à ces questions si l'on veut compléter un procédé géométrique, dû à M. Enriques, et exposé par M. Severi dans son Traité, duquel on déduit le nombre des modules dont dépendent les courbes de genre p; pour cela il faut prouver

(¹) Pour représenter complètement cette condition, il faut faire recours à *plus que d* équations algébriques, ou à d équations et deux inégalités; de façon qu'on n'est pas sûr *a priori* que la *dimension* relative est égale à d.

qu'une courbe irréductible d'ordre n avec d points doubles, appartient (si elle existe) à une famille de dimension $3n + p - 1$. C'est ce qui arriverait si l'on était certains que la condition imposée à V est de dimension d, et que V se compose de parties ayant la même dimension.

Eh bien, voilà un premier résultat important de M. Severi : *les courbes planes irréductibles d'ordre n avec un nombre quelconque* $d \leq \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ *de points doubles existent, et forment une seule famille* V_d *de dimension* $3n + p - 1$.

Cela ne veut pas dire que la variété V ne puisse être réductible, car il peut y avoir là dedans des familles composées de courbes *toutes réductibles;* mais ces familles, si elles existent, ont aussi la dimension $3n + p - 1$, de sorte que, si V est réductible, ses parties ont toutes la même dimension. Pour avoir un exemple très simple, il suffit d'envisager les quartiques planes avec trois points doubles; leur ensemble se décompose en deux familles ayant la même dimension 11, dont la première contient toutes les quartiques rationnelles (irréductibles) et la deuxième celles décomposées en une cubique et une droite.

Une courbe C d'ordre n, réductible ou non, et douée de d et pas plus que d points doubles $\left(\text{c'est-à-dire de } \textit{genre effectif } p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d\right)$ appartient à *une seule* famille (qui est déterminée par elle) dont la courbe générale, si C est réductible, se décompose de la même façon que C. Il s'ensuit qu'une courbe C, qui est commune à deux familles distinctes de V, doit avoir *plus que d* points doubles (ou, à leur place, des points de multiplicité supérieure), en particulier que les courbes de V_d ne peuvent se décomposer sans acquérir de *nouveaux* points doubles. C'est là le théorème bien connu de M. Enriques qui vient de recevoir, pour le cas des courbes planes, une élégante démonstration algébrique.

Les raisonnements employés par M. Severi s'appuient d'un côté sur la considération des *nappes*, en particulier des *nappes linéaires* [1] des variétés algébriques, qui, dans l'espace linéaire

---

[1] Il s'agit de l'extension de la notion de *branche* (*ramo*) ou *cycle* (Cayley, Halphen) d'une courbe algébrique et de *nappe* (Halphen) d'une surface.

dont les *points* sont les courbes planes d'ordre n, représentent les systèmes de courbes envisagés, de l'autre sur celle de certaines *formes limites* appartenant aux familles en question.

A propos de ces formes limites, et avant de continuer cette analyse, nous allons ouvrir une parenthèse pour bien préciser certaines notions qui s'y rattachent.

Lorsqu'on envisage une courbe C_0 avec $d' > d$ points doubles, comme limite d'une courbe C ayant d points doubles, *et l'on a bien précisé la façon dont* C *tend à* C_0 (c'est-à-dire dans la famille dont C et C_0 sont des éléments le *chemin* parcouru par C lorsqu'elle aboutit à C_0), parmi les d' points doubles de C_0 il y en aura *d bien déterminés* qui seront limites des points doubles de C, tandis que les autres $d' - d$ seront *essentiellement neufs;* si l'on suppose de projeter C d'un point arbitraire P de son plan, en chacun de ces derniers $d' - d$ points doubles viennent coïncider deux *points de diramation* de la fonction algébrique y de x qui est définie par l'équation $f(x,y) = 0$ de C, lorsque, au moyen d'une projectivité, on a porté le point P dans le point à l'infini de l'axe des y.

On peut encore, si l'on veut, envisager la courbe C_0 comme ayant le *genre (virtuel)* $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d$, à la condition de considérer lesdits $d' - d$ points doubles comme *virtuellement inexistants*, c'est-à-dire comme des points où il est permis de passer de l'une à l'autre des deux branches de C; en d'autres mots, les deux feuillets de la surface de Riemann correspondant à ces branches doivent être pensés comme *soudés* en portant à coïncider les deux points qui proviennent du point double.

Supposons que C_0 soit réductible, et imaginons de choisir d parmi ses d' points doubles, en regardant les autres comme virtuellement inexistants. On peut alors poser la question suivante : Peut-on toujours regarder C_0 comme limite d'une courbe *irréductible* C (du même ordre) douée de d points doubles (c'est-à-dire de genre *effectif* p) qui aient pour limites ceux que nous avons fixés sur C_0? ou, en d'autres mots, sous quelles conditions C_0 *avec les d points doubles fixés* appartient à la variété V_d dont nous avons parlé plus haut?

La réponse donnée par M. Severi est très simple : pour que cela soit possible il faut et il suffit que, en donnant aux $d' - d$ points

doubles virtuellement inexistants la signification dont nous venons de parler, la courbe C_0 reste *connexe;* c'est-à-dire qu'à travers ces points doubles on doit pouvoir passer d'une quelconque des composantes de C à une autre.

Le théorème est vrai, même si C_0 est irréductible, car l'auteur démontre ailleurs que la famille V_d des courbes irréductibles d'ordre n avec d points doubles contient *toutes* les familles $V_{d'}$ analogues, pour lesquelles $d' > d$, en particulier la famille des *courbes rationnelles* d'ordre n. Si à cela on ajoute que V_d contient aussi toutes les courbes décomposées en n droites, on a dans ces résultats une justification rigoureuse des procédés employés par de Jonquières pour résoudre le problème bien connu des contacts multiples ([1]).

Dans la démonstration du théorème, l'auteur suppose que C_0 ait *seulement des points doubles* et pas de points de multiplicité supérieure, mais le théorème est vrai sans doute dans tous les cas, et l'on pourra l'établir en suivant dans ses lignes générales le procédé de l'auteur. M. Severi a lui-même approfondi un cas particulier, pour s'en servir dans une *démonstration géométrique du théorème d'existence de Riemann*, qui découle d'une facon très élégante de ses résultats et dont nous allons parler.

Il s'agit de prouver qu'étant donnés deux entiers (positifs) *quelconques* n et p ($n > 1$), existe une fonction algébrique y à n valeurs et de genre p, ayant $2n + 2p - 2$ points de diramation qui peuvent être choisis *arbitrairement* sur une droite x (c'est-à-dire dans le plan complexe x) avec les substitutions correspondantes du groupe de monodromie (qui se réduisent à des *échanges* entre les *n déterminations* de y). Ces substitutions doivent, d'autre part, satisfaire à des conditions très simples et bien connues ([2]).

Pour ce qui tient au choix arbitraire du groupe de diramation, il suffit de prouver que, si m est un entier convenable, on peut trouver des courbes d'ordre $n + m$ et de genre p, qui passent par

---

([1]) Les résultats de de Jonquières ont été établis et complétés d'une façon rigoureuse, suivant une autre voie, par R. Torelli dans une Note des *Rendiconti di Palermo*, 1906.

([2]) *Voir* le *Traité d'Analyse* de M. Picard (Paris, Gauthier Villars, 1905), Chapitre XVI, où le théorème d'existence est démontré suivant la voie classique de Riemann au moyen de la résolution du *problème* de Dirichlet sur la riemannienne.

un point donné P avec la multiplicité m, et touchent $2n + 2p - 2$ droites *arbitrairement données*, issues de P. On peut pour cela se borner à une *énumération de constantes*, mais de cette énumération ne ressort pas facilement l'*irréductibilité* des courbes cherchées : M. Severi la démontre d'une façon rigoureuse pour $m = p$, et alors on obtient des courbes, que nous appellerons D, qui, en dehors de P, ont encore $p(n-2) + \binom{n-1}{2}$ points doubles.

Maintenant nous allons nous occuper du choix arbitraire des substitutions du groupe de monodromie. M. Severi en établit la possibilité en faisant recours au théorème sur les courbes réductibles dont nous avons parlé plus haut. Ce théorème joue un rôle essentiel dans un procédé d'induction, au moyen duquel la construction d'une courbe D est reconduite à celle d'une courbe $\overline{D}$ du même genre p, mais correspondant à une fonction algébrique à $n-1$ valeurs dont les $2(n-1) + 2p - 2$ points de diramation appartiennent, avec leurs substitutions au groupe donné pour D. En faisant coïncider les autres deux points de diramation, on peut décomposer la courbe D, supposée existante, dans la courbe $\overline{D}$ jointe à une droite a sur laquelle un des points d'intersection avec D est considéré comme virtuellement inexistant. Inversement, partant de la courbe $\overline{D} + a$, et se mouvant à l'intérieur de la famille de courbes *irréductibles* qu'elle définit selon la règle dudit théorème, on remonte à une courbe D, qui jouit des propriétés voulues. Le procédé d'induction nous reconduit ainsi, de proche, au cas $n = 2$ (courbes hyperelliptiques) dont la résolution est presque évidente.

Passons aux courbes gauches et hyperspatiales. Pour des raisons de clarté, nous tâcherons de séparer, autant que possible, les différentes questions, sans suivre dans l'exposé l'ordre logique de M. Severi.

Soit C_p^n une courbe irréductible, d'ordre n et de genre p de l'espace S_r. La série linéaire de ses sections hyperplanes est une g_n^r simple et dépourvue de points fixes; inversement, étant donnée sur une courbe D de genre p une série pareille, on peut, d'une façon bien connue, transformer birationnellement D en une C_p^n de S_r sur laquelle la série correspondante soit découpée par les hyperplans. Si la g_n^r est complète, C_p^n est une courbe *normale*, sinon,

elle peut être envisagée comme projection d'une courbe du même ordre appartenant à un espace de dimension supérieure à r. On dira encore que C_p^n est *spéciale* ou *non spéciale* si telle est la série correspondante.

Voyons tout de suite ce que l'on peut déjà dire à l'égard de la répartition de ces courbes en familles.

Courbes non spéciales. — En vertu du théorème de Riemann-Roch, on a dans ce cas $n \geq p + r$. Inversement, M. Severi prouve que, pour chaque valeur de n satisfaisant à cette inégalité, les C_p^n de S_r existent, et forment *une seule famille* V de dimension

$$\rho = (r+1)n - (r-3)(p-1)$$

dont la courbe générale est irréductible, non spéciale et dépourvue de points multiples (si $r > 2$).

Courbes spéciales. — Ici il faut distinguer les courbes *aux modules généraux* des courbes *aux modules particuliers*.

Dans le premier cas, étant donnés p et r, l'ordre de la g_n^r, c'est-à-dire de C_p^n, ne peut descendre au-dessous d'une limite inférieure, ressortant de l'inégalité

$$(1) \qquad n \geq \frac{r}{r+1} p + r,$$

qui a été établie par Brill et Nöther dans leur classique Mémoire des *Math. Ann.*, t. VII, en dépendance de l'évaluation du nombre $\tau = (r+1)(n-r) - rp$ des paramètres dont dépendent les g_n^r spéciales sur une courbe de genre p aux modules généraux. Comme on l'a observé plusieurs fois, l'énumération des auteurs contient implicitement un postulat : pour la rendre rigoureuse, il faut prouver que l'ensemble des espaces S_{n-r-1} r-sécants de la courbe canonique de genre p du S_{p-1} a exactement la dimension $\tau + r$ (et non une dimension supérieure), lorsque les modules de la courbe sont généraux. Il s'agit d'une question très délicate que M. Severi approfondit par une analyse demandant l'emploi de puissantes ressources.

L'ensemble, de dimension τ, des g_n^r spéciales appartenant à une courbe aux modules généraux (envisagé comme une variété algébrique dont l'élément est la g_n^r), peut être réductible, mais en tout cas il se décompose en parties de la même dimension. De là

on déduit que si

$$r + p \leqq n \leqq r + \frac{r}{r+1} p,$$

les C_p^n se partagent en un *nombre fini* de familles W ayant toutes la dimension

$$\rho = (r+1)n - (r-3)(p-1)$$

dont la courbe générale est spéciale, normale, dépourvue de points multiples si $r > 2$ et douée seulement de points doubles si $r = 2$. M. Severi appelle ces familles *régulières*, en gardant la dénomination d'*irrégulières* pour celles dont la dimension dépasse ρ.

Ces dernières peuvent exister seulement pour des modules *particuliers*, et alors, au lieu de (1), il faut écrire l'inégalité

$$(2) \qquad n \leqq \frac{\tau+1}{2}(r-1) + \frac{p}{\tau} + 1,$$

où τ est un *entier* défini par les inégalités

$$\tau(\tau-1) < \frac{2p}{r-1} \leqq \tau(\tau+1),$$

qui a été donnée par moi [1]. Dans son Traité, M. Severi ne s'occupe pas de ces courbes, si ce n'est pour énoncer des résultats encore inédits, dont il sera question plus tard.

Ajoutons que dans les familles spéciales régulières, rentre aussi la famille des *courbes canoniques* de genre $p(n = 2p - 2$, $r = p - 1)$ qui est *unique* et a la dimension $(p-1)(p+4)$.

Voyons maintenant ce qu'on peut dire au sujet des courbes avec *points doubles*, en particulier des courbes *rationnelles* appartenant aux familles envisagées; cette question a beaucoup d'importance, par exemple pour ses applications à la Géométrie énumérative.

Avant tout il faut fixer notre attention sur une distinction essentielle. Lorsqu'une courbe irréductible C, de genre p, appartenant à une famille V [2] (douée ou non de points doubles *variables*), acquiert un *nouveau* point double P par une position particu-

---

(1) *Voir* une Note des *Atti del R. Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti*, 1915, p. 1685-1709.

(2) Il n'est pas nécessaire de supposer que V soit *complète*, il suffit qu'elle soit *irréductible*.

lière C_0, il peut se faire que le genre de C s'abaisse d'une unité, ou bien qu'il demeure sans altération. Dans le premier cas, on dira qu'on a affaire à un point double *propre;* dans le deuxième, à un point double *impropre;* et la distinction peut aussi s'établir, ayant égard aux droites issues de P qui vont appartenir à ce que devient la congruence des cordes, ou la réglée des tangentes de C, lorsque C tend à C_0.

Cette distinction posée, M. Severi démontre qu'une famille *non spéciale* V de C_p^n du S_r ($r > 2$, $n \geq p + r$) contient *toutes* les C_{p-h}^n ayant $h \leq p$ points doubles (*propres* pour les courbes de V) qui forment *une seule famille* V_h. Cette famille appartient aussi à la famille *non spéciale* W_h des C_{p-h}^n du S_r pour laquelle les points doubles envisagés sont pourtant *impropres*. La dimension de V_h est de h unités inférieure à celle de V, et de $(r-2)h$ unités à celle de W_h, de sorte que l'imposition d'un point double aux courbes d'une famille non spéciale est une *condition de dimension* 1 *ou* $r-2$ selon qu'il s'agit d'un point *propre* ou *impropre*.

Si dans ce qui précède on fait $h = p$, on en déduit qu'à V appartiennent *toutes* les courbes *rationnelles* du S_r d'ordre n et avec p points doubles, qui forment une seule famille de dimension

$$(r+1)n-(r-2)(p-1)-1 > 0.$$

Dans le cas des familles spéciales régulières, on a aussi des résultats analogues mais un peu moins complets; on trouve encore dans chaque famille W de C_p^n *des* familles W_h de C_{p-h}^n avec h points doubles (*propres*), mais on n'est pas sûr qu'il s'agit d'une famille *unique*, bien que la chose soit probable.

Nous allons enfin parler de la question des *dégénérescences*, c'est-à-dire des courbes *réductibles* qui peuvent appartenir à des familles données, qui a tant d'importance, soit pour la classification, soit pour d'autres applications.

La notion de *genre virtuel* peut être étendue aux courbes décomposées Γ d'un espace quelconque, qui sont *connexes* par l'intermédiaire des points communs à leurs parties (que nous appellerons *nœuds*) au moyen d'une formule, due à M. Nöther, qui, dans le cas simple où Γ se décompose en deux parties irréductibles Γ_1, Γ_2 de genres p_1, p_2, s'écrit

(3) $$p = p_1 + p_2 + i - 1.$$

i étant le nombre des nœuds de Γ que l'on veut envisager comme virtuellement inexistants, c'est-à-dire comme *points de connexion* entre les deux branches Γ_1, Γ_2 de Γ qui s'y croisent. Si Γ peut être envisagée comme limite d'une courbe irréductible C du même ordre et de genre p, ces i points doubles devront être évalués comme *propres*, tandis que les autres apparaissent comme *impropres*. Ces derniers peuvent manquer et alors nous pourrons dire que p est le *genre effectif* de Γ.

Le cas le plus important pour nous, c'est celui où Γ se décompose en n droites (nous l'appellerons un *n-latère*) : si p est son genre virtuel, parmi ses nœuds il y en aura, à cause de la (3), $i = n + p - 1$, qui devront être envisagés comme propres. On doit observer que deux n-latères du même genre effectif p peuvent présenter une différente distribution des nœuds, ou, comme nous dirons, correspondre à deux *schémas de connexion* différents, de sorte qu'on ne peut associer biunivoquement leurs côtés d'une façon telle qu'à deux côtés ayant un nœud commun correspondent toujours deux côtés pareils; mais, si la chose est possible, les deux n-latères, que nous appellerons *isomorphes*, tombent dans une même famille qui contient tous les n-latères isomorphes avec eux.

Les méthodes suivies par M. Severi dans ses recherches donnent facilement le moyen d'établir l'existence de certaines dégénérescences dont quelques auteurs ont fait usage dans leurs recherches énumératives. On peut par exemple prouver qu'à chaque famille de C^n_p du S_r (dépourvues de points multiples) appartiennent des courbes décomposées en une C^{n-1}_p d'un hyperplan du S_r et en une droite qui la rencontre en *un* point, et que chaque famille *non spéciale* V de C^n_p contient *toutes* les courbes décomposées en une C^{n-i}_{p-i} $(i \leq p)$ et en i de ses cordes, donc, pour $i = p$, toutes les courbes décomposées en une C^{n-p} *rationnelle* et en p de ses cordes.

Pour ce qui tient aux décompositions en droites, l'auteur se borne dans son Traité à démontrer que les familles envisagées (*non spéciales* et *spéciales régulières*) contiennent toujours des n-latères du même genre *effectif*. Ce résultat se précise davantage pour les familles *non spéciales* de C^n_p, car l'auteur établit qu'à l'intérieur de chaque famille se placent *tous* les n-latères de genre *virtuel* (et pourtant aussi, comme nous avons dit, de genre effectif) p.

Pour $p = 0$, cela vient à dire que la famille des C^n rationnelles du $S_r (n \geqq r)$ contient tous les n-latères (connexes) de l'espace.

Ces résultats, joints à ceux qui ont égard aux courbes planes, répondent presque complètement à la question posée par l'Académie danoise, et suffisent pour beaucoup d'applications énumératives, mais il n'en est pas de même pour ce qui touche aux problèmes de la classification. Dans cet ordre d'idées, on peut se proposer comme but final, celui de *caractériser* chaque famille au moyen d'un ou de plusieurs types de n-latères dont le schéma de connexion soit, autant qu'il le faut, bien défini, et pour cela on devra résoudre d'une façon complète les problèmes suivants :

a. Établir que dans chaque famille, même *irrégulière*, de C^n_p, on peut trouver des n-latères de genre *effectif* p;

b. Démontrer la réciproque, c'est-à-dire qu'un n-latère de genre effectif p du S_r définit, *sous certaines conditions*, une famille de C^n_p;

c. Donner des critériums, pour distinguer les différentes familles, ayant égard aux schémas de connexion ou à d'autres caractéristiques des n-latères.

La réponse à la question *a* a été donnée par M. Severi, avec un résumé de la démonstration dans ses Notes des *Atti Lincei*, 1915, où l'on trouve aussi d'intéressantes indications à propos des autres deux; dans son Traité, il se borne à montrer comme chaque famille de C^n_p renferme des n-latères de genre virtuel p et à annoncer d'avoir résolu tous ces problèmes, en renvoyant le lecteur à une prochaine publication.

Toutefois l'examen des données de la question et des indications de l'auteur suffisent pour permettre d'avance quelque simple prévision. Dans l'énoncé *b*, on parle de *conditions* à qui devrait satisfaire un n-latère de genre effectif p pour être apte à définir une famille de C^n_p du S_r. La nécessité de ces conditions complémentaires ressort en évidence, dès que l'on observe que dans l'espace S_r il y a d'n-latères dont le genre effectif dépasse le maximum donné par la formule de M. Castelnuovo : par exemple si $r = 3$, $n > 4$ ceux qui ont $n - 1$ de leurs côtés dans un plan. On peut pourtant prévoir que, une fois ces conditions données (M. Severi, dans la deuxième de ses Notes de 1915, en donne un

énoncé à titre de prévision), on pourra en déduire, soit la formule de M. Castelnuovo, soit, pour chaque n, les *valeurs lacunaires* de p en correspondance auxquelles on ne peut trouver des courbes dépourvues de points multiples.

Pour ce qui tient à la nécessité d'avoir des critériums qui assurent la distinction des différentes familles, cela dépend du fait que, en général, le schéma de connexion ne suffit lui seul au but, car deux n-latères non isomorphes peuvent définir la *même* famille. Un critérium suffisant pourra quelquefois être donné par la considération des surfaces d'ordre minimum qui passent par les n-latères considérés : cela peut aussi servir dans le cas où l'on a affaire à des schémas de connexion différents, comme le fait voir M. Severi à propos des deux types de C_{10}^9 du S_3 qui ont été signalés par Weyr et Halphen.

Disons enfin quelques mots à propos des applications énumératives et topologiques. Les premières se rattachent à la résolution des problèmes énumératifs au moyen de dégénérations, et particulièrement à la légitimation de beaucoup de procédés auxquels on a eu souvent recours (¹). On parvient au but, d'un côté par la démonstration rigoureuse de l'existence de la forme limite envisagée, que l'on peut tirer des résultats exposés, ou des procédés généraux de M. Severi qui donnent le moyen de déduire facilement beaucoup d'autres types de décompositions, de l'autre en établissant qu'il est permis d'appliquer aux cas envisagés le *principe de la conservation du nombre*. On n'a qu'à suivre des méthodes bien connues et déjà classiques que nous devons aussi à M. Severi (²).

Suivant cette voie on parvient à légitimer, dans beaucoup de cas, l'application de la *méthode fonctionnelle* de Cayley, et l'on peut prévoir qu'on parviendra à la légitimer dans tous les cas. Voilà, selon l'auteur, quel en serait le résultat :

(¹) *Voir* l'article de Zeuthen, *Géométrie énumérative* dans l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (édition française), t. III, Vol. IV, nᵒˢ 5-9, et celui de Segre, *Mehrdimensionale Geometrie* dans la même *Encyclopédie* (édition allemande), t. III, C.7, nᵒ 25.

(²) On peut voir des exemples dans une Note très récente de l'Auteur (*Rendiconti Istituto Lombardo*, 7 aprile 1921) où M. Severi expose une élégante méthode pour la résolution des problèmes qui ont pour but de déterminer les espaces plurisécants et tangents des courbes algébriques, en faisant recours à la considération des courbes douées d'un point double *propre* qui appartiennent à une famille donnée, et réduisant ainsi le problème aux courbes rationnelles.

Tout nombre relatif à une C_p^n du S_r, pourvu qu'il dépende d'une condition qui ait un sens pour une courbe quelconque d'ordre et de genre donnés, est une fonction des seules variables n et p.

Ajoutons que la prévision peut aller encore au delà, car les résultats de quelques recherches font entrevoir un principe plus général et significatif qui a été énoncé sans démonstration par M. Enriques.

Les applications topologiques ressortent de la *méthode de la petite variation* appliquée en partant d'une convenable forme limite *réelle* (c'est-à-dire conjuguée à soi-même), par exemple d'un *n*-latère. L'auteur se borne, dans la deuxième de ses Notes de 1915, à de très courtes indications sur ces problèmes, mais la voie est tracée, et l'on peut en la suivant essayer quelques prévisions. Pour ce qui concerne la classification des courbes de S_r au point de vue réel, il faudra avant tout noter que, généralement, une famille de C_p^n, irréductible au point de vue complexe, se décomposera en plusieurs *familles réelles;* et comme une courbe variable dans une de ces familles ne peut changer de forme sans acquérir au moins un point double, on devra envisager les parties ou *sous-familles* dans lesquelles chaque famille, envisagée comme une variété réelle, est subdivisée par l'ensemble de ses courbes douées d'un point double propre (ensemble qui forme *frontière* sur ladite variété). On tâchera ensuite de chercher si, dans chaque sous-famille, il y a des *n*-latères réels, car de leur considération on peut déduire aisément la forme d'une courbe générale de la sous-famille. Naturellement pour chaque schéma de connexion au sens complexe, on aura affaire à plusieurs types de *n*-latères réels, en dépendance des côtés et des nœuds réels et imaginaires conjugués qui y appartiennent, et l'on devra aussi envisager la possibilité que deux *n*-latères non isomorphes au point de vue réel donnent lieu à la même sous-famille réelle. Quoi qu'il en soit, si beaucoup est encore à faire pour arriver à des résultats de caractère général, il paraît au contraire, très facile d'établir des applications particulières qui pourraient mettre en lumière des caractéristiques nouvelles et intéressantes.

SUR LES INTÉGRALES DE FRESNEL ;

Par M. A. BLOCH.

J'ai donné ici naguère [1] un procédé de calcul assez rapide des intégrales de Fresnel :

$$I = \int_0^\infty \cos u^2\,du \quad \text{et} \quad J = \int_0^\infty \sin u^2\,du.$$

En voici un peut-être encore plus direct.

D'abord, remarquons que la substitution $u = \sqrt{t}$ prouve que les intégrales I et J ont un sens, et que J tout au moins est évidemment positive; les intégrales

$$f(x) = \int_0^x \cos u^2\,du; \qquad g(x) = \int_0^x \sin u^2\,du$$

sont, quel que soit x positif, inférieures en valeur absolue à un certain nombre A.

Ceci posé, on a

$$f(x) = \int_0^1 x\cos x^2 v^2\,dv; \qquad g(x) = \int_0^1 x\sin x^2 v^2\,dv.$$

D'ailleurs,

$$f'(x) = \cos x^2; \qquad g'(x) = \sin x^2;$$

d'où

$$ff' - gg' = \int_0^1 x\cos x^2(1+v^2)\,dv; \qquad fg' - gf' = \int_0^1 x\sin x^2(1+v^2)\,dv.$$

Il vient, en intégrant de o à x,

$$f^2 - g^2 = \int_0^1 \frac{\sin x^2(1+v^2)}{1+v^2}\,dv; \qquad 2fg = \int_0^1 \frac{dv}{1+v^2} - \int_0^1 \frac{\cos x^2(1+v^2)}{1+v^2}\,dv.$$

Les intégrales des seconds membres rentrent dans une catégorie

---

(1) *Bull. des Sc. math.*, t. XLIII, 1919, p. 179.

connue. Pour s'assurer directement qu'elles tendent vers o avec $\frac{1}{x}$, le plus rapide consiste à écrire, à l'aide du second théorème de la moyenne,

$$\int_0^1 \frac{\sin x^2(1+v^2)}{1+v^2}\,dv = \int_0^{v_1} \sin x^2(1+v^2)\,dv$$
$$= \frac{1}{x}\left[\sin x^2 \int_0^{xv_1} \cos u^2\,du + \cos x^2 \int_0^{xv_1} \sin u^2\,du\right],$$

ce qui est inférieur en valeur absolue à $\frac{2A}{x}$; même limite supérieure pour l'autre intégrale.

On a donc, à la limite,

$$I^2 - J^2 = 0; \qquad 2IJ = \frac{\pi}{4};$$

d'où

$$I = J = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

A PROPOS D'UNE NOUVELLE REVUE MATHÉMATIQUE : FUNDAMENTA MATHEMATICÆ [1];

Par M. Henri LEBESGUE.

En 1919, au milieu des événements que l'on connaît, il s'est trouvé à Varsovie un petit groupe de mathématiciens assez hardis pour oser créer un périodique mathématique nouveau, *Fundamenta mathematicæ*, et assez épris de leur science pour trouver le temps de travailler d'une façon si heureuse que les deux tomes, actuellement parus, des *Fundamenta* sont presque entièrement remplis par leurs seuls Mémoires.

---

[1] Deux tomes sont parus : tome I, 1920; tome II, 1921. Chaque tome coûte 15 fr. La correspondance doit être envoyée à l'adresse : Rédaction des *Fundamenta mathematicæ*, Varsovie (Pologne). Université, Séminaire mathématique.

La rédaction s'exprime ainsi : « Le journal *Fundamenta mathematicæ* publie les Mémoires (ou Notes) consacrés à la Théorie des ensembles et les questions qui s'y rattachent. (Les applications immédiates de la théorie des ensembles, *Analysis situs*, la logique mathématique, les recherches axiomatiques.)

Cette délimitation sera très diversement appréciée. Elle sera approuvée par beaucoup de mathématiciens et de philosophes, s'intéressant presque exclusivement aux questions traitées dans les *Fundamenta*, et qui seraient très heureux de trouver réunis tous les articles qui s'y rapportent. Mais, s'il en était ainsi, ils n'auraient plus jamais cette bonne fortune de prendre un journal pour y lire un article, de parcourir un autre mémoire par désœuvrement et de trouver ainsi des sujets de travaux ou, ce qui est mieux, d'avoir une occasion de s'instruire.

Certes, il est prudent et même souvent indispensable de se spécialiser pour la recherche personnelle, mais il serait bien regrettable qu'on se spécialise trop en fait de connaissances, ce qu'entraînerait fatalement la création de journaux spéciaux traitant uniquement de sujets étroitement délimités. Les mathématiciens auraient tôt fait de se partager en petites chapelles s'ignorant les unes les autres.

Que la première ait été créée par des sectateurs de la théorie des ensembles n'a rien qui puisse nous surprendre. Cette théorie a été assez longtemps mise « en dehors des Mathématiques » par les grands prêtres de la Théorie des fonctions analytiques pour qu'il soit venu à quelqu'un l'idée d'accorder ironiquement : « Vous avez raison, nous ne sommes pas des mathématiciens, nous étudions seulement les fondements des Mathématiques ».

Mais pourquoi l'ostracisme contre la Théorie des ensembles a-t-il presque entièrement disparu? Pourquoi ceux qui, ne voulant pas laisser chômer une épithète, continuent à crier contre le Cantorisme, mettent-ils hors d'atteinte de leurs malédictions les travaux récents sur les fonctions analytiques qui tous utilisent, et c'est leur grand mérite, les progrès faits dans l'étude des ensembles?

C'est parce que le contact n'a pas été rompu entre les divers mathématiciens; la théorie des ensembles, issue de celle des fonctions analytiques, a pu ainsi, par la suite, être utile à son aînée et prouver à tous les gens de bonne foi son intérêt et sa fécon-

dité. C'est aussi grâce à ce contact que les chercheurs, à qui la considération des ensembles offrait des sujets de réflexion si divers, ne se sont pas engagés dans des voies où, écartés immédiatement du reste des mathématiques, ils auraient créé une science nouvelle, respectable certes, mais qui, ne venant pas à son heure, n'aurait eu pendant longtemps qu'un intérêt assez médiocre.

Je souhaite vivement que la rédaction interprète son programme de la façon la plus large, que, dorénavant, chaque tome contienne plusieurs articles traitant aussi des « vieilles » mathématiques afin que tout lecteur soit incité à s'instruire dans des directions variées. Il suffirait, pour cela, qu'on admette en principe tout article contenant une application *quelconque* de la théorie des ensembles, et non plus nécessairement une application *immédiate*, comme le demande le programme. Je ne vois d'ailleurs pas pourquoi on ne considérerait pas comme une application immédiate de la théorie des ensembles, par exemple les beaux travaux publiés récemment en France sur l'itération. Les adeptes de la théorie des ensembles verraient ainsi leur horizon s'élargir et, d'autre part, ces articles sortant du cadre primitif attireraient à la Revue de nouveaux lecteurs qui, peu à peu, s'intéresseraient aux études plus spécialement consacrées aux ensembles.

Cette petite réforme engagerait sans doute les Auteurs à écrire de façon à être compris de tous, ce dont il ne semble pas qu'ils se soient toujours beaucoup préoccupés. Voici (II, 104) [1] un article intitulé : Sur l'invariance de la notion d'ensemble $F_{\sigma\delta}$. Cela vous paraît un peu énigmatique? Mais ne croyez pas que, dans l'article, vous trouverez l'explication de cette notation. Si votre curiosité est piquée au vif, vous arriverez sans doute à comprendre car une note vous apprend qu'il a été démontré, aux *Comptes rendus*, qu'une homéomorphie transforme un $F_{\sigma\delta}$ en un $F_{\sigma\delta}$ ou en un $G_{\delta\sigma\delta}$; et je suppose qu'aux *Comptes rendus* il y a des définitions [2].

Un autre article (II, 201) traite des ensembles quasi-connexes, dont je reproduis la définition : « Un ensemble A est *quasi-connexe*, si à tout point $p \subset A$ on peut faire correspondre un

---

[1] Il faut lire cette indication : tome II, p. 104.

[2] La définition est aussi dans les *Fundamenta* (II, 41), mais rien n'en prévient le lecteur.

nombre $\lambda > 0$, de manière qu'il n'existe aucune décomposition $A = A_1 + A_2$ remplissant les conditions :

$$A_1 + \overline{A_2} = \overline{A_1} + A_2 = 0, \tag{1}$$

$$p \subset A_1; \quad \delta(A_1) < \lambda. \text{ »} \tag{2}$$

Comprenez-vous?

Les notations utilisées ici, qui ne sont pas expliquées dans l'article, sont en relation avec celles introduites par Janiszewski dans sa Thèse et qui avaient vivement intéressé Poincaré. Je n'en puis faire un plus grand éloge; cependant, il ne faut pas oublier que tout le monde n'excelle pas, comme Poincaré, à manier tous les symboles et, pour ma part, je n'ai jamais pu réussir à calculer à l'aide des équations de Janiszewski qui ne sont donc, pour moi, qu'une notation qu'il me faut traduire. Comme, à l'époque de sa Thèse, je le disais à Janiszewski; ce jeune homme ne sut pas me cacher qu'il me considérait comme une vieille baderne. Il avait peut-être raison; toutefois, je crois qu'il faut s'efforcer d'être compris facilement, même par les vieilles badernes. Et, pour cela, éviter de multiplier les notations; en tout cas, ne jamais oublier de les expliquer.

Les omissions que j'ai signalées et bien d'autres qu'il est inutile de relever, s'expliquent facilement. Les créateurs du journal forment, à Varsovie, une petite société dont tous les membres se passionnant pour la même partie des Mathématiques, en parlant constamment, adoptent les mêmes expressions, les mêmes notations, les mêmes abréviations. Pour que cet intéressant foyer de pensée mathématique ne devienne pas une petite chapelle, il faut que ses membres se préoccupent d'être compris au dehors. Et pourquoi auraient-ils fondé leur Revue, si tel n'avait pas été leur but?

Un dernier argument en faveur de l'élargissement de programme que je demande. Quand, demain, un directeur de Revue recevra un manuscrit sur les ensembles, médiocre, ou obscur et fumeux (et le sujet s'y prête), il écrira : « J'ai lu avec le plus vif intérêt votre bel article que j'aurais été fier de publier; mais de nombreux mémoires avaient déjà pris rang et je n'ai pas voulu retarder la publication d'un travail si important. Je vous retourne votre manuscrit en vous conseillant de l'envoyer aux *Fundamenta;* vous tou-

cheriez ainsi plus sûrement tous ceux qui sont à même de comprendre les questions si passionnantes que vous étudiez ». Quant à la Rédaction des *Fundamenta*, elle ne pourra pas se débarrasser de la mauvaise copie, spécialisée, avec cette désinvolture. Pour qu'elle le puisse, il lui faudrait avoir toujours de la bonne copie, ce qui serait d'autant plus réalisable que le programme sera moins étroit.

Mes craintes ne visent d'ailleurs que l'avenir; jusqu'ici, on le verra, la Revue n'a pas manqué de copie intéressante.

Le titre du journal exige quelques explications; on s'attendrait, en effet, à ce que les *Fundamenta* traitent de questions philosophiques, en réalité les articles parus montrent bien qu'il s'agit d'un journal de pures mathématiques; les auteurs s'y efforcent de faire progresser les mathématiques bien plutôt que d'étudier le mécanisme de la pensée, par exemple. Les créateurs du journal ont estimé, cela est très humain, que rien n'est plus important, plus fondamental, que ce qui les intéresse et, en voulant l'affirmer, ils ont choisi un titre qui prête à l'équivoque. On peut cependant le justifier en partie en rappelant que presque tous les travaux de philosophie mathématique parus dans ces trente dernières années tirent leur origine de la théorie des ensembles, qui a posé quantité de questions nouvelles ou, tout au moins, a donné un aspect nouveau à des problèmes éternels. On peut ajouter que l'étude des ensembles, n'ayant exigé jusqu'ici aucune technique compliquée, apparaît comme très voisine des principes et très propre, par suite, à les élucider. Mais personne n'oserait prétendre que toute recherche sur les ensembles est une étude des principes et encore moins que les questions de philosophie mathématique sont toutes relatives aux ensembles. Autant vaudrait affirmer que, tant qu'on n'avait pas considéré les ensembles, c'est-à-dire jusqu'au milieu du XIX[e] siècle, l'édifice mathématique était resté sans fondations.

Il est grand temps que j'arrive à mon but, qui est de dire tout l'intérêt que j'ai pris à la lecture des *Fundamenta* et d'essayer de faire sentir quelle influence cette publication peut avoir sur les progrès futurs des mathématiques, dont toutes les branches, pendant longtemps encore, auront avantage à utiliser des résultats et des procédés de raisonnement de la théorie des ensembles. Je me suis tellement étendu sur les quelques réserves que j'avais à faire

qu'on pourrait se méprendre sur mon opinion; mais, à la réflexion, on se dira que s'il s'était agi d'une publication à mon avis sans portée je n'aurais pas attaché tant d'importance à ce qu'elle atteigne le plus possible de lecteurs.

Le plus simple pour montrer l'importance d'une Revue, c'est de l'analyser. Malheureusement, beaucoup des cinquante-trois travaux parus aux *Fundamenta* sont rédigés de façon très concise, et les obscurités de rédaction que j'ai signalées viennent précisément de ce souci de concision, dans de petites notes qui ne peuvent guère être résumées. De plus, un résumé fait à la façon ordinaire ferait sans doute croire que, dans les deux tomes parus, règne un grand désordre, alors qu'il n'y existe que la complexité ordinaire de la vie active; je m'explique. J'ai dit que presque tous les auteurs vivent à Varsovie, se voient journellement, se racontent leurs efforts. Tout sujet est, par suite, étudié par plusieurs personnes dont les articles se complètent; mais ces articles sur un même sujet sont, dans le journal, entremêlés avec d'autres traitant de sujets différents. De plus, quand X s'appuie sur un résultat que Y lui a indiqué, cela ne veut pas dire que l'article de Y précède celui de X; Y peut rédiger plus lentement que X ou faire un travail plus étendu. Bref, l'article de Y suit parfois celui de X dans le même tome ou non.

Je donnerai donc peut-être une idée plus exacte des *Fundamenta* en groupant les articles, parfois artificiellement, autour de quelques sujets; c'est surtout de ces sujets que je parlerai. Et puisque le tome I débute par un portrait et une courte Notice sur Janiszewski, décédé le 3 janvier 1920, je commencerai par des travaux d'*Analysis situs* qui ont leur origine dans la Thèse, soutenue à Paris en 1911, par ce jeune savant qui était si brillamment doué.

Les recherches de MM. Schœnfliess, Brouwer, Zoretti, Janiszewski ont abouti, dans la Thèse de ce dernier, à une définition purement topologique d'un arc simple, c'est-à-dire d'un arc ouvert d'une courbe de Jordan sans point multiple. Voici quelques notions très importantes utilisées dans ce but : Un continu C est indécomposable s'il n'est pas la somme de deux continus différents de lui. Une partie continue c d'un continu C est un continu de condensation de C, si c appartient à l'ensemble dérivé de $C - c$.

Un continu C est irréductible entre deux de ses points a et b, s'il n'y a aucune partie de C qui soit continue et contienne a et b.

MM. Janiszewski et Kuratowski (I, 210), rapportant des travaux, dont certains sont faits avec M. Knaster, étudient à nouveau ces notions et donnent en particulier diverses propriétés caractéristiques des continus indécomposables. Je ne cite que la première, presque immédiate, « Toute partie continue c d'un continu indécomposable C est un continu de condensation de C », parce qu'elle est utilisée par M. Mazurkiewicz (I, 35) pour obtenir cette propriété caractéristique : « Dans un continu indécomposable C on peut trouver trois points tel que C soit irréductible entre deux quelconques de ces trois points. »

D'autres résultats de MM. Janiszewski et Kuratowski utilisent des notions introduites par M. Mazurkiewicz (I, 166) qui paraissent des plus intéressantes : Soit a un point d'un continu C, il existe alors, en général, des points x tels que C ne soit pas irréductible entre a et x. L'ensemble de ces points, quand il diffère de C, est un *composant* de C. Prenons deux points x et y de C, leur *distance relative dans* C sera la borne inférieure des diamètres des parties continues de C, contenant x et y. Si l'on fait tendre x et y vers un point a de C, la limite supérieure de ces distances relatives est l'*oscillation* en a. Un point est du *premier genre* si l'oscillation en ce point est nulle.

Cette dernière notion sert surtout à M. Mazurkiewicz pour caractériser les continus qu'on peut couvrir avec une courbe de Jordan ayant ou non des points multiples. La question a été soulevée par l'étude analogue faite pour le cas particulier des domaines, par M. Schœnfliess. Pour le cas général, la réponse est la suivante : les continus cherchés sont ceux dont tous les points sont du premier genre.

M. Kuratowski (I, 40) et M. Sierpinski (I, 44) traitent la même question. Voici l'énoncé du dernier Auteur cité : Les continus considérés sont ceux qui sont somme de continus de diamètres inférieurs à toute limite donnée.

M. Mazurkiewicz (II, 119) démontre que sur tout continu de la nature considérée, il y a au moins deux points qui ne le découpent pas. Le point a découpe C si, dans C — a, il n'y a aucune partie continue contenant deux points déterminés x et y.

Toute une suite de travaux, dont certains sont assez étendus, sont consacrés à l'étude des rapports entre la notion de continuité et celle, plus primitive, de connexité. Voici les principales distinctions qui s'introduisent dans ces études. Deux ensembles A et B sont *séparés*, s'il n'existe aucun point commun à A et à B, ni à A et au dérivé de B, ni à B et au dérivé de A (I, 61). S'il existe de tels points, leur ensemble est la *jonction* de A et B (II, 206). Un ensemble est connexe s'il est indécomposable en deux parties séparées (Hausdorff). S'il est seulement impossible de le décomposer en deux parties séparées et telles de plus que celle qui contient un point quelconque p puisse être prise de diamètre arbitrairement petit, il est dit *quasi-connexe* (II, 201). Deux points a et b d'un ensemble P sont dits *séparés*, si P est la somme de deux ensembles séparés dont l'un contient a et l'autre b (II, 81). P est dispersé s'il ne contient aucune partie connexe (II, 81). Un ensemble est biconnexe s'il n'est pas la somme de deux ensembles connexes séparés (II, 206). Un ensemble connexe irréductible entre deux de ses points, se définit par analogie avec les continus irréductibles (II, 206). De même, la notion de composant peut être généralisée aux ensembles connexes (Hausdorff).

M. Sierpinski (II, 81) prouve que deux points d'un ensemble dispersé ne sont pas nécessairement séparés; M. Mazurkiewicz (II, 201), qu'il existe un ensemble plan quasi-connexe dont tous les couples de points sont séparés; M. Sierpinski (I, 7), qu'un ensemble peut être ponctiforme, c'est-à-dire ne contenir aucun continu, et être cependant connexe; M. Mazurkiewicz (II, 96), qu'il existe un ensemble plan connexe ne contenant aucune partie connexe et bornée.

MM. Knaster et Kuratowski (II, 206) ont entrepris une étude systématique de la connexité. Ils obtiennent de nombreux résultats intéressants, notamment de nouvelles formes de la condition pour qu'un continu soit un arc simple; ils étudient l'addition des ensembles connexes et les ensembles complémentaires d'ensembles connexes. Leur travail étendu se termine par des exemples suggestifs.

M. Hahn (II, 189) prouve que les composants d'un ensemble ouvert sont ouverts. La Note de M. Hahn est la seule qui soit en allemand, presque tous les articles sont en français. Cependant les

quatre langues admises par la Rédaction : français, italien, anglais, allemand, sont effectivement représentées. Si l'on remarque que le titre est en latin et le reste de la première page en polonais, on conviendra, une fois de plus, que les Polonais ont le don des langues.

J'arrive à des travaux relatifs à la distinction des divers types topologiques. On sait que deux ensembles sont dits *homéomorphes*, ou du même type topologique, s'il existe entre leurs points une correspondance univoque et continue dans les deux sens. Comme la première question qui s'est posée a été de prouver que les types topologiques des espaces à 1, 2, 3, ... dimensions sont différents, je cite ici l'article (II, 256) où je développe les indications que j'avais données à l'occasion de la publication faite par M. Brouwer de la première démonstration rigoureuse de ce théorème. Je m'appuie sur une propriété qui généralise une remarque évidente concernant les divisions d'un plan en polygones ou de l'espace ordinaire en polyèdres : si l'on partage en petits morceaux un domaine à m dimensions, il y a des points communs à $m+1$ morceaux. Ce lemme conduit facilement au théorème de M. Brouwer et à l'importante proposition connue sous le nom de *théorème de Schœnfliess*. Il donne aussi des renseignements sur le degré minimum de multiplicité des points singuliers des courbes remplissant un domaine.

M. Sierpinski (I, 11), démontre que tous les ensembles dénombrables denses en soi sont homéomorphes; MM. Mazurkiewicz et Sierpinski (I, 17) que la classe des types topologiques des ensembles dénombrables fermés a la puissance $\aleph_1$ et que celle des ensembles clairsemés (c'est-à-dire ne contenant aucune partie dense en soi) a la puissance du continu. M. Mazurkiewicz (I, 61) construit un ensemble mesurable B punctiforme qui n'est homéomorphe avec aucun ensemble linéaire et (II, 36) il montre que lorsqu'un ensemble peut être constitué d'une certaine manière à l'aide d'ensembles fermés, il en est de même de ses homéomorphes.

Les deux tomes des *Fundamenta* se terminent chacun par des problèmes dont la solution, inconnue, est désirée par ceux qui les posent. M. Kuratowski (II, 158) répond négativement à une importante question posée ainsi par M. Sierpinski. On sait, grâce

à un raisonnement très simple de M. Jordan, que si, entre les points de deux ensembles P et Q, fermés, il existe une correspondance biunivoque et continue dans un sens, elle est continue aussi dans l'autre sens, de sorte que P et Q sont homéomorphes; mais si P et Q ne sont pas fermés, il pourra exister entre eux deux correspondances ponctuelles biunivoques, l'une d'elles étant continue dans le passage de P à Q et l'autre dans le passage de Q à P. Cela suffit-il pour l'homéomorphie, demandait M. Sierpinski.

Plusieurs Notes sont relatives à la constitution des ensembles de points. M. Sierpinski (I, 1) montre que tout ensemble est la somme d'un ensemble dense en soi et d'un ensemble clairsemé et aussi (I, 28) qu'il est la somme d'un ensemble clairsemé et d'une infinité dénombrable au plus d'ensembles homogènes. Un ensemble est homogène (Cantor) s'il a même puissance autour de chacun de ses points.

M. Ruziewicz (II, 4) construit un ensemble non dénombrable qui est superposable avec deux de ses parties sans point commun. M. Mazurkiewicz (II, 8) établit l'existence d'une décomposition du segment (0, 1) en ensembles non dénombrables sans point commun, superposables deux à deux par translation, la famille de ces ensembles ayant la puissance du continu.

Ces deux dernières questions sont de la nature de celles auxquelles on arrive quand on cherche des ensembles non mesurables et quand on étudie les solutions discontinues de certaines équations fonctionnelles telles que l'équation

$$f(x+y) = f(x) + f(y),$$

qui a été considérée par M. Hamel et par moi-même dès l'époque de l'introduction de la notion de mesure. M. Sierpinski (I, 116) et M. Banach (I, 123) démontrent à nouveau que les seules solutions mesurables de l'équation précédente sont celles de la forme Ax. M. Sierpinski (I, 125) établit que les fonctions convexes, c'est-à-dire telles que l'on ait :

$$2f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqq f(x_1) + f(x_2),$$

qui sont mesurables, sont continues. Il prouve (I, 105) qu'une base de M. Hamel (c'est-à-dire un ensemble de nombres $a, b, c, \ldots$

tels que tout nombre puisse, d'une manière et d'une seule, être la somme d'une expression de la forme $a\alpha + b\beta + c\gamma + \ldots$, où les $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ sont rationnels et tous nuls, sauf un nombre fini d'entre eux) est nécessairement non mesurable B, mais peut être mesurable. M. Steinhaus (I, 93) donne une propriété très intéressante des ensembles mesurables de mesure non nulle : L'ensemble des distances des couples de points de l'ensemble contient tous les nombres d'un intervalle.

M. Wilkosz (I, 82) aborde l'étude des ensembles non mesurables. L'ensemble des points autour desquels un ensemble n'est pas mesurable est parfait. L'étude des rapports entre les mesurabilités linéaire et superficielle est bien plus importante ; M. Sierpinski (I, 112) montre qu'il existe un ensemble plan de mesure nulle sur toute droite et cependant non mesurable superficiellement. Il traite ensuite (I, 142) une question assez analogue : l'existence des deux intégrales $\int_0^1 f(x,y)\,dx$, $\int_0^1 f(x,y)\,dy$ ne suffit pas pour l'existence de $\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy$, du moins si l'on a $2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Je résume maintenant toute une série de travaux en relation avec la célèbre classification due à M. Baire. M. Sierpinski (I, 152) s'occupe d'une question que j'avais soulevée autrefois : suffit-il qu'une fonction $f(x, y)$ soit de classe α sur toute droite $x =$ const. et sur toute courbe $y = f(x)$ pour qu'elle soit de classe α en x, y. Oui, pour $\alpha = 1$; non pour $\alpha = 2$, du moins si $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Le même auteur (I, 159) démontre ce théorème dû à M. Baire : Toute fonction représentable analytiquement est ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait quand on néglige les ensembles de première catégorie par rapport à cet ensemble parfait. M. Lusin (II, 155) démontre que la propriété réciproque n'est pas exacte. Cette Note est publiée sous la responsabilité de M. Sierpinski d'après des résultats obtenus par M. Lusin en 1917 ; cela semble indiquer que les mathématiciens de Varsovie sont sans nouvelles de M. Lusin depuis sa rentrée en Russie. Il y a donc lieu de craindre que les résultats suggestifs annoncés par ce géomètre, si habile à traiter les questions les plus abstraites, et par ses élèves, tels que MM. Souslin et Alexandroff, attendent longtemps encore leur développement. Les Notes, publiées aux *Comptes rendus* par

ces Auteurs, font entrevoir tout un ordre de recherches riches en résultats généraux, mais les indications qu'elles contiennent ne m'ont pas permis de reconstituer les raisonnements qui restent en partie mystérieux pour moi. C'est pourquoi, puisque les mathématiciens polonais semblent bien au courant de ces recherches de la jeune école russe, qu'ils y font appel et les complètent dans divers articles des *Fundamenta*, j'émets le vœu que, sous leur responsabilité, ils nous donnent un exposé des raisonnements qui nous manquent.

M. Sierpinski (II, 74) donne un nouveau moyen de caractériser les fonctions de classe α; pour la fonction $f(x, y)$, c'est à l'aide de propriétés des deux ensembles $r > f(x, y)$ et $r < f(x, y)$ qu'il énonce la condition.

Une généralisation toute naturelle du procédé de formation de M. Baire consiste à obtenir une fonction comme limite d'une série transfinie ou d'une suite transfinie; M. Sierpinski (I, 132) fait sur ces modes de représentation quelques remarques en partie basées sur les résultats de MM. Lusin et Souslin.

Voici maintenant non plus une généralisation, mais une modification du procédé de M. Baire. Ayant des fonctions, M. Baire obtient les fonctions de la classe suivante comme somme de séries dont les termes sont des fonctions déjà connues. M. Sierpinski assujettit les séries à être absolument convergentes. M. W.-H. Young avait considéré, au lieu de séries, des suites monotones de fonctions, c'est-à-dire des suites croissantes ou décroissantes. Dans les trois classifications, la classe 0 est formée par les fonctions continues. M. Sierpinski (II, 15), complétant un résultat de M. Baire, montre qu'une fonction appartient à la classe 1 de sa classification si, et seulement si elle est la différence de deux fonctions semi-continues supérieurement et que par suite sa classification diffère de celle de M. Baire. M. Kempisty (II, 64) compare les trois classifications, ce qui avait déjà été fait par M. Young en ce qui concerne sa classification et celle de M. Baire. L'étude de M. Kempisty est encore incomplète; il énonce comme probable le résultat suivant : la classification de M. Young est toujours en retard sur celle de M. Sierpinski et celle-ci sur celle de M. Baire; le retard n'excédant jamais une classe.

M. Mazurkiewicz (II, 28) démontre que toute fonction de

classe 1 de M. Baire diffère d'une fonction de classe 1 de M. Sierpinski de moins de ε, quel que soit ε. M. Sierpinski (II, 37) donne une seconde démonstration de ce théorème que M. Kempisty (II, 131) étend aux fonctions non bornées.

M. Sierpinski (II, 41) démontre que l'ensemble des points de convergence d'une suite de fonctions continues est la partie commune à une infinité dénombrable d'ensembles dont chacun est la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés et réciproquement.

Quelques Notes sont relatives à des questions diverses de la théorie des fonctions. M. Ruziewicz (I, 148) donne un exemple simple d'un fait d'abord prouvé par M. Hahn : deux fonctions continues ayant en tout point la même dérivée, finie ou non, et dont la différence n'est pas constante. M. Rajchmann (II, 50) donne une condition moyennant quoi une série de fonctions monotones à derivée nulle presque partout, a une somme de même nature. M. Wilkosz (II, 136) donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'une série de fonctions intégrables au sens de Riemann ait une somme de même nature. Il traduit géométriquement (II, 140) les conditions d'existence d'une différentielle totale première. Il énonce (II, 145) la condition sous laquelle une fonction est une dérivée ou est une dérivée et a pour carré une dérivée.

Les Notes qui restent ne sont plus relatives aux ensembles de points, mais aux ensembles abstraits, je les énumérerai rapidement : M. Kuratowski (I, 130) donne une définition de l'ensemble fini. M. Saks (II, 1) démontre l'identité de deux énoncés dus à M. Borel et à M. Sierpinski. M. Kuratowski (II, 161) et M. Sierpinski (II, 199) s'occupent de l'introduction de la notion d'ordre dans la théorie des ensembles conformément aux idées de MM. Hessenberg, Combédiac et Hartogs. MM. Kuratowski et Sierpinki (II, 172) déterminent la classe (au sens de M. Fréchet) la plus générale à laquelle s'applique le théorème dit « de Borel-Lebesgue ». M. Sierpinski (II, 179) démontre l'équivalence de trois propriétés. M. Hoborski (II, 193) démontre l'identité des limites des deux suites fondamentales de nombres ordinaux $\{\alpha_i\}$ et $\{\alpha_i + \beta\}$. M. Sierpinski (II, 112), revenant sur les questions qu'il avait déjà étudiées, s'occupe du rôle de l'axiome du choix de Zermelo dans la formation des exemples. J'ai dit ailleurs (II, 259)

que je ne comprends pas ces questions tout à fait comme M. Sierpinski, mais je suis pleinement d'accord avec lui sur le fait qu'il faut attacher une bien autre importance aux exemples qui n'utilisent pas l'axiome de Zermelo qu'à ceux qui l'utilisent. Beaucoup des exemples des *Fundamenta* n'ont malheureusement pu être obtenus qu'à l'aide de cet axiome.

J'espère que cette analyse, quelque sommaire qu'elle soit, fera comprendre la richesse du contenu du nouveau journal. On remarquera en particulier avec quelle activité se poursuit la dissection des ensembles de points; il me semble que, parmi les nombreuses notions qui s'offrent tout naturellement au cours de cette étude, beaucoup seront vite utilisées dans les applications à l'Analyse classique.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

HALPHEN (GEORGES). — ŒUVRES DE G.-H. HALPHEN, PUBLIÉES PAR LES SOINS DE C. JORDAN, H. POINCARÉ, ÉMILE PICARD, AVEC LA COLLABORATION DE E. VESSIOT. Tome III. 1 vol. 25^{cm}, 518 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1921.

Ce Volume est à peu près formé uniquement des deux grands Mémoires de notre regretté confrère : *Sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrales* et *Sur la classification des courbes gauches algébriques*. Le premier de ces Mémoires fut couronné par l'Académie en 1881 dans un concours célèbre, auquel prit part Henri Poincaré qui commençait alors à s'occuper des fonctions fuchsiennes. Dans ce travail considérable, où toutes les applications sont poussées jusqu'à leur dernier terme, les invariants des équations différentielles linéaires jouent un rôle capital, et c'est de leur considération que Halphen déduisit la solution du beau problème qu'il s'était posé sur les possibilités de réduction à des classes étendues d'équations différentielles. Le second Mémoire est peut-être l'œuvre la plus profonde d'Halphen, qui a été beaucoup plus loin que ses devanciers dans la classification extrêmement difficile des courbes gauches algébriques. Il a appliqué ses méthodes générales à la classification complète de ces courbes jusqu'au vingtième degré, et à celle des courbes de degré cent-vingt.

Un dernier Volume terminera la publication des Œuvres de l'illustre géomètre qu'une mort prématurée enleva à la Science, en 1889, à l'âge de quarante-quatre ans. ÉMILE PICARD.

VILLAT (Henri). — Comptes rendus du Congrès international des mathématiciens (Strasbourg, 22-30 septembre 1920). Toulouse, Édouard Privat, 1921; 1 vol. 28cm, 670 pages.

Dans son numéro de septembre 1920, le *Bulletin* rendait compte du Congrès international des mathématiciens qui s'est tenu à Strasbourg à cette époque et reproduisait les discours prononcés par M. Émile Picard, président du Congrès, à la séance d'ouverture et à la séance de clôture.

M. Henri Villat, professeur à l'Université de Strasbourg, publie aujourd'hui, en un beau volume, les comptes rendus des travaux de ce Congrès. Outre de nombreuses et intéressantes Communications, on y trouvera cinq Conférences générales : une de Sir Joseph Larmor, intitulée : *Questions in physical interdetermination;* une autre de M. Dickson, portant pour titre : *Some relations betwern the theorie of numbers and others branches of mathematics;* une troisième de M. de la Vallée Poussin : *Sur les fonctions à variation bornée et les questions qui s'y rattachent;* une quatrième de M. Volterra : *Sur l'enseignement de la Physique mathématique et sur quelques points d'Analyse;* et enfin une Conférence de M. Nörlund : *Sur les équations aux différences finies.*

En dehors de quelques discours et rapports, on trouvera aussi la liste des dons généreux faits à l'occasion de cette réunion. Ils ont de beaucoup dépassé ce que pouvaient espérer les amis des sciences abstraites, et ils ont permis de faire la belle publication, qui restera le témoin de l'activité scientifique de ce Congrès international, tenu dans la capitale de l'Alsace.

La Rédaction.

MÉLANGES.

REMARQUES SUR LE THÉORÈME DE JACOBI RELATIF AUX PÉRIODES DES FONCTIONS UNIFORMES, ET SUR LA PROJECTION DES RÉSEAUX DE L'ESPACE ;

Par M. Gaston Julia.

1. Étant donné trois nombres complexes a_1, a_2, a_3, on cherche à étudier la disposition des points que représentent les nombres

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3,$$

m_1, m_2, m_3 étant des entiers réels positifs ou négatifs quelconques. On sait à ce sujet que : 1° s'il existe trois entiers réels et non tous nuls μ_1, μ_2, μ_3 tels que

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 = 0,$$

les points $m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3$ sont les *sommets d'un réseau de parallélogrammes*, dans le plan ils forment un ensemble de points *isolés ;* 2° s'il n'existe pas de système de trois entiers μ_i non tous nuls, tels que $\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 = 0$, on sait qu'il est possible, étant donné ε positif arbitrairement petit, de trouver trois entiers ν_1, ν_2, ν_3 tels que

$$|\nu_1 a_1 + \nu_2 a_2 + \nu_3 a_3| \leq \varepsilon.$$

Si les a_i sont des *périodes* d'une fonction de z, tous les

$$m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3$$

sont des périodes et ce qu'on vient de dire exprime que si une

fonction admet trois périodes : ou bien 1° elles ne sont pas distinctes, ou bien 2° il existe une période infiniment petite. C'est l'impossibilité de ce deuxième cas pour les fonctions uniformes qui constitue le célèbre théorème de Jacobi.

Dans le deuxième cas, les points $m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3$ *ne sont pas isolés*, ils forment un ensemble E qui reste invariant par toute translation qui amène un point de E sur un autre point de E, et qui admet ici des *translations infinitésimales*, et par conséquent *n'est pas discontinu*. On se propose de montrer que ce deuxième cas se décompose en deux sous-cas.

a. E se compose de points partout denses sur une *infinité de droites parallèles*, *équidistantes*, et parallèles à la translation infinitésimale.

b. E est *dense dans tout le plan*.

A vrai dire, le fond de ces résultats n'est pas nouveau. Kronecker, dans plusieurs mémoires remarquables, a étudié la question de la résolution en nombres entiers d'équations linéaires ou d'inégalités linéaires dans les cas les plus généraux, et en appliquant son analyse au problème qui nous occupe, on obtiendrait les résultats annoncés plus haut. Présentés sous la forme géométrique précédente, les résultats précédents gagnent quelque clarté et nous allons, pour les obtenir, faire appel à l'intuition géométrique plutôt qu'à l'analyse de Kronecker.

2. On peut considérer les points a_1, a_2, a_3 comme les projections, sur le plan de la variable complexe z, de trois points A_1, A_2, A_3 de l'espace. Les points $m_1 a_1 + m_2 a_2 + m_3 a_3$ sont alors les projections sur le plan z des sommets d'un réseau [1] de parallélépipèdes construit sur les trois vecteurs de base OA_1, OA_2, OA_3, O étant l'origine des coordonnées du plan z. A ce titre, le problème que nous étudions est bien celui de la *projection sur un plan d'un réseau de points de l'espace*.

---

[1] Dans la suite j'emploierai indifféremment l'expression « sommets du réseau » ou « points du réseau ».

Premier cas. — Le cas où les périodes a_1, a_2, a_3 ne sont pas distinctes, c'est-à-dire où existent trois entiers non tous nuls μ_i tels que

$$\mu_1 a_1 + \mu_2 a_2 + \mu_3 a_3 = 0,$$

s'exprime ici par ce fait que dans le réseau construit sur la base OA_1, OA_2, OA_3, il y a un sommet A qui est situé sur la perpendiculaire en O au plan de projection ou bien que le *plan de projection est perpendiculaire à un segment joignant deux points du réseau.* Dans ce cas et dans ce cas seulement, la projection du réseau spatial est un réseau plan formé des sommets d'un réseau de parallélogrammes. Le plan de projection est alors perpendiculaire à *une infinité de plans contenant trois sommets non en ligne droite du réseau*, a savoir tous les plans passant par O, A et un autre sommet du réseau non situé sur OA.

3. *Deuxième cas.* — Écartant le premier cas, il peut arriver que le plan de projection P soit *perpendiculaire à un plan π contenant trois sommets non en ligne droite du réseau.* On montrera alors qu'il n'existe pas de plan non parallèle à π contenant trois sommets non en ligne droite du réseau, car s'il en existait un autre, on retomberait sur le cas où les trois périodes a_i ne sont pas distinctes. La projection du réseau de l'espace est formée alors de *points partout denses sur une série de droites qui sont les traces sur P de π et des plans parallèles passant par tous les points du réseau* c'est le sous-cas *a*.

Enfin, si P n'est perpendiculaire à aucun plan contenant trois sommets du réseau, la projection du réseau sur P est un ensemble dense dans tout le plan. C'est le sous-cas *b*.

4. Prenons comme unité de volume le volume du parallélépipède construit sur OA_1, OA_2, OA_3. J'appellerai *parallélépipède du réseau*, tout parallélépipède dont les sommets sont des points du réseau dont la base est (OA_1, OA_2, OA_3) et qui ne contient à son intérieur ou sur sa surface pas d'autres points du réseau que ses sommets. Trois arêtes adjacentes d'un pareil parallélépipède peuvent servir de base au réseau au même titre que OA_1, OA_2, OA_3. On voit alors aisément que le *volume de tout parallélépipède du*

réseau est égal à l'unité puisque c'est un multiple entier du volume du parallélépipède de base, et réciproquement, les deux parallélépipèdes pouvant servir de base au même réseau.

5. *a*. Soit alors π un plan passant par trois points non en ligne droite du réseau et par exemple par O. Les points du réseau situés dans π forment évidemment un réseau plan de sommets de parallélogrammes. Dans ce réseau plan choisissons un *parallélogramme de base*, c'est-à-dire dont les sommets soient des points du réseau et qui n'ait pas d'autres points du réseau que ceux-là à son intérieur ou sur son contour. Soit $O\alpha_1\beta_1\gamma$ ce parallélogramme de base, s son aire. Tout point de réseau spatial non situé dans π reste à une distance de $\pi \geq \frac{1}{s}$, car il détermine avec le parallélogramme de base $O\alpha_1\beta_1\gamma$ un parallélépipède dont le volume, étant un multiple entier du volume du parallélépipède de base du réseau spatial, sera un entier positif, dont la plus petite valeur sera l'unité. Soit δ un point du réseau spatial tel que le parallélépipède de base $O\alpha_1\beta_1\gamma$ et d'arête $O\delta$, étant du réseau, ait pour volume l'unité. Alors δ est à la distance $\frac{1}{s}$ du plan π. Par δ menons un plan π_1 parallèle à π; dans π_1 les points du réseau spatial forment un réseau plan qui se déduit du réseau situé dans π par la translation $O\delta$. Le réseau spatial se décompose alors en une infinité de réseaux plans qui se déduisent du réseau plan situé dans π, par la translation $O\delta$ et tous ses multiples entiers positifs ou négatifs. C'est ce que Minkowski appelle *l'adaptation d'un réseau spatial à un réseau plan qu'il contient*.

Projetant alors sur P, les points de E seront répartis sur une infinité de droites parallèles équidistantes, traces sur P des plans équidistants déduits de π par les translations

$$n.\overline{O\delta}\,[n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots].$$

Dans le plan π, le réseau plan considéré est tel qu'aucun segment joignant deux de ses points n'est perpendiculaire à P, car, si cela était, on serait dans le premier cas qui est supposé écarté. Quelle est alors la projection de ce réseau plan sur P? Les deux vecteurs de base du réseau plan se projettent sur P suivant deux vecteurs

parallèles $O\sigma_1$, $O\sigma_2$ évidemment *incommensurables*, car, s'ils étaient commensurables, on aurait deux entiers ρ_1 et ρ_2 pas tous nuls tels que $\rho_1\sigma_1 + \rho_2\sigma_2 = 0$ et l'on en conclurait qu'un point du réseau plan est sur la verticale de O, ce qui n'est pas. La projection du réseau plan sur P s'obtenant à partir des deux vecteurs incommensurables $O\sigma_1$, $O\sigma_2$ par les formules $\rho_1\sigma_1 + \rho_2\sigma_2$ (ρ_1 et ρ_2 entiers réels arbitraires), sera formée de *points partout denses sur la trace de* π *sur* P.

Dans le cas qui nous occupe, E se compose de points partout denses sur une infinité de droites parallèles équidistantes. Toutes les périodes de E dont l'amplitude est inférieure à l'écart de ces droites sont *parallèles à ces droites;* en abrégé, les *périodes infiniment petites sont parallèles à une même droite.*

Le résultat obtenu prouve qu'il est impossible que P soit perpendiculaire à la fois à deux plans non parallèles contenant trois points du réseau spatial, à moins que ces deux plans ne se coupent suivant une droite joignant deux points de ce réseau et alors on est dans le premier cas envisagé : P perpendiculaire à une droite joignant deux points du réseau.

6. *b*. Supposons que P ne soit perpendiculaire à aucun plan contenant trois points du réseau spatial et projetons ce réseau spatial sur P. Je dis que l'ensemble E projection est *partout dense dans le plan* P. En effet, dans ce sous-cas *b* (comme dans le cas *a*) on sait qu'il y a *une période infiniment petite*, $O\alpha$. Si E n'était pas partout dense, il existerait un petit carré C de bases parallèles à $O\alpha$, ne contenant pas de point de E, et l'on peut toujours supposer que le côté du carré C est supérieur à la période $O\alpha$. Comme toute translation égale à une période laisse E invariant, la translation $O\alpha$, appliquée au carré C, donnera un nouveau carré C_1 ne contenant pas de point de E, et, en général, toutes les translations $n.\overline{O\alpha}.[n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots]$ donneront des carrés C_n ne contenant pas de point de E. Les carrés C_n balaient une *bande indéfinie* Δ parallèle à $O\alpha$ ne contenant pas de point de E.

S'il existait une période *infiniment petite* $O\beta$ *non parallèle à* $O\alpha$, en appliquant à la bande Δ toutes les translations

$$n.\overline{O\beta}(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

on aurait des bandes Δ_n ne contenant pas de point de E. L'ensemble des bandes Δ_n recouvre tout le plan C. E n'aurait aucun point, ce qui est absurde. Il faut donc admettre que *toute période infiniment petite est parallèle à* $O\alpha$.

A partir de O, à l'aide de la période infiniment petite $O\alpha$, on déduit des points de E partout denses sur la parallèle à $O\alpha$ menée par O. Il en est de même à partir de tout point de E : on déduit une droite parallèle à $O\alpha$, où les points de E sont partout denses. Ces droites sont *nécessairement isolées* car l'existence de deux de ces droites infiniment voisines conduirait à l'existence d'une période infiniment petite non parallèle à $O\alpha$. On en déduit que les points de E sont partout denses sur une *infinité de droites parallèles équidistantes;* chacune de ces droites est alors la trace sur le plan P d'un plan contenant trois points non en ligne droite du réseau spatial, et par conséquent on est dans le sous-cas *a* contrairement à l'hypothèse faite. Il faut donc, dans le sous-cas *b*, que E *soit partout dense dans le plan* P. C. Q. F. D.

REMARQUES SUR LES MOUVEMENTS RELATIFS A LA SURFACE DE LA TERRE ;

PAR M. GASTON JULIA.

---

1. La présente Note a pour objet quelques remarques, d'ordre pédagogique, sur deux problèmes traités dans les Cours de Mécanique rationnelle : 1° le pendule de Foucault ; 2° le mouvement d'un point pesant sur un plan horizontal lié à la Terre. Elles établissent entre ces problèmes d'apparence bien distincte un lien curieux et elles éclairent les résultats classiques obtenus dans l'étude de ces deux problèmes.

2. *Pendule de Foucault.* — Lorsqu'on prend pour axes les *axes locaux :* Ox tangente au méridien vers le Sud, Oy tangente au parallèle vers l'Est, Oz verticale descendante, en désignant par ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre et par λ la latitude du lieu, positive dans l'hémisphère nord, les équations classiques auxquelles conduit l'étude des petites oscillations du pendule de Foucault sont, après des simplifications qui consistent à négliger les carrés et les produits de $\frac{x}{l}$, $\frac{y}{l}$, ω, ou leurs dérivées devant ces quantités elles-mêmes,

$$(1) \quad \begin{cases} x'' = -\dfrac{g}{l}x + 2\omega y' \sin\lambda, \\ y'' = -\dfrac{g}{l}y - 2\omega x' \sin\lambda. \end{cases}$$

Dans les Cours, on tire de ces équations deux intégrales premières par les combinaisons des aires et des forces vives et l'on remarque que, par rapport à des axes $Ox_1y_1z_1$ (tels que Oz_1 coïncide avec Oz), et tournant autour de Oz avec la vitesse angulaire $-\omega_1 = -\omega \sin\lambda$, les intégrales premières ainsi obtenues coïncident avec celles que les mêmes combinaisons font apparaître dans le mouvement d'un point attiré par O proportionnellement à la distance.

Or c'est là un résultat qui se voit clairement si l'on recherche directement la force *relative au trièdre* $Ox_1y_1z_1$ qui sollicite le point M dont le mouvement par rapport à $Oxyz$ est réglé par les équations (1).

En effet, le vecteur

$$\left\{\begin{array}{l} 2\omega_1 y' \\ -2\omega_1 x' \end{array}\right.$$

figurant au deuxième membre de (1) provient d'une *force centrifuge composée* lorsqu'on suppose que les axes $Oxyz$ tournent autour de Oz avec la vitesse angulaire ω_1. Effectivement, *par rapport à* $Ox_1y_1z_1$, *les axes* $Oxyz$ *tournent bien autour de* Oz *avec la vitesse angulaire* ω_1.

Soit alors F_1 la force *relative au trièdre* $Ox_1y_1z_1$ qui sollicite le point M, (X_1, Y_1) ses projections sur Ox et Oy, $F(X, Y)$ étant la force *relative au trièdre* $Oxyz$ sera

$$X = X_1 + m\omega_1^2 x + 2m\omega_1 y',$$
$$Y = Y_1 + m\omega_1^2 y - 2m\omega_1 x',$$

puisque $m\omega_1^2 r$, dont les projections sont $m\omega_1^2 x$ et $m\omega_1^2 y$, est la force centrifuge, et le vecteur $(2m\omega_1 y', -2m\omega_1 x')$ est la force centrifuge composée.

Or

$$X = m\left[-\frac{g}{l}x + 2\omega_1 y'\right],$$
$$Y = m\left[-\frac{g}{l}y - 2\omega_1 x'\right],$$

d'après (1).

Il en résulte que

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} X_1 = -m\left[\dfrac{g}{l} + \omega_1^2\right]x \\ Y_1 = -m\left[\dfrac{g}{l} + \omega_1^2\right]y \end{array}\right. \qquad F_1 = -m\left[\frac{g}{l} + \omega_1^2\right]r.$$

Relativement au trièdre $Ox_1y_1z_1$, *la force qui sollicite* M *est donc une force attractive, émanée de* O, *proportionnelle à la distance.* Par rapport à ces axes $Ox_1y_1z_1$, M décrira une ellipse ou un segment de droite qui sembleront tourner, par rapport aux axes locaux, avec une vitesse angulaire $-\omega_1 = -\omega \sin\lambda$. C'est le résultat classique obtenu, sans aucune intégration nou-

velle à partir des équations (1). J'ajoute qu'on pourrait présenter l'effet du changement du trièdre $Oxyz$ en $O_1x_1y_1z_1$ sur la force qui sollicite M, d'une manière purement géométrique, sans passer par l'intermédiaire des équations (1) et obtenir ainsi directement les équations (2) : il suffirait pour cela de raisonner à peu près comme le fait M. Lecornu dans le Tome I de son *Cours de Mécanique* à la page 375, où il donne une solution directe du deuxième problème qui va nous occuper maintenant.

3. *Mouvement dans un plan horizontal.* — Par rapport aux axes $Oxyz$, le plan horizontal du mouvement étant Oxy, les équations classiques sont

$$(3)\qquad \begin{cases} x'' = 2\omega y' \sin\lambda, \\ y'' = -2\omega x' \sin\lambda. \end{cases}$$

Elles ne diffèrent des équations (1) que par la suppression de la force

$$\left(-\frac{mg}{l}x, \quad -\frac{mg}{l}y\right)$$

due à la tension du fil du pendule.

Les mêmes considérations que précédemment prouvent alors que la force F_1, relative au trièdre $Ox_1y_1z_1$, qui sollicite M, aura pour projections sur Ox, Oy

$$(4)\qquad \begin{cases} X_1 = -m\omega_1^2 x \\ Y_1 = -m\omega_1^2 y \end{cases} \qquad F_1 = -m\omega_1^2 r.$$

Relativement aux axes $Ox_1y_1z_1$, le point M est encore sollicité par une force attractive émanée de O, proportionnelle à la distance

$$F_1 = -m\omega_1^2 r.$$

Mais la différence avec le pendule de Foucault c'est que le coefficient ω_1 de l'attraction est ici *identique* à la vitesse angulaire de rotation des axes $Ox_1y_1z_1$ par rapport aux axes locaux ; dans le pendule de Foucault, ce coefficient était $\sqrt{\frac{g}{l} + \omega_1^2}$ et, à cause de la petitesse de ω_1^2 par rapport à $\frac{g}{l}$, ce coefficient est très voisin de $\sqrt{\frac{g}{l}}$ et diffère *notablement* de la vitesse angulaire ω_1.

Relativement aux axes $Ox_1y_1z_1$, le point M décrira une ellipse ou un segment de droite

$$x_1 = a\cos\omega_1 t - b\sin\omega_1 t,$$
$$y_1 = a'\cos\omega_1 t + b'\sin\omega_1 t.$$

Revenant aux axes locaux

$$x = \quad x_1\cos\omega_1 t + y_1\sin\omega_1 t,$$
$$y = -x_1\sin\omega_1 t + y_1\cos\omega_1 t.$$

Tous calculs faits, il vient

$$(5)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{a+b'}{2} - \dfrac{a-b'}{2}\cos 2\omega_1 t + \dfrac{a'-b}{2}\sin 2\omega_1 t, \\[2ex] y = \dfrac{a'-b}{2} - \dfrac{a-b'}{2}\sin 2\omega_1 t + \dfrac{a'+b}{2}\cos 2\omega_1 t. \end{cases}$$

Ces formules s'interprètent de la façon suivante :

A partir du point C, dont les coordonnées x et y sont $\dfrac{a+b'}{2}$ et $\dfrac{a'-b}{2}$, menons un axe $C\xi$ dont la direction positive fait l'angle $(-2\omega_1 t)$ avec Ox, et sur cet axe portons le vecteur $C\mu$ dont la valeur algébrique est $\dfrac{a-b'}{2}$, puis à partir de μ un axe $\mu\eta_1$ dont la direction positive fait $\left(-2\omega_1 t + \dfrac{\pi}{2}\right)$ avec Ox, c'est-à-dire un axe déduit de l'axe qui porte $C\mu$ par une rotation de $+\dfrac{\pi}{2}$ autour de μ, et sur l'axe ainsi obtenu, $\mu\eta_1$, portons le vecteur μM dont la valeur algébrique est $\dfrac{a'+b}{2}$; l'extrémité M est le point dont les coordonnées x, y sont données par les formules (5). Le point C est fixe, le triangle rectangle $C\mu M$ est indéformable et tourne autour de C avec la vitesse angulaire constante $(-2\omega_1)$. Le point mobile M décrit donc un cercle de centre C, avec une vitesse angulaire constante $(-2\omega_1)$. Le centre du cercle sera *à la droite du mobile décrivant le cercle lorsqu'on est dans l'hémisphère nord.*

Tous ces résultats sont bien connus et le seul intérêt de ce qui précède est dans la manière d'y parvenir, qui unit les deux problèmes ci-dessus traités par un lien assez remarquable.

GASTON JULIA.

A PROPOS DE QUELQUES LIVRES SUR LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ

Par M. Jean VILLEY.

Le public français s'est, à son tour, passionné depuis quelques mois pour les théories physiques nouvelles condensées par Einstein dans la théorie de la relativité.

Cette attirance est due surtout au fait nouveau d'une théorie créée par les procédures rigoureuses du raisonnement scientifique, qui conduit à mettre en discussion les formes mêmes dans lesquelles travaille notre pensée pour nous représenter le monde extérieur. C'est l'éternel attrait de la métaphysique qu'on trouve à la base de ce mouvement de curiosité, c'est l'appât de l'inconnaissable, où l'esprit peut se laisser bercer par la fantaisie de son imagination dans les voies les plus diverses, et où chacun peut avoir raison, puisque personne ne peut lui démontrer qu'il a tort ...., tandis que l'acquisition progressive des connaissances scientifiques objectives demande tant de prudence et d'efforts.

Il reste encore beaucoup à faire en particulier pour préciser et rendre intelligible tout le contenu latent du principe de relativité. Il paraît vraisemblable que l'étude systématique des faits envisagés sous ce jour entraînera une modification progressive de notre manière de penser et de notre représentation du monde extérieur, mais ceci ne peut être que le résultat d'une lente adaptation de l'esprit, examinant sous toutes leurs faces les contradictions qu'il découvre dans ses perceptions extérieures et qu'il ne peut logiquement faire disparaître en restant dans le cadre traditionnel de sa pensée.

L'engouement dont jouit actuellement dans le public la théorie de la relativité est une chose dont on doit se louer, comme de tout mouvement humain désintéressé; mais, au point de vue de ses résultats, il peut avoir des avantages et des inconvénients. Il peut

être un facteur intéressant de progrès scientifique, dans la mesure où la curiosité qu'excite cette théorie amènera des esprits sérieux et réfléchis à étudier les constatations expérimentales qui lui servent de base et les déductions qu'on en tire logiquement. Il peut au contraire nuire gravement à l'esprit scientifique, dans la mesure où il conduit à confondre l'étude scientifique avec les spéculations philosophiques auxquelles elle ouvre la porte. Le danger est d'autant plus net que, bien souvent, on hésite d'autant moins à discourir et à discuter sur ces conclusions, qu'on a moins approfondi la théorie elle-même, et qu'on a moins senti l'ampleur de l'effort intellectuel qui reste nécessaire pour arriver à la penser.

Un des points de vue les plus sains, en même temps que le plus frappant peut-être, pour s'adapter à ces notions nouvelles, semble être le suivant, sur lequel il y a lieu d'attirer l'attention de tous ceux qui cherchent des impressions précises plutôt que des raisonnements souvent incertains et chancelants. C'est celui auquel s'est placé M. Langevin dans son Cours du Collège de France :

Les équations de l'électromagnétisme introduisent immédiatement, au lieu du groupe de Galilée, où le temps reste isolé dans les substitutions conformément à la notion vulgaire du temps absolu commun à tous les systèmes, le groupe de Lorentz, où le temps et les variables d'espace s'introduisent simultanément, et avec des rôles de même plan, dans les substitutions. Cela conduit à envisager, au lieu de l'espace et du temps classiques, le continuum univers à quatre dimensions de Minkowski.

Cet univers à quatre dimensions, nous ne pouvons nous le représenter et le penser; il ne faut donc pas espérer le soumettre utilement à des raisonnements que puisse suivre notre imagination; mais il peut être l'objet de symboles mathématiques précis, généralisation immédiate des symboles courants à trois dimensions, sur lesquels opéreront, par analogie et suivant les mêmes procédures, les raisonnements mathématiques. Au lieu de philosopher de façon prématurée et stérile, il est raisonnable de chercher ce qu'on peut tirer, par ces raisonnements, de la notion d'univers. Si, malgré la modification profonde du point de départ, nous arrivons ainsi à prévoir des lois physiques et mécaniques qui contiennent et synthétisent, soit comme cas particuliers, soit comme premières approximations, les lois de la théorie classique, et si de

plus les secondes approximations ainsi obtenues expliquent des anomalies observées à partir des lois classiques, nous serons amenés tout naturellement à penser que l'univers à quatre dimensions est autre chose qu'un symbole mathématique et qu'il répond vraiment à une réalité profonde. Il nous paraîtra alors tout naturel de tenter une adaptation de notre esprit à cette réalité, et de lui faire violence en essayant de modifier ses cadres ataviques.

Tous ceux qui ont eu le privilège de suivre l'enseignement de M. Langevin savent quelle impression puissante donne en ce sens l'examen de l'édifice si simple et si logique auquel on arrive ainsi, par des déductions mathématiques très immédiates, à partir de la notion d'univers à quatre dimensions : On voit se réunir, dans une synthèse condensée au delà de tout ce qu'on eût pu espérer, les diverses lois de la Physique, y compris les phénomènes de gravitation.

Bien mieux que des raisonnements souvent très décevants, qui laissent une impression d'hésitation et d'incertitude du fait que la pensée cherche à y critiquer ce qui est son cadre même et son essence, l'ensemble puissamment cohérent auquel on arrive ainsi, et qui s'impose presque objectivement à l'admiration de l'esprit le moins prévenu, le prédispose à sentir, sinon à comprendre, que nos conceptions actuelles sont probablement inadéquates aux réalités extérieures.

L'étude précise de cette synthèse objective doit donc raisonnablement constituer la phase préalable et le point de départ de toute tentative pour s'assimiler les nouvelles conceptions physiques.

Des esprits prudents peuvent penser que, devant l'impuissance actuelle de nos moyens intellectuels, la sagesse serait peut-être de s'en tenir à ces constatations, puisque leur présentation mathématique suffit pour en tirer les conséquences utiles. Il est cependant bien naturel d'essayer de comprendre ... même quand la conclusion paraît être hélas! que la réalité est incompatible avec la manière de raisonner de l'esprit humain, juste bonne pour de premières approximations (amplement suffisantes d'ailleurs pour toutes les applications pratiques de la vie courante).

C'est ce que tentent les exposés de la théorie de la relativité qui visent à présenter en langage ordinaire (c'est-à-dire dans le cadre de nos conceptions habituelles; et là réside un germe de contra-

dictions dangereuses) le contenu et la justification de la physique nouvelle.

Nous ne parlerons pas des tentatives de vulgarisation au sens habituel de ce mot. La vulgarisation scientifique a déjà un rôle difficile dans sa tâche normale qui consiste à énoncer les résultats de théories physiques ordinaires précises et bien établies, et à présenter, sous leur forme essentielle, les raisonnements par lesquels elles les obtiennent. Mais si la réalité est quadridimensionnelle, des coupes tridimentionnelles seront par essence de simples apparences non conformes à cette réalité ; et ce n'est pas par un mécanisme imaginé dans la conception tridimensionnelle qu'on pourra expliquer celle-ci ; ou du moins une apparence d'explication ainsi conçue aura ce néfaste résultat, danger habituel des vulgarisations même dans les sujets les plus classiques, de faire croire au lecteur qu'il a compris alors qu'il n'en est rien et de fausser chez lui les qualités essentielles qui caractérisent l'esprit scientifique. Ces notions nouvelles ne sont pas de celles qui se peuvent aborder utilement sans une préparation et des efforts préalables, et l'on ne saurait essayer de suggérer sainement la notion d'univers à quatre dimensions à des lecteurs à qui l'on ne demanderait aucune connaissance des notions géométriques les plus fondamentales telles que nombre de dimensions d'un continuum, degré d'une équation entre les variables coordonnées, changement de variables, invariants et équations invariantes.

Pour tenter un exposé verbal de la théorie de la relativité, il faut, ou bien l'avoir étudiée assez superficiellement pour être ébloui par son harmonie au point de ne pas sentir ses difficultés, ou bien l'avoir approfondie sous tous ses aspects au point de les bien apprécier toutes et de pouvoir en donner ou du moins en faire pressentir les solutions.

Les deux auteurs étrangers les plus qualifiés en ces matières — Eintein qui, après avoir joué un rôle fondamental dans la mise au point de la théorie restreinte, a véritablement créé la théorie généralisée, et Eddington, qui s'en est fait le champion le plus ardent en Angleterre après avoir personnellement apporté la vérification de la déviation des rayons lumineux par le Soleil — ont écrit, dans ce sens, et sous des formes différentes, deux Ouvrages fort intéressants récemment traduits en français. Ils sont des plus

instructifs non seulement séparément, mais aussi par les rapprochements qu'ils permettent d'établir entre des procédés différents de présentation de la théorie.

* * *

Le petit Volume d'Einstein [1] est particulièrement bien adapté à une première [2] étude de la théorie.

Le point de départ est le *principe* de relativité restreinte. Il consiste à étendre *a priori* à tous les phénomènes physiques l'équivalence rigoureuse des systèmes d'axes galiléens (en translations uniformes les uns par rapport aux autres) constatée en Mécanique; et il énonce qu'aucune mesure effectuée à l'intérieur de l'un quelconque de ces systèmes ne différera de ce qu'elle aurait été à l'intérieur d'un des autres. Des mesures physiques ne sauraient par conséquent différencier un système des autres, et repérer l'un d'entre eux comme ayant une valeur absolue.

Ce principe a d'abord paru s'imposer logiquement tant qu'on a supposé tous les phénomènes physiques réductibles aux phénomènes de la Mécanique classique; mais (Chap. V) l'étude de l'Électrodynamique et de l'Optique ayant manifesté l'inanité de cette espérance, cet argument péremptoire a disparu. Les deux arguments donnés pour justifier néanmoins le point de départ ne peuvent, semble-t-il, lui apporter qu'une probabilité sujette à discussion. Le premier, c'est que, si la Mécanique classique n'offre pas une base suffisante pour l'explication théorique de tous les phénomènes, elle y tient cependant une place très considérable, et qu'un principe de cette généralité ne semble pas *a priori* devoir être valable pour tout un ordre de phénomènes et en défaut par ailleurs. Le second, c'est que si le mouvement absolu avait un sens

---

(1) *La Théorie de la Relativité restreinte et généralisée* (mise à la portée de tout le monde), par A. Einstein, traduit d'après la dixième édition allemande par Mlle J. Rouvière, licenciée ès sciences mathématiques, avec une Préface de M. Émile Borel. 120 pages in-16, Gauthier-Villars, 1921.

(2) Il reste entendu que cette première étude doit raisonnablement être précédée d'une étude préalable où l'on examinera, de façon purement objective, toute la synthèse physique déduite, par de simples opérations géométriques, de la seule notion d'univers à quatre dimensions.

physique, celui de la Terre devrait faire apparaître des anisotropies dans les phénomènes.

On peut être tenté de ne pas suivre complètement l'auteur sur ce terrain et penser que cette extension du principe de relativité aux phénomènes électromagnétiques, aujourd'hui admise à la suite de constatations expérimentales *qui ont causé au début un étonnement considérable et très général*, n'est pas de celles qui s'imposent si nettement *a priori* à notre esprit. L'hypothèse d'un éther électromagnétique quasi matériel rejetait cette extension, puisqu'elle prévoyait des repérages qui donneraient un sens aux translations absolues de la matière; or elle a été fort longtemps en honneur et même presque classique. Elle conduisait bien à prévoir effectivement une anisotropie des phénomènes optiques, mais si faible qu'elle échappait à l'observation courante, et lorsque Michelson eut réalisé la sensibilité nécessaire pour la déceler, son résultat négatif a provoqué une véritable révolution dans les esprits.

Cette conception d'un éther fixe, capable de repérer des axes privilégiés, représentait même, semble-il, le point de vue presque obligé de l'esprit, à partir du moment où la nature manifestement périodique des phénomènes lumineux a conduit à y voir un transport de mouvements au lieu d'un transport de matière. Cette analogie les a rapprochés non plus des phénomènes d'inertie, qui comportaient la relativité, mais des phénomènes acoustiques, qui comportaient au contraire des repérages possibles par rapport au milieu propagateur. Un repérage par rapport à un éther support de vibrations optiques ne choque pas plus l'esprit, au premier abord, qu'un repérage par rapport à l'atmosphère support de vibrations acoustiques.

Une telle notion paraissait si naturelle qu'elle s'est imposée longtemps malgré l'absence de toutes perceptions directes de l'éther, et malgré l'impossibilité de lui attribuer aucune des qualités sensibles qui manifestent les réalités extérieures matérielles. Cette impuissance de notre imagination n'était pas une objection plus grave contre cette théorie que contre les théories relativistes qui l'ont remplacée. La seule difficulté d'ordre vraiment logique, et grave par conséquent, c'était que cet éther immobile fût sans action aucune sur les phénomènes d'inertie mécanique et laissât absolument équi-

valents à ce point de vue les divers axes galiléens malgré leurs translations plus ou moins rapides par rapport à lui; mais on pouvait éluder cette difficulté en incriminant la sensibilité insuffisante de nos observations.

Ces remarques, d'ailleurs, si elles sont intéressantes au point de vue de l'histoire de l'esprit humain, ne soulèvent pas ici de difficultés sérieuses, car le principe de relativité restreinte est actuellement à peu près universellement accepté à cause de l'accord entre toutes ses conséquences et les observations expérimentales.

Avec l'auteur, on admettra donc le principe. Si l'on admet aussi la composition des vitesses suivant la loi d'addition géométrique de la cinématique classique, et la loi simple de propagation de la lumière dans le vide à vitesse constante (par rapport à l'éther), on rencontre immédiatement une contradiction mise en évidence dans les Chapitres VI et VII : La vitesse de la lumière, égale à c par rapport à un système, sera égale à $(c - v)$ dans un autre en translation à vitesse v par rapport au premier; il y aura donc possibilité de discriminer ces systèmes par des mesures intérieures.

Si l'on veut sauver le principe, il faut : soit modifier la loi simple de propagation de la lumière, ce que ne permet guère la théorie de Lorentz; soit rejeter la cinématique classique, c'est-à-dire modifier les notions habituelles d'espace et de temps : c'est ce que fait la théorie de la relativité.

L'analyse de la notion de temps, dans les Chapitres VIII et IX, montre simplement que, pour deux points non confondus, la simultanéité ne peut être que relative; elle dépend du mouvement de l'observateur par rapport à l'ensemble des deux points, car elle ne peut être définie de façon objective qu'en utilisant des échanges de signaux lumineux. D'autre part, la mesure d'une longueur portée par un système en mouvement par rapport à celui de l'observateur nécessite l'observation de coïncidences *simultanées* de ses extrémités avec des repères; cette mesure pourra donc se trouver altérée par contre-coup, et donner un résultat variable avec la vitesse du système (Chap. X).

A la suite de ces constatations on est amené à rejeter les deux hypothèses fondamentales de la Cinématique classique, qu'on sous-entend en général tellement elles paraissent évidentes, et que l'auteur précise sous les énoncés suivants :

1° L'intervalle du temps qui sépare deux événements est indépendant de l'état du mouvement du système de référence;

2° La distance dans l'espace de deux points d'un corps solide est indépendante de l'état de mouvement du système de référence.

La contradiction précisée plus haut pourra disparaître, la règle ordinaire de composition des vitesses n'étant plus conservée. La relation entre la distance et l'intervalle de temps qui séparent deux événements, mesurés dans deux systèmes en translation relative, sera alors déterminée par la condition que la vitesse de la lumière garde la même valeur dans ces divers systèmes : cela suffit à définir la transformation de Lorentz (Chap. XI) et les modifications qu'elle entraîne, dans les mesures des longueurs et des temps, en fonction de la vitesse relative de l'observateur.

La nouvelle loi de composition des vitesses ainsi déterminée a été reconnue, avec une très grande précision, en accord avec les résultats des expériences de Fizeau sur la propagation de la lumière dans les liquides en mouvement. A côté des tentatives si artificielles d'explication par entraînement partiel de l'éther, cette conclusion est d'une simplicité frappante. C'est avec raison que le Chapitre XIII présente cette expérience comme fondamentale au point de vue de la relativité, et la fait intervenir avant toute autre, comme vérification objective (¹).

Tout cela peut se résumer dans l'énoncé : toutes les lois générales de la nature resteront invariantes par la transformation de Lorentz. Cette condition limite les lois possibles, et peut aider à les découvrir. Elle entraîne des conséquences immédiates relatives au mode de variation des diverses grandeurs physiques en fonction du mouvement, et en particulier les modifications à la notion classique d'énergie cinétique qui sont rappelées au Chapitre XX : elles comportent l'identification de la masse et de l'énergie, avec cette conclusion que la masse d'un corps doit être modifiée lorsqu'il reçoit ou émet de l'énergie. L'auteur indique que les variations ainsi prévues dans les échanges d'énergie pratiquement

(¹) Il y a lieu toutefois de noter que M. Sagnac a proposé il y a quelques années une théorie de la propagation de la lumière dans les milieux matériels transparents, où les résultats de Fizeau apparaissaient comme l'effet moyen de réflexions successives sur les molécules en mouvement dans un éther immobile.

réalisables sont beaucoup trop petites pour qu'on puisse songer à les mettre en évidence. Il est toutefois intéressant d'ajouter que M. Langevin, qui, dès les premiers énoncés du principe de relativité restreinte, a indiqué ces conséquences alors inattendues relatives à l'inertie de l'énergie, et qui a beaucoup contribué ensuite à les préciser, propose d'interpréter les écarts entre les poids atomiques des divers corps et la loi des poids atomiques entiers, comme dus justement à des émissions d'énergie dans la synthèse des divers atomes à partir de l'édifice élémentaire isolé dans l'atome H : Les écarts observés supposeraient, dans ces synthèses, des émissions d'énergie beaucoup plus intenses que celles des évolutions radioactives ; mais cela n'a rien que de fort compatible avec la stabilité même des atomes simples ainsi constitués.

Parmi les vérifications expérimentales variées, qui, après l'expérience fondamentale de Fizeau, peuvent être invoquées à l'appui de la théorie, le Chapitre XVI cite simplement, outre la contraction longitudinale de l'électron manifestée par la dynamique des électrons très rapides, l'expérience fameuse de Michelson. Il n'est pas fait allusion à l'expérience de Sagnac. Bien qu'elle comporte une rotation au lieu d'une translation et relève par conséquent de la théorie de la relativité généralisée, elle est souvent interprétée comme une manifestation objective de la réalité de l'éther fixe ; il serait donc intéressant, au lieu de la laisser de côté, de signaler, comme l'a fait M. Langevin dans une Note parue au mois de novembre dernier aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, qu'elle est interprétée très simplement par la théorie de la relativité généralisée.

Le Chapitre XVII termine la première Partie en montrant que la transformation de Lorentz conduit à la notion de continuum à quatre dimensions. On pourra regretter que le « Welt » de Minkowski ait été traduit par le mot « monde », au lieu du mot « univers » unanimement utilisé à cet effet.

La deuxième Partie de l'exposé est consacrée à la Théorie de la relativité généralisée.

La notion en est introduite encore à partir de l'idée directrice que les lois fondamentales de la nature doivent avoir une signification absolue, donc qu'elles doivent être susceptibles d'expressions indépendantes des systèmes de coordonnées utilisés.

Cette idée, qui constitue le principe de relativité, a reçu une première application dans la théorie de la relativité restreinte, où tous les systèmes d'axes de Galilée, c'est-à-dire en translations relatives uniformes, sont effectivement équivalents.

L'extension naturelle, c'est que tous les systèmes solides de référence, *quels que soient leurs mouvements relatifs*, doivent être équivalents, puisque le mouvement absolu de chacun d'eux ne semble pas avoir de signification faute de repères dans l'espace vide. C'est la forme du principe généralisé d'abord prévue au Chapitre XVIII (et ultérieurement corrigée au Chapitre XXVIII après constatation que des systèmes de référence solides invariables ne peuvent être définis quand l'Univers n'est pas euclidien). Mais la perception des coups de frein à l'intérieur du wagon fermé semble fournir immédiatement une constatation en contradiction avec ce principe et donner une sorte de réalité physique absolue aux mouvements non uniformes.

Cette conclusion gênante apparaît cependant moins péremptoire lorsqu'on réfléchit (Chap. XIX et XX) à l'identité de la masse d'inertie et de la masse de gravitation newtonienne : à l'intérieur d'une chambre fermée il est impossible de différencier les manifestations de ce que nous appelons « un champ de gravitation », de celles obtenues en imposant à la chambre, en l'absence d'un tel champ, une accélération.

Nous traduisons l'effet ressenti dans le wagon comme le résultat de l'accélération due au coup de frein. Mais nous parlons d'une accélération *relative* par rapport à la Terre; en l'absence de tout repère matériel, cette accélération ne signifierait plus rien et il serait naturel d'attribuer les phénomènes observés dans le wagon à un champ de gravitation variable.

Dans la relativité restreinte, on cherche en vain (Chap. XXI) quelque chose de réel à quoi on puisse attribuer l'attitude différente des corps par rapport à deux systèmes en mouvement relatif non uniforme : comment repérer en effet que l'un ou l'autre d'entre eux a un mouvement absolu uniforme? Il apparaît alors logiquement nécessaire d'adapter la Physique au principe de relativité généralisé et d'exprimer ses lois par des équations vraies quel que soit l'état de mouvement du système.

Les propriétés des champs de gravitation pourront alors être

déterminées à partir des résultats de la relativité restreinte. Elle donne en effet des lois valables dans un univers euclidien rapporté à un système de Galilée ; un changement de variables non linéaire fera passer ensuite, dans ce même univers euclidien, à un système dans lequel régneront des champs de gravitation (artificiels) connus : l'opération mathématique de substitution donnera les lois physiques modifiées dans ces champs ; enfin on admet que ces lois nouvelles s'appliquent quelle que soit l'origine des champs de gravitation considérés. C'est ainsi que l'auteur introduit très simplement (Chap. XXII) la prévision d'une déviation des rayons lumineux par le champ de gravitation du Soleil, dont la vérification a si bien confirmé la généralisation aussi hardie que géniale proposée par son principe d'équivalence.

Une sérieuse difficulté apparaît toutefois : c'est l'interprétation physique des indications de temps et de lieu. L'exemple du système de référence constitué par un disque en rotation par rapport à un système de Galilée, étudié au Chapitre XXIII, montre que le caractère euclidien de l'Univers disparaît lorsque apparaît le champ de gravitation ainsi créé : la transformation de Lorentz appliquée, avec des valeurs croissantes de v, pour les points du disque de plus en plus éloignés de son centre, entraîne la non-concordance des horloges fixes en divers points de ce système, et des contractions périphériques de Lorentz, non accompagnées de contractions radiales, qui paraissent devoir altérer la valeur du nombre π. On ne pourra plus construire des systèmes de référence répondant à la notion des axes cartésiens indéformables, et l'on devra avoir recours à des systèmes de Gauss : ils restent applicables à un continuum non euclidien à la condition que chacune de ses petites portions puisse être isolément considérée comme euclidienne.

Alors que le continuum de la relativité restreinte est euclidien (Chap. XXVI), celui de la relativité généralisée (où les lois de propagation de la lumière, et sa vitesse, sont altérées) ne l'est plus : il est donc nécessaire d'utiliser un système de Gauss. Le fait qu'il devient impossible de donner une interprétation physique à chacune des quatre coordonnées ne diminue pas en réalité le champ des connaissances physiques objectives, car les seules données d'observation qui aient une signification en soi sont des coïncidences complètes, ou rencontres de deux lignes d'univers

(Chap. XXVII). On est donc amené à modifier l'énoncé initial du principe de relativité généralisée donné au Chapitre XVIII et à lui donner la forme : « Tous les systèmes de coordonnées de Gauss sont en principe équivalents pour l'expression des lois générales de la nature ». Une représentation de ces systèmes de Gauss à quatre dimensions sera donnée par le *mollusque* d'Einstein, défini par trois réseaux de surface, avec une horloge dans chaque maille, les marches des diverses horloges étant seulement assujetties à ne pas varier de façon discontinue d'une maille à la voisine.

C'est cette condition d'équivalence de tous les mollusques qui impose à la loi de gravitation une certaine forme; et la forme nouvelle ainsi obtenue, réductible en première approximation à la loi de Newton, conduit à y apporter des corrections que l'expérience a confirmées (Chap. XXIX).

Une troisième Partie intitulée « Réflexions sur l'Univers considéré comme un tout » comporte trois Chapitres complémentaires relatifs à des conséquences presque métaphysiques de la théorie. Ils rappellent les difficultés de la théorie de Newton, dont la loi d'attraction est incompatible avec l'hypothèse d'un monde infini à densité constante, et la possibilité géométrique d'un monde fini et cependant non limité; ils concluent à la probabilité d'un monde quasi sphérique dont l'auteur a évalué le rayon. L'attitude très prudente et plus réservée, qu'il est raisonnable de prendre devant ces extensions philosophiques, est fort sagement définie dans la Préface de M. Borel, qui compare plaisamment notre position vis-à-vis du monde stellaire à celle des infusoires enfermés dans leur goutte d'eau vis-à-vis de notre monde terrestre.

Quelques Notes mathématiques simples sont annexés en Appendice.

Deux conférences d'Einstein ont été également traduites pour apporter quelques précisions complémentaires fort intéressantes à l'exposé résumé ci-dessus.

L'une, sur la Géométrie et l'expérience ([1]), a été faite à l'Aca-

([1]) *La Géométrie et l'Expérience*, par Albert Einstein; traduction française, par Maurice Solovine; 19 pages in-12. Gauthier-Villars, 1921.

démie des Sciences de Berlin au mois de janvier 1921. Elle rappelle la distinction fondamentale entre la géométrie axiomatique et la géométrie pratique, celle-ci étant l'étude de la façon dont les corps solides se comportent par rapport à leurs possibilités de position. La question de savoir si la géométrie pratique est euclidienne a alors un sens précis et relève de l'expérience : il s'agit de savoir si les corps solides se comportent comme les corps à trois dimensions de la géométrie axiomatique euclidienne.

A la base de toute mesure effective réside la vérification d'égalité de deux droites, chacune d'elles étant définie simplement par deux points tracés sur un corps solide. Il en résulte que l'application des notions de la géométrie pratique aux dimensions submoléculaires paraît d'une légitimité discutable : peut-être n'est-elle pas plus légitime que celle de la notion de température dans les mêmes dimensions. Par contre, l'extension de ces notions à des espaces de l'ordre de grandeur cosmique ne semble pas soulever de difficultés de principe; et la théorie de la relativité généralisée prévoit alors deux possibilités : espace de l'Univers infini avec densité moyenne de matière nulle (masse totale limitée), ou espace fini avec densité moyenne non nulle. Einstein, partisan de ce second point de vue, pense que la notion d'un espace non euclidien sphérique, fini bien que non limité, est moins inaccessible à notre esprit qu'on l'imagine en général. Il utilise la comparaison relative à la mesure d'un plan en prenant pour unité de surface les ombres portées par un pavage de petits cercles garnissant une sphère tangente à ce plan, la source ponctuelle éclairante étant diamétralement opposée au point de contact : le plan ne contient qu'un nombre fini d'ombres-unité. Si nous disons que c'est une illusion due au fait que les ombres deviennent de plus en plus grandes à mesure qu'elles s'éloignent, c'est que nous admettons implicitement l'existence de règles solides, non soumises à la même loi de déformations.

La conclusion d'Einstein est que la faculté intuitive humaine ne doit nullement capituler devant la géométrie non euclidienne. Étant donnée l'autorité de l'auteur, elle sera au moins un encouragement pour tous ceux qui regrettent l'impuissance actuelle où se débat notre imagination lorsqu'elle tente de se représenter les réalités extérieures sous cet aspect nouveau qu'une logique purement

formelle semble nous imposer comme seul conforme à l'essence des choses.

L'autre conférence, intitulée « L'éther et la théorie de la relativité » (1), a été faite à l'Université de Leyde le 5 mai 1920. Elle vise à définir les qualités extrêmement fugitives de l'éther gravifique que la théorie de la relativité généralisée a introduit à la place de l'ancien éther électromagnétique, supprimé par la théorie restreinte.

La théorie de Lorentz avait dépouillé l'éther électromagnétique de toutes ses propriétés pseudomatérielles et mécaniques, en séparant de façon très nette la matière, seul support des charges, et l'éther (pénétrant dans les espaces atomiques), seul support des champs. Elle avait laissé à ce support le seul caractère mécanique d'immobilité.

La théorie de la relativité restreinte, où tous les systèmes d'axes galiléens sont rigoureusement équivalents, rejette cette notion de milieu immobile (qui fournirait des repères et des axes absolus). Elle semble donc rejeter la notion même d'éther; en réalité: elle interdit seulement de le considérer comme constitué de particules qu'on puisse identifier et suivre dans le temps; il est impossible de lui attribuer alors aucun état de mouvement.

Il reste nécessaire cependant de garder la notion d'éther malgré cette nouvelle amputation de ses propriétés, parce que l'espace vide n'est pas dénué de toute propriété physique : l'état de rotation d'un système matériel, qui influe sur son état mécanique, n'est pas en effet un caractère appartenant au système en soi.

Dans la relativité généralisée, l'existence de cet éther se précise. Les propriétés métriques du continu spatio-temporel diffèrent d'un point à un autre; l'espace dit *vide* n'est donc ni homogène ni isotrope, et son état en chaque point est défini par les potentiels de gravitation $g_{\mu\nu}$. Cet éther, privé de toutes propriétés mécaniques et cinématiques, détermine les phénomènes mécaniques, et aussi, accessoirement, les phénomènes électromagnétiques; son état est, en chaque lieu, déterminé par des connexions avec la matière, qui obéissent à certaines lois, et par l'état de l'éther des lieux voisins

(1) *L'éther et la théorie de la relativité,* par Albert Einstein; traduction française, par Maurice Solovine; 15 pages in-12, Gauthier-Villars, 1921.

sous forme d'équations différentielles. L'état de l'éther de Lorentz, en l'absence de champs électromagnétiques, n'était au contraire déterminé par rien en dehors de lui, et il était partout le même. Cet éther détermine les relations métriques dans le continu spatio-temporel, par exemple les possibilités de configuration des corps solides aussi bien que les champs de gravitation.

La conclusion de l'auteur, c'est que l'espace étant doué de propriétés physiques, il faut le considérer comme occupé par un éther, sans lequel la propagation de la lumière serait impossible, et sans lequel même il n'y aurait aucune possibilité d'existence pour les règles de mesure et les horloges; mais cet éther ne peut pas être conçu comme constitué de parties pouvant être suivies dans le temps, à la façon des matières pondérables : la notion de mouvement ne peut pas lui être appliquée.

* *

L'Ouvrage d'Eddington (¹) est adapté à une seconde étude de la théorie, ou plus exactement à une seconde et à une troisième, car cette édition française comporte, après l'exposé de la théorie au point de vue rationnel et philosophique, une partie théorique qui la précise sous la forme mathématique.

La première Partie fourmille de vues originales et de suggestions parfois un peu audacieuses en apparence, mais admirablement adaptées à leur but, qui est de faire réfléchir le lecteur aux aspects variés de la théorie et de ses conséquences.

Un Prologue, présenté sous la forme d'une conversation, très vivante et souvent amusante, entre un Physicien expérimental, un Mathématicien pur et un Relativiste, vise à créer le doute qui convient relativement à la valeur objective de la géométrie eucli-

(¹) A.-S. EDDINGTON, *Espace, temps et gravitation.* (La théorie de la relativité généralisée dans ses grandes lignes. Exposé rationnel, suivi d'une étude mathématique de la théorie.) Ouvrage traduit de l'anglais par J. Rossignol, élève à l'École Normale supérieure, avec une Introduction de P. Langevin : 262 pages — 149 pages. J. Hermann, Paris, 1921.

dienne dans le domaine de la géométrie naturelle (science expérimentale qui étudie les propriétés d'extension de la matière).

Le point de départ consiste à mettre en évidence les contradictions logiques de certaines observations expérimentales interprétées à la manière habituelle. Pour cela, le premier Chapitre est consacré à la contraction de Fitzgerald, et en même temps à la modification corrélative de la marche des horloges. Ce Chapitre donne une première impression assez troublante, car la contraction y apparaît d'abord comme un phénomène physique objectif, qui entraînerait par conséquent la réalité physique des translations absolues. Cette présentation amène simplement le lecteur, d'une façon plus frappante, à cette conclusion finale qu'un mécanisme si savant chargé de cacher automatiquement, dans tous les cas, aux observateurs le mouvement absolu de leur système paraît bien étrange et invraisemblable : Il y a donc lieu de rechercher si ces difficultés ne proviennent pas d'une illusion due à nos modes de raisonnement et de pensée, dans lesquels se seraient glissées certaines hypothèses gratuites sur le temps et sur l'espace, non conformes à la réalité extérieure.

Une Note de ce Chapitre permet d'apprécier, quand on la discute de près, combien reste difficile l'interprétation du temps propre et de son évolution fonction de la translation du système. Elle se rapporte au raisonnement suivant, très couramment utilisé : Si un observateur était lancé dans un projectile avec une très grande vitesse initiale pour aller rebondir sur une étoile et revenir jusqu'à la Terre, tous les phénomènes dont il est le siège étant ralentis très considérablement, à son retour il serait resté jeune et retrouverait ses contemporains beaucoup plus vieux que lui-même. La difficulté apparaît immédiatement : cette différence observable ayant un sens absolu, les translations rapides du projectile par rapport à la Terre, auxquelles elle est liée, paraissent acquérir ainsi un sens absolu ; il n'y a pas réciprocité, bien que la Terre ait eu, par rapport au projectile, les mêmes accélérations (changées de signe). Pour répondre à cette objection, le mouvement naturel est celui de l'auteur dans la Note susvisée : Les accélérations formidables nécessaires pour le lancement, le rebondissement et l'arrêt au retour sont des phénomènes importants, ayant une réalité objective, et qui créent la dissymétrie observée dans les

résultats. Mais ce raisonnement n'est pas à l'abri de toute discussion, car, les périodes d'accélération restant les mêmes, si l'on augmente progressivement la durée des périodes de translation uniforme, le résultat prévu doit augmenter proportionnellement, bien que les accélérations prennent une importance relative progressivement décroissante. On peut présenter sous un aspect encore plus net la difficulté : Deux projectiles emportant deux frères jumeaux sont lancés avec la même vitesse dans des directions infiniment voisines pour aller rebondir sur deux étoiles dont les distances à la Terre sont l'une double de l'autre, et reviennent sur la Terre l'un au bout de vingt années terrestres et l'autre au bout de quarante; ils ont subi des accélérations identiques et cependant, d'après le raisonnement habituel, au bout des quarante révolutions de la Terre sur son orbite, le second aura moins vieilli que le premier, et l'on pourra le constater en les examinant côte à côte. La conclusion est fort gênante puisque la différence est nettement attribuable aux périodes de translation relative. Pour être exact, il faut observer qu'ils ont subi ces accélérations identiques à des moments et à des endroits différents; autrement dit, dans le langage de Minkowski, ils ont suivi avant de se retrouver des lignes d'univers différentes, et il n'y a pas de contradiction logique dans le fait qu'ils ont subi des évolutions différentes; mais on a quelque peine à se défendre de voir là un résultat en opposition avec l'idée essentielle de la relativité restreinte. C'est une des difficultés immédiates les plus frappantes quand on cherche à comprendre et à s'assimiler les conséquences immédiates de la théorie; et la remarque de l'auteur ne la résout pas.

Le deuxième Chapitre expose le point de vue relativiste sous des formes originales qui parlent à l'imagination; elles laissent parfois, naturellement, l'impression de doute inhérente aux argumentations philosophiques, mais elles constituent un ensemble très cohérent. Une représentation adéquate des choses est réalisée non par une perspective unique prise d'un certain point de vue, mais par une synthèse de tous les points de vue possibles. Nous sommes habitués à faire cette synthèse relativement à toutes les positions possibles de l'observateur, mais il peut être nécessaire de faire intervenir aussi les vitesses des observateurs. Les contradictions observées au Chapitre précédent sont levées quand on consi-

dère la longueur et la durée non comme des qualités inhérentes au monde extérieur, mais comme des rapports entre les objets de ce monde et un observateur bien déterminé. Cela conduit à la notion de multiplicité du quatrième ordre ; l'auteur fait une comparaison très suggestive (sur un exemple pris à trois dimensions) entre l'Univers de Minkowski et un bloc de carton isotrope qu'on peut découper en feuillets parallèlement à n'importe quelle direction, tandis que la conception habituelle du temps et de l'espace absolus jouant des rôles bien séparés correspondrait à une pile de feuillets superposés dans une orientation bien définie et immuable.

La notion d'éther doit être alors modifiée, et l'on ne pourra plus le comparer à une espèce d'océan matériel immobile : on doit lui refuser la propriété de diviser l'Univers en espace et en temps, et par conséquent il n'est pas formé de parties douées d'une identité continue. Le mouvement uniforme n'a plus de signification ; par contre, les manifestations observables des accélérations et plus spécialement des rotations paraissent en laisser une aux mouvements non uniformes : cette difficulté conduit à penser qu'il existe dans l'Univers, comme entités absolues, non seulement la matière, mais aussi d'autres particularités localisées dans les portions *vides* de l'espace. Cet univers aura une certaine structure, et l'on arrive à pressentir, bien qu'elle soit fort difficile à préciser, cette notion qu'introduit l'auteur lorsqu'il énonce que les systèmes de référence nous apparaissent comme *propres* ou *impropres* selon qu'ils suivent plus ou moins les lignes de la structure absolue de l'Univers dans la région envisagée.

Le Chapitre III discute la notion d'Univers à quatre dimensions. Il débute par cette remarque fort intéressante, à laquelle on ne prête pas suffisamment attention en général, que la combinaison, en un espace à trois dimensions, des directions horizontales et de la direction verticale a déjà exigé un effort pour faire abstraction des qualités nettement différenciées qui caractérisent celle-ci. La découverte de la sphéricité de la Terre a montré d'ailleurs après coup le caractère relatif de cette direction privilégiée.

L'auteur montre comment l'invariant

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 - y^2 - z^2,$$

défini par les lois de la propagation normale de la lumière (et

caractéristique de l'univers euclidien), entraîne la division de l'espace-temps en trois zones par rapport à un événement quelconque O : un passé absolu, un futur absolu, et un domaine intermédiaire dont les événements seront à volonté antérieurs ou postérieurs à l'événement O suivant le choix de l'axe des temps. La négation de la simultanéité absolue (impossibilité de définir un même instant en deux lieux différents), qui paraît à tant de gens révolutionnaire, est le complément de la négation du mouvement absolu (impossibilité de définir un même lieu de l'espace vide à deux instants différents), en général beaucoup plus facilement admise. La contraction de Fitzgerald est ensuite étudiée en détail comme conséquence du changement d'axe des temps.

Le Chapitre IV montre le caractère purement relatif des champs de force du type gravifique : ce n'est pas seulement au point neutre de Jules Verne (point où les champs terrestre et lunaire sont juste égaux et opposés) que les voyageurs du boulet sont soumis à des effets de gravitation nuls, mais tout le long de leur voyage, la gravitation disparaissant par suite d'un mouvement convenable de leur système (ou du moins à partir du moment où, sorti de l'atmosphère terrestre, le boulet n'est plus soumis à un freinage qui fausse son mouvement libre). La mécanique newtonienne suppose implicitement l'existence d'un surobservateur capable de distinguer les uns des autres des champs de force réels qu'il perçoit lui-même, et des champs de force artificiels dus à des mouvements accélérés (par rapport à lui) des systèmes de référence. A l'intérieur du système lui-même, la discrimination est impossible ; l'accélération absolue n'a donc plus de sens, elle non plus. Le caractère essentiel d'une région voisine de la matière n'est donc pas la présence d'un champ de forces ; ce doit être quelque chose de plus complexe. Un champ de forces apparaît seulement lorsque les points matériels sont écartés, soit par des chocs matériels, soit par des actions électromagnétiques, de leur ligne d'univers naturelle (celle-ci étant la seule qui ait une signification absolue, c'est-à-dire la ligne d'intervalle maximum entre deux événements). Si les objets étudiés suivent, ainsi que les règles et les horloges, les lignes d'univers naturelles des points matériels (ce qu'on exprime encore en disant qu'ils sont en chute libre), les relations de la relativité restreinte subsistent. Cela n'est

d'ailleurs possible que si le tout se passe dans un domaine assez étroit pour que toutes les lignes d'univers naturelles y soient assimilables à des portions de droites pratiquement parallèles entre elles; on écrira donc seulement

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

définissant l'intervalle élémentaire, au lieu de la relation en termes finis possible dans l'univers euclidien (dans son ensemble).

L'auteur insiste sur ce point que les conséquences du principe de relativité, telles que la contraction de Lorentz, supposent essentiellement les instruments de mesure soumis à un champ de forces nul. Il en conclut en particulier qu'on n'a pas le droit de dire que la contraction de Fitzgerald raccourcit la périphérie d'un disque en rotation (alors qu'elle n'altère pas son rayon), parce que, dans ce cas, des vitesses et des accélérations interviennent simultanément. Le point de vue auquel il se place ainsi pour discuter les mesures faites sur un disque en rotation uniforme paraît différent de celui d'Einstein, et cette constatation montrerait combien d'hésitations sont encore permises dans l'interprétation de la théorie. Eddington emploie, pour rejeter comme inadmissible une contraction périphérique du disque, cet argument que, le rayon ne subissant pas de contraction, le disque devrait alors se voiler. On peut se demander si ce raisonnement ne revient pas à attribuer à la contraction de Lorentz une réalité physique au sens des anciennes théories classiques. En tout cas, le mélange, aux interprétations relativistes, de points de vue propres à la Physique qu'elles prétendent remplacer, est un danger difficile à éviter complètement; s'il n'intervient pas dans le cas actuel, il se glisse assez fréquemment d'une façon plus ou moins apparente, dans les discussions relativistes, pour qu'il y ait lieu de se mettre tout spécialement en garde contre lui.

Le Chapitre V est relatif aux divers genres d'espaces à deux et plus de deux dimensions. L'auteur y met en lumière un certain nombre de remarques fort intéressantes pour saisir la terminologie de la relativité généralisée; parmi elles on relèvera en particulier les suivantes : l'esprit humain est à ce point incapable de se représenter les caractères intrinsèques d'un espace d'espèce donnée, que, pour les définir, il est obligé d'introduire les coeffi-

cients g_{ik} de son invariant quadratique fondamental ds^2, c'est-à-dire des grandeurs qui dépendent autant du système de référence particulier choisi que de ces caractères intrinsèques eux-mêmes. Quand on compare les diverses espèces possibles (en nombre infini) d'Univers à quatre dimensions à des surfaces dans un espace euclidien à cinq dimensions, il ne s'agit que d'une analogie purement verbale, qui permet de définir les particularités locales au moyen de termes courants comme « rides » ou « courbures », au lieu d'user de termes théoriques comme « invariants différentiels ». Ce qui définit la « ride », c'est non pas les valeurs des g_{ik} en un point, mais la façon dont elles sont liées aux valeurs en d'autres points voisins; c'est plus particulièrement le gradient de leur gradient : la gravitation n'est qu'une force relative, tandis que le degré de courbure de l'Univers est un caractère absolu. Un univers défini par un ensemble quelconque de valeurs arbitraires données aux g_{ik} peut toujours mathématiquement être envisagé, mais il n'y en a que certains genres qui soient effectivement possibles dans une région vide de matière (comme corrélatifs de distributions de matière autour de cette région) : rechercher les conditions restrictives auxquelles ils doivent satisfaire, c'est rechercher la loi fondamentale de gravitation. Une « surface à quatre dimensions » peut présenter divers degrés de courbure (que ne fait pas prévoir la représentation dans un espace à cinq dimensions par comparaison avec les surfaces à deux dimensions dans l'espace à trois dimensions; cette notion s'introduit plus facilement par une représentation dans un espace à dix dimensions). L'univers euclidien est caractérisé par les vingt conditions $B^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = 0$, un univers courbe au premier degré par les six conditions $G_{\mu\nu} = 0$, un univers courbe au deuxième degré par la condition unique $G = 0$; enfin si $G \neq 0$, l'univers est à courbure complète. Les régions intérieures aux électrons (où G serait $\neq 0$) doivent être considérées comme étrangères à l'espace-temps, parce que, aucune exploration par règles et horloges n'y étant concevable, la géométrie de ces régions ne présente aucun sens pour nous. La matière et l'énergie peuvent se concevoir non pas comme des facteurs produisant les diverses courbures de l'Univers, mais comme des éléments de notre perception de ces courbures. L'existence des phénomènes mêmes de gravitation, incom-

patibles avec les propriétés de l'univers euclidien, montre que, parmi les relations tensorielles susceptibles de définir les propriétés intrinsèques de l'espace vide au voisinage de la matière, les relations $B^{\rho}_{\mu\nu\sigma} = 0$ ne peuvent constituer la loi générale de gravitation. On est conduit à chercher si les conditions $G_{\mu\nu} = 0$, exprimant que l'espace n'est courbe qu'au premier degré, ne pourraient pas la fournir.

Le Chapitre VII compare la nouvelle loi de gravitation ainsi attendue à l'ancienne loi de Newton. L'anomalie expérimentale du résidu inexpliqué dans le mouvement de Mercure, mise en balance avec l'admirable précision des innombrables calculs astronomiques basés sur la loi de Newton, serait bien insuffisante pour mettre celle-ci en discussion; mais les conceptions de la relativité restreinte, dès qu'on les accepte, suffisent à la rendre inadmissible, puisque ni les masses ni la distance qu'elle fait intervenir n'ont de signification absolue.

On est amené à envisager la loi $G_{\mu\nu} = 0$ comme possible, ou même probable, justement parce qu'elle a le caractère invariant que ne présente pas la loi de Newton; l'auteur marque bien la procédure à suivre pour apprécier ce que vaut cette présomption. Dans le cas où existe une seule région anormale (au centre de laquelle on placera l'origine), la forme quadratique à symétrie de révolution

$$ds^2 = -\frac{1}{\gamma}\,dr^2 - r^2\,d\theta^2 + \gamma\,dt^2, \qquad \text{avec} \qquad \gamma = 1 - \frac{2m}{r},$$

satisfait à la loi proposée; on examinera alors quelles apparences elle entraînerait, et, si ces conséquences s'accordent avec les résultats des observations, on sera conduit à identifier cette solution particulière avec la loi de gravitation cherchée pour l'espace avoisinant une masse unique placée à l'origine. L'argumentation ainsi présentée n'a pas la prétention de constituer une déduction rigoureuse démontrant, au sens mathématique du mot, la nouvelle loi de gravitation, mais de lui apporter une probabilité d'autant plus grande qu'on trouvera un accord plus frappant entre certaines de ses solutions particulières et les phénomènes astronomiques simples qui conduisent au choix des variables adoptées dans ces solutions particulières. Ceci répond à l'objection (justifiée si l'on

s'en tenait au seul point de vue strictement mathématique) que l'accord entre le mouvement du périhélie de Mercure et la solution particulière écrite plus haut ne justifierait pas la loi générale de gravitation proposée par la théorie de la relativité généralisée (1).

Dans le ds^2 ainsi écrit, la distance r intervient, par l'intermédiaire de γ, à deux endroits : l'altération ainsi produite par rapport aux propriétés euclidiennes est beaucoup plus grande dans le terme en dt^2 que dans le terme en dr^2 parce que, dans les mouvements astronomiques, dr est toujours très petit par rapport à dt. Le facteur γ devant dt^2 entraîne les accélérations centripètes observées dans le champ de gravitation du Soleil. Ce résultat est lié à la déformation des lignes d'univers naturelles de points matériels isolés quand on déforme le système de coordonnées curvilignes qui donne une « carte » ou représentation exacte pour en faire « l'image » en coordonnées rectangulaires habituelles; les mêmes considérations s'appliquent donc également aux lignes d'univers de rayons lumineux, qui sont eux aussi déformés par la gravitation. Les particularités de la nouvelle loi de gravitation sont surtout liées à la deuxième approximation obtenue quand on cesse de négliger l'écart entre le facteur $\frac{1}{\gamma}$ et l'unité dans le terme en dr^2. D'une part, l'espace considéré statiquement ($dt = 0$) cesse d'être euclidien; d'autre part, quand on considère, non plus des trajectoires de corps matériels, mais des trajectoires de rayons lumineux, dr^2 cesse d'être petit auprès de dt^2, et l'on est conduit à prévoir des déviations doubles de celles qu'entraînerait la simple attraction de Newton appliquée à la lumière.

De la forme non euclidienne

$$ds^2 = \frac{1}{\gamma}\,dr^2 + r^2\,d\theta^2$$

relative à l'espace considéré statiquement, l'auteur déduit l'altération du rapport π entre la circonférence et le diamètre mesuré pour un cercle au centre duquel est placée une masse perturba-

(1) *Voir* à ce sujet, dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 172 et 173), les intéressantes Notes de M. Le Roux et de M. Painlevé.

trice. Rien n'empêcherait, semble-t-il, de supposer ce cercle matérialisé par un disque rigide assez mince pour que sa masse même ne modifie pas notablement la perturbation. On peut se demander alors si l'objection formulée au Chapitre IV est plus valable dans le cas du disque en rotation que dans le cas actuel; à tout le moins, le rapprochement de ces deux points de vue, opposés au moins en apparence, est encore une occasion de voir combien est délicate l'interprétation des conséquences diverses de la théorie.

Dans le Chapitre VII, l'auteur expose en détail les résultats des mesures relatives à la déviation des rayons lumineux par le Soleil, effectués pendant l'éclipse du 29 mai 1919. On sait l'influence prépondérante qu'ont eue les résultats de ces expériences, dont il fut le promoteur et l'âme, sur le succès actuel de la théorie de la relativité.

Le Chapitre VIII est consacré à l'examen des autres confirmations expérimentales invoquées à l'appui de la nouvelle loi de gravitation. Le mouvement du périhélie de Mercure est la plus simple et la plus frappante. Pour ce qui concerne le déplacement vers le rouge des raies spectrales émises dans le champ gravifique très intense à la surface du Soleil, les raisonnements sont beaucoup plus délicats. L'exposé, rédigé par l'auteur avant les confirmations qu'ont annoncées de façon très formelle Perot, puis, sur des bases expérimentales plus étendues, Buisson et Fabry, est présenté avec toute la prudence qui convient. Il montre que la prédiction de ce déplacement spectral repose sur des hypothèses implicites qui peuvent être mises en doute; entre autres celle-ci qu'un atome d'un certain corps chimique considéré à la surface de la Terre, et un autre atome du même corps, transporté dans le champ de gravitation solaire jusqu'au Soleil, *puis arrêté à la surface de celui-ci*, sont deux choses identiques.

A ces points d'interrogation, il semble qu'on puisse en ajouter un autre qui pourra paraître encore plus troublant, car il donne l'impression qu'on raisonne à tâtons (pour dépeindre par une image peut-être un peu hardie le genre d'hésitations dans lequel on se sent entraîné par toute tentative de discussion précise). Pour raisonner utilement sur les périodes propres des vibrations lumineuses, à quel ds^2 devra-t-on se référer? au ds^2 macroscopique qui règle le mouvement des particules matérielles, et de l'atome

lui-même, dans le champ de gravitation? ou bien au ds^2 inconnu, qui règle le mouvement des électrons sur des lignes d'univers naturelles enroulées en orbites de très petit rayon, dans l'espace-temps intérieur au domaine atomique?

Après s'être posé de telles questions, on a quelque peine à se sentir en terrain sûr dans la discussion du déplacement des raies spectrales.

Le Chapitre IX est consacré aux conséquences mécaniques de la loi générale de gravitation; celle-ci contient en effet les lois de la Mécanique : inertie et gravitation ne sont que deux aspects d'une même chose. Autour de toute particule naturelle il y a une ride de courbure de l'espace-temps, et, dans le déplacement de la particule suivant sa ligne d'univers naturelle, cette ride dessine une cannelure : la loi fondamentale que la courbure de l'espace ne dépasse pas le premier degré suffit à limiter les formes de parcours possibles pour ces cannelures lorsqu'elles viennent à se rapprocher les unes des autres. Dans bien des cas on peut pratiquement négliger ces réactions mutuelles de cannelures, c'est-à-dire les phénomènes de gravitation, mais on ne peut pas négliger l'action de chaque ride sur l'espace-temps fondamental qui la contient, et c'est cette action qui constitue l'inertie de la particule. Les lois de la Mécanique sont ainsi contenues dans la loi générale de gravitation, d'où on les déduit par la voie suivante : bien que les $G_{\mu\nu}$ soient nuls en tout point extérieur aux particules, on peut calculer leurs valeurs moyennes ou « macroscopiques » dans une région contenant beaucoup de particules, et l'on attribuera ces valeurs à l'action d'une distribution continue de matière équivalente; on les exprimera donc en fonction de la densité, de la quantité de mouvement, de l'énergie de cette distribution matérielle, et la relation $G_{\mu\nu} = K_{\mu\nu}$ signifie que n'importe quelle espèce d'espace-temps devient possible dans une distribution continue convenable de matière (dans la mesure où peuvent être effectivement réalisées les densités de matières qui donnent aux $K_{\mu\nu}$ les valeurs arbitraires qu'on veut attribuer aux $G_{\mu\nu}$). Mais les quatre dimensions de l'Univers apportent un arbitraire d'ordre 4 dans le choix du système de coordonnées, et par conséquent dans les valeurs des dix $g_{\mu\nu}$; cela entraîne l'existence de quatre relations identiques entre les dix $G_{\mu\nu}$ (caractéristiques de la courbure de l'univers) et par conséquent

des mêmes relations identiques entre les dix $K_{\mu\nu}$ (caractéristiques de la distribution de matière); ces quatre lois sont celles de la conservation de la quantité de mouvement et de la quantité d'énergie $\left(\right.$en définissant la quantité de mouvement par $m\frac{dx}{ds}$ ou $m\frac{dt}{ds}\frac{dx}{dt} = M\frac{dx}{dt}$: la masse M envisagée dans la définition classique est donc variable, et liée à la masse invariante m de la particule par la relation $\left.M = m\frac{dt}{ds}\right)$.

La notion de densité de masses, liée à celle de distribution continue de matière, introduit, par intégration dans un domaine d'univers, l'*action*. L'auteur insiste sur l'importance de cette grandeur, qu'il identifie à la courbure de l'Univers. Il termine enfin par un résumé des divers résultats énoncés au cours des neuf premiers Chapitres.

Le Chapitre X, intitulé « Vers l'Infini », aborde les discussions particulièrement hasardeuses qui ont trait aux propriétés probables de l'espace dans les régions extrêmement éloignées de nous. L'auteur y précise d'abord la notion de systèmes de référence naturels; elle est liée à la signification absolue des géodésiques d'Univers. Dans une région suffisamment limitée de l'Univers il est possible de choisir le mode de division de l'espace et du temps de telle sorte que toutes les géodésiques deviennent à très peu près des lignes droites; un système de référence ainsi choisi est un système naturel. La rotation uniforme « absolue » manifestée par le pendule de Foucault est une rotation par rapport à un tel système naturel; au contraire, une translation uniforme d'un système de référence par rapport au premier conserve les géodésiques rectilignes, donc n'a aucune espèce de sens absolu. Une vitesse de translation uniforme n'a de sens que par rapport à des particules matérielles, lesquelles sont, comme les géodésiques, des éléments de la structure absolue de l'Univers. Une rotation paraît d'ailleurs avoir un sens par rapport non seulement à une structure géodésique locale, mais à un système universel plus général, tandis qu'une translation n'a de sens que par rapport à un repère matériel bien déterminé; il y a sans doute une continuité bien plus grande dans la structure géodésique des différentes régions de l'Univers que dans leur structure matérielle.

Ce système de référence universel s'appellera le *système d'inertie* : il supprime, à l'infini, tout champ de gravitation et tout champ de force centrifuge; mais l'inertie, qui est de même nature, y subsiste toujours. Une question peut se poser toutefois : Y a-t-il des lignes d'Univers bien définies qui continuent à s'éloigner indéfiniment loin de toute matière? Cette extrapolation indéfinie des propriétés que l'espace manifeste dans les régions très éloignées de nous (mais encore accessibles à nos observations) soulève des difficultés qu'on cherche à éluder en attribuant à l'Univers une certaine courbure propre, indépendante des courbures locales liées à la présence des corps matériels, et qui limite ses dimensions spatiales. Toute tentative pour résumer les vues très suggestives que donne l'auteur sur les théories divergentes de de Sitter et d'Einstein à ce sujet les rendrait encore plus difficiles à suivre.

Le Chapitre XI donne un aperçu des prolongements apportés par M. Weyl à la théorie d'Einstein pour chercher à relier entre elles les propriétés gravitationnelles et électriques de l'Univers. La courbure de l'Univers non euclidien correspond à une non-conservation de la direction dans un déplacement en circuit fermé; y a-t-il lieu de postuler alors, comme on le fait gratuitement dans la théorie exposée jusqu'ici, la conservation de la longueur des règles-étalon dans ce même déplacement? Pour être tout à fait prudent, on devra envisager comme possible, dans tout déplacement $dx_1\,dx_2\,dx_3\,dx_4$, une altération relative λ de la longueur des jauges, qu'on écrira

$$\lambda = k_1\,dx_1 + k_2\,dx_2 + k_3\,dx_3 + k_4\,dx_4,$$

les coefficients k de cette relation introduisant quatre nouvelles quantités caractéristiques de l'Univers qui s'ajoutent aux coefficients g de l'invariant caractéristique ds^2. De même que les g sont liés aux champs de gravitation, ces nouveaux coefficients k doivent être liés à d'autres champs de forces. Or, en utilisant les coordonnées rectangulaires non accélérées ordinaires x, y, z, t, on pourra écrire, en remplaçant k_1, k_2, k_3 par F, G, H, et k_4 par $-\Phi$,

$$\frac{dl}{l} = \lambda = \mathrm{F}\,dx + \mathrm{G}\,dy + \mathrm{H}\,dz - \Phi\,dt;$$

la condition pour que l'altération de longueur soit nulle après un circuit fermé s'obtient en écrivant que cette expression est une différentielle totale, c'est-à-dire en annulant six différences de dérivées partielles, qui ne seraient autres que les trois composantes du champ électrique et les trois composantes du champ magnétique si F, G, H et Φ représentaient les trois composantes du potentiel vecteur, et le potentiel scalaire.

On se rappelle que la condition pour que l'altération de direction soit nulle après transport d'un vecteur en circuit fermé est que le champ de gravitation soit nul. Un tel rapprochement rend très attirante, malgré les difficultés sérieuses qui subsistent encore, la théorie de Weyl : elle ouvre en effet la voie vers une synthèse encore plus complète de l'Univers physique, sur laquelle l'auteur donne des aperçus aussi originaux et frappants qu'à son habitude.

Le Chapitre XII, intitulé « Sur la nature des choses », cherche à atteindre une interprétation de la nature; et vise seulement, comme l'auteur l'a indiqué dans sa Préface, à énoncer un certain nombre d'idées encore imparfaitement reliées les unes aux autres, et à soulever des controverses capables d'amener quelques progrès. Plus que toute autre, cette partie empiète sur la Métaphysique, dont elle comporte les incertitudes, mais elle ne manquera pas d'intéresser puissamment même ceux qu'effraient les spéculations très éloignées de leurs bases objectives; ils y trouveront quantité de remarques propres à faire réfléchir aux aspects variés du problème, telles que les suivantes, relevées parmi les plus suggestives :

Il n'y a pas plus de raison de pure logique pour douter de la réalité de l'Univers à quatre dimensions que pour douter de la réalité d'une pièce de monnaie dont on voit seulement une face. Les éléments primordiaux de la théorie de l'Univers doivent être d'une nature dont il est impossible de donner une définition intelligible (parce que tous les objets qui nous sont familiers sont d'un caractère beaucoup plus complexe et appartiennent non pas à l'Univers réel, mais à un stade beaucoup moins avancé de la synthèse des apparences diverses). Dire que l'Univers a quatre dimensions, c'est le rapporter implicitement à quelque relation d'ordre; cette relation paraît être l'intervalle, mais peut-être serait-il nécessaire de lui adjoindre quelque relation complé-

mentaire répondant à l'idée de proximité dans l'espace. La notion d'intervalle est entièrement inaccessible à notre raison. L'Univers est un substratum universel que la théorie de la relativité substitue à l'éther. L'intervalle, tel qu'il est accessible à nos mesures, doit être une grandeur macroscopique; les potentiels et genres d'espaces qu'on en déduit seraient des moyennes : les intervalles *individuels* des points-événements n'obéiraient pas à des règles aussi bien définies; peut-être même l'intervalle primordial n'est-il pas susceptible de variation continue. La loi de gravitation $G_{\mu\nu} = 0$ n'est que la définition des portions de l'espace que nous appelons *vides;* la perturbation, c'est la matière elle-même : la matière est un indice et non une cause; quand nous croyons évaluer la masse et la quantité de mouvement de la matière, nous mesurons certaines composantes de la courbure d'Univers. La définition de la vitesse est dynamique et non cinématique : c'est le rapport de certaines composantes du tenseur $T_{\mu\nu}$ deux à deux et elle n'existe que là où T_{44} n'est pas nul, la vitesse de la structure d'Univers, ou éther, n'a donc pas de sens; au contraire, l'accélération et la rotation sont définies au moyen des $G_{\mu\nu}$ et existent partout où ceux-ci existent, la structure d'Univers, ou éther, a donc une accélération et une rotation bien déterminées par rapport à un système de référence quelconque; l'accélération n'est pas définie comme un taux de variation de vitesse, c'est une entité indépendante beaucoup plus simple et d'un caractère bien plus universel que la vitesse. C'est la comparaison de ces deux entités qui donne la définition du temps.

L'auteur termine par un exposé de ce point de vue que les lois physiques synthétisées dans la théorie de la relativité sont des lois créées par l'esprit humain, et que probablement les lois d'atomicité et des quanta appartiennent au contraire à la catégorie des lois qui dirigent l'évolution de l'Univers extérieur et qui distinguent vraiment l'Univers réel de tout autre Univers que nous pourrions concevoir. Sa conclusion est intéressante à rappeler, car elle marque bien le caractère philosophique de ce Chapitre, qui accentue seulement d'ailleurs le caractère de tout l'Ouvrage :

« Nous avons découvert l'étrange empreinte d'un pas sur le rivage de l'Inconnu. Pour expliquer son origine, nous avons bâti théories sur théories, toutes plus ingénieuses et plus profondes

les unes que les autres. Nous avons enfin réussi à reconstituer l'être qui laissa cette empreinte, et cet être il se trouve que c'est nous-même ! »

Dans toute cette analyse, nous avons insisté sur nombre de difficultés, et sur les incertitudes que laissent dans l'esprit les discussions d'ordre philosophique inévitables dans toute tentative d'exposition verbale des théories nouvelles. On ne saurait y voir des critiques à l'adresse d'un Ouvrage remarquable par la densité des idées et par la puissance de suggestion qui le rend véritablement passionnant; les titres que s'est acquis son auteur à parler de ces sujets sont d'ailleurs assez connus pour nous éviter le soupçon d'une prétention aussi ridicule. Nous avons seulement cherché à bien mettre en lumière cette conclusion qui paraît s'imposer :

Lorsque, après une simple initiation telle que peut la donner le petit Ouvrage d'Einstein, on aborde un exposé systématique et détaillé de la théorie de la relativité généralisée (qui pourrait difficilement être plus plein d'enseignements que celui-ci), on éprouve deux impressions complémentaires : d'une part la sensation vive que ces raisonnements contiennent probablement la vérité, d'autre part l'impression qu'ils n'ont pas la puissance de persuasion par laquelle on voudrait se laisser convaincre.

Pour confirmer et préciser l'impression ainsi acquise, on est amené à aborder, à titre de troisième étude, la partie théorique ajoutée par l'auteur à l'édition française de son Ouvrage. Elle est empruntée en partie au remarquable rapport qu'il avait antérieurement présenté à la Société royale de Londres, avec des modifications dans la présentation, des retouches et des compléments. Elle suppose connu tout ce qui a été exposé dans la première partie, et elle a pour but de l'étayer par la théorie mathématique « en reprenant ceux des raisonnements auxquels le symbolisme mathématique permet de donner une précision plus grande ».

Cette partie théorique est divisée en cinq Sections :

La première Section est consacrée aux « principes élémentaires » de la théorie. L'auteur y énonce l'hypothèse fondamentale sous cette forme : Tout ce qui, dans notre science expéri-

mentale, dépend de la situation des événements — tout ce que nous pouvons savoir sur leur configuration — est contenu dans la relation qui unit ces événements deux à deux; c'est-à-dire dans l'intervalle ds. La forme connue

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2,$$

à laquelle on est conduit et qui est liée à la transformation de Lorentz, caractérise un Univers à (3 + 1) dimensions suivant l'expression de Weyl. Mais cette expression n'est applicable que dans l'espace-temps galiléen. Les champs de forces ne sont que la manifestation des défauts du système de coordonnées choisi par rapport à l'idéal galiléen, et le propre d'un espace non euclidien, c'est qu'il n'est possible d'y faire disparaître ces défauts que localement.

La Section II est l'exposé des principes et des méthodes du calcul tensoriel, appliqués directement dans le cas de l'Univers à quatre dimensions, et particulièrement aux tenseurs fondamentaux : L'invariance de $ds^2 = g_{\mu\nu}\, dx^\mu dx^\nu$ entraîne que $g_{\mu\nu}$ est un tenseur covariant; ce tenseur et ses deux tenseurs associés g_μ^ν (mixte) et $g^{\mu\nu}$ (contrevariant) constituent trois tenseurs fondamentaux du second ordre. La dérivée covariante de $g_{\mu\nu}$ est toujours nulle, et l'on ne peut par conséquent obtenir d'autres tenseurs fondamentaux d'ordre plus élevé par la règle de différentiation covariante appliquée à partir de $g_{\mu\nu}$; mais le tenseur de Riemann-Christoffel, qui s'introduit dans le calcul de la dérivée covariante seconde d'un vecteur quelconque A_μ, est aussi un tenseur fondamental (constitué par les $g_{\mu\nu}$ et leurs dérivées); il est du quatrième ordre, et non nul quand l'Univers n'est pas euclidien. A partir de ce tenseur, la différenciation covariante permet de former des tenseurs fondamentaux d'ordres de plus en plus élevés.

La loi de gravitation est étudiée dans la Section III. Pour que l'Univers soit euclidien, la condition nécessaire et suffisante, c'est que le tenseur de Riemann-Christoffel soit nul, $B^\varepsilon_{\mu\nu\sigma} = 0$. Pour écrire des conditions moins restrictives, susceptibles d'être celles de l'espace vide non euclidien, on introduira un tenseur d'ordre moins élevé, et tout naturellement le tenseur $G_{\mu\nu} = B^\sigma_{\mu\nu\sigma}$ obtenu par l'opération de contraction. La loi $G_{\mu\nu} = 0$ est la plus simple

à tenter; mais on peut songer aussi à une relation d'égalité entre $G_{\mu\nu}$ et un autre tenseur fondamental du deuxième ordre : On en peut obtenir par des contractions appliquées à des tenseurs fondamentaux du sixième ordre, ou d'ordres plus élevés, mais ils contiendraient des dérivées des $g_{\mu\nu}$ d'ordres supérieurs au second, et les lois ainsi obtenues seraient beaucoup plus compliquées; il paraîtrait simple, par contre, de faire intervenir le tenseur $g_{\mu\nu}$ lui-même, et la loi $G_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$ est celle qui donne les théories des espaces-temps courbes par essence, d'Einstein ou de Sitter. Les calculs relatifs à la recherche d'une solution de l'équation $G_{\mu\nu} = 0$ qui paraisse applicable au cas d'une masse perturbatrice unique sont ensuite indiqués, avec les applications de cette solution au mouvement de Mercure et à la déviation des rayons lumineux.

La Section IV, consacrée à la mécanique de la relativité, étudie *a priori* ce que doit être la loi des mouvements de la matière, sans rien supposer au sujet de la loi de gravitation qu'on retrouvera au contraire comme cas particulier. Après avoir rappelé les propriétés essentielles des tenseurs symétriques gauches du second ordre, défini la densité tensorielle, et défini la divergence d'un tenseur, l'auteur démontre le théorème fondamental : la divergence de $\left(G_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu G\right)$ est identiquement nulle; cela se traduit par les quatre identités $G_{\mu,\nu}^\nu = \frac{1}{2} \frac{\partial G}{\partial x^\mu}$. Pour étudier les mouvements de la matière (à laquelle est liée la courbure totale G non nulle), on est naturellement conduit à introduire sa densité propre ρ_0 (rapportée à un système d'axes galiléens lié à elle), sa vitesse d'univers $\frac{dx^\mu}{ds}$, et le tenseur

$$T^{\mu\nu} = \rho_0 \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds},$$

ou son tenseur mixte associé T_μ^ν; on observe que celui-ci a une divergence nulle. Si l'on admet que l'énergie, les tensions et les quantités de mouvement sont simplement des manifestations de propriétés de l'espace-temps, ce tenseur T_μ^ν doit être un des tenseurs fondamentaux qui dérivent des $g_{\mu\nu}$: le fait qu'il a une divergence nulle conduit à l'identifier avec $G_\mu^\nu - \frac{1}{2} g_\mu^\nu G$, ce qui donne

la loi de gravitation dans la matière continue

$$G_{\mu}^{\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu}^{\nu} G = - 8\pi T_{\mu}^{\nu},$$

l'identification étant faite pour assurer la vérification automatique des lois de conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement.

Dans ce Chapitre, l'auteur pense établir que la généralisation du principe de l'action stationnaire, utilisée par Weyl et par divers auteurs n'est pas légitime; d'après son raisonnement, l'action ne pourrait être stationnaire que dans un espace vide, c'est-à-dire précisément là où elle n'existe pas. Signalons seulement que M. Langevin rejette cette conclusion et utilise ce principe dans la synthèse de la relativité généralisée.

L'électromagnétisme est enfin étudié dans la Section V. Après avoir introduit le vecteur covariant k_{μ}, dont les composantes sont (aux signes près) celles du potentiel vecteur et le potentiel scalaire, on est conduit à envisager le tenseur $F_{\mu\nu} = \frac{\partial k_{\mu}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial k_{\nu}}{\partial x^{\mu}}$ (ou $= k_{\mu\nu} - k_{\nu\mu}$) parce que, *dans le système de coordonnées particulier auquel nous sommes habitués*, ses divers termes sont identiquement les composantes du champ électrique et du champ magnétique. Pour faire intervenir les mouvements des charges électriques, on définit d'autre part le vecteur contrevariant J^{μ} dont les composantes sont celles de la vitesse et la densité de charge électrique. Les équations ordinaires de Maxwell, écrites en négligeant toute action de la gravitation, prennent alors les formes simples

$$F_{\mu\nu} = k_{\mu\nu} - k_{\nu\mu} \quad \text{et} \quad F_{\nu}^{\mu\nu} = J^{\mu}$$

$\left(F_{\nu}^{\mu\nu}\right.$ représentant $\left.\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial x^{\nu}}\right)$. Ce sont des équations covariantes; donc ces tenseurs et vecteurs gardent, dans n'importe quel système de coordonnées, les propriétés qu'elles expriment et qui leur vaudront encore les mêmes identifications physiques : les écarts observés entre ces équations tensorielles et les équations ordinaires de Maxwell dont elles sont la généralisation seront attribués aux champs de gravitation existant dans ces nouveaux systèmes de coordonnées.

La fin du Chapitre est consacrée aux généralisations introduites par la géométrie de Weyl. La variation d'un vecteur A_μ décrivant par déplacement parallèle un circuit fermé limitant l'élément de surface $dS^{\nu\sigma}$ est donné, dans la théorie d'Einstein, par

$$\delta A_\mu = \frac{1}{2} B_{\mu\nu\sigma\rho} A^\rho dS^{\nu\sigma};$$

le caractère symétrique gauche du tenseur $B_{\mu\nu\sigma\rho}$ entraîne d'ailleurs que $A^\mu \delta A_\mu = 0$, c'est-à-dire que δA_μ est perpendiculaire sur A^μ, par conséquent que la direction du vecteur est seule modifiée et sa longueur inaltérée. Weyl généralise en supprimant cette restriction et en admettant

$$\delta A_\mu = \frac{1}{2} (B_{\mu\nu\sigma\rho} + F_{\mu\nu\sigma\rho}) A^\rho dS^{\nu\sigma}.$$

où $F_{\mu\nu\sigma\rho}$, tout en étant encore symétrique gauche en ν et σ (pour que la variation soit annulée quand le même circuit est redécrit en sens inverse), est *symétrique* en μ et ρ. Cette nouvelle géométrie admet des variations de longueur; et, grâce à l'adjonction, au tenseur fondamental $g_{\mu\nu}$, du vecteur d'univers k_μ complémentaire, elle fait entrer les champs électromagnétiques et les charges électriques, au même titre que l'inertie et la gravitation, dans une synthèse géométrique complète de l'Univers (ou du moins presque complète, car les quanta y échappent encore).

Cette extension introduit la notion d'invariants absolus, inaltérés non seulement par des transformations de coordonnées, mais aussi par des changements de jauges. Les tenseurs fondamentaux simples donnent naissance à des densités invariantes (obtenues en multipliant des produits scalaires par $\sqrt{-g}$) qui sont des invariants absolus : cette propriété, qui est caractéristique de l'Univers à quatre dimensions (elle n'existe pas dans les espaces à nombre impair de dimensions) vient encore apporter une confirmation très curieuse à la réalité profonde que la relativité attribue à ces quatre dimensions.

L'auteur esquisse enfin une discussion de ce que peut être un système de jauges naturelles, qu'il a ultérieurement précisée dans

une généralisation de la théorie de Weyl publiée aux *Proceedings of the Royal Society* (mai 1921).

L'étude de tout ce nouvel exposé manifeste nettement à quel point la rigueur des enchaînements mathématiques peut raffermir l'impression apportée par l'exposition verbale de la théorie. L'auteur a bien marqué d'ailleurs que ce point de vue est le sien, en écrivant dans l'Introduction de cette partie théorique : « Nous avons développé ce calcul (tensoriel) en partant des bases les plus larges possibles et en le regardant non pas comme un mal inévitable à réduire le plus possible, mais comme le moyen le plus sûr de saisir la signification profonde de nos connaissances en Physique. »

*
* *

Il est permis d'aller plus loin : La logique indiscutable de l'édifice mathématique que le raisonnement formel bâtit sur la simple notion d'univers à quatre dimensions (sans se préoccuper de l'impuissance de l'imagination) paraît très convaincante ou au moins très impressionnante lorsqu'on vérifie l'accord de ses conclusions avec l'ensemble de nos observations physiques et mécaniques; et l'on arrive à l'impression nette qu'elle seule a ce pouvoir d'entraîner des convictions qui ne soient pas purement impulsives : elle le doit à son caractère presque objectif.

On aura ainsi décrit un cycle fermé. Après avoir, à titre de préparation à l'étude de la relativité, contemplé l'édifice mathématique et la synthèse physique inattendue qu'il réalise, on veut essayer de formuler, d'interpréter et de penser la théorie nouvelle. Les principes fondamentaux essentiels, condensés dans l'exposé très succinct qu'en donne la petite brochure d'Einstein, ne sont pas sans ouvrir déjà la porte à des discussions délicates; lorsqu'on veut préciser les points de vue, entrer dans les détails, et discuter tous ses aspects, comme le fait l'Ouvrage d'Eddington, on voit se multiplier les difficultés et grandir, avec l'intérêt passionnant qu'elles soulèvent et l'attrait qu'elles exercent, une impression troublante d'hésitation et d'incertitude. On cherche alors à épauler

les raisonnements par un solide squelette mathématique, et finalement on s'aperçoit que lui seul donne confiance et paraît sans fissures. Nos raisonnements auront toujours bien de la peine à nous montrer que nous raisonnons mal dans nos représentations des réalités extérieures; mais, dans le domaine des déductions mathématiques, ils s'imposent à nous sans la moindre hésitation. Lorsque, de prémisses aussi réduites que la notion d'univers à quatre dimensions et d'invariant fondamental, ils tirent toutes les lois physiques et mécaniques que nous connaissons et leur apportent même des correctifs de seconde approximation vérifiés par celles des expériences où la précision a pu être poussée à un degré assez élevé, nous nous sentons fortement portés à croire que l'univers à quatre dimensions est quelque chose de réel : A force de le penser, peut-être notre esprit arrivera-t-il un jour à concevoir l'espace-temps, vraisemblablement appelé à remplacer l'espace et le temps qu'il a toujours si nettement différenciés jusqu'ici.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

OCAGNE (Maurice d'). — Traité de Nomographie, deuxième édition, entièrement refondue, avec de nombreux compléments. Un vol. in-8°, de XXIV-483 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1921.

En rendant compte de la première édition de ce *Traité* (1), Jules Tannery devait consacrer plusieurs pages à expliquer ce qu'est la science appelée *Nomographie* par M. d'Ocagne. Elle a fait depuis un assez beau chemin, tout le monde aujourd'hui en connaît au moins l'objet, comme on connaît ceux de la Géométrie descriptive et de la Statique graphique. Elle est enseignée en France et à l'étranger, et de longs éclaircissements sont devenus inutiles. Rappelons d'un mot qu'un *nomogramme* est une épure cotée, tracée une fois pour toutes pour traduire une formule de forme donnée dont les coefficients peuvent prendre diverses valeurs numériques. La lecture du nomogramme remplace le calcul. Outre qu'il fait gagner beaucoup de temps, l'emploi d'un nomogramme préserve à peu près complètement de l'erreur. Les applications de la Nomographie sont très nombreuses, et chaque jour en apporte de nouvelles à la physique, aux diverses branches de la science de l'ingénieur, à l'artillerie, à l'aviation, aux calculs financiers, etc. Toutes ou presque toutes dérivent immédiatement des principes posés par M. d'Ocagne. Avant ses premiers travaux sur le sujet, qui remontent à 1884, on ne connaissait que les *abaques cartésiens* pénibles à tracer, difficiles à lire, impropres à la représentation des relations entre plus de trois variables. Par sa belle invention des nomogrammes *à points alignés*, M. d'Ocagne accroissait singulièrement la portée de la figuration graphique. Aujourd'hui la méthode est devenue si puissante et si souple à la fois qu'il n'existe pour ainsi dire pas de formule pratique, à un nombre quelconque

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XXIII, 1899, p. 172.

de variables, devant laquelle on soit à court de nomogramme. Le plus souvent on dispose de plusieurs procédés, entre lesquels il n'y a qu'à choisir le plus commode.

Le *Traité* de M. d'Ocagne, sous sa nouvelle forme, est sans doute le plus complet des Ouvrages publiés sur la matière. Il se distingue en particulier d'autres publications de l'auteur, destinées à des praticiens plus intéressés par les applications que par les principes [1], par l'ampleur de l'exposition et le développement donné à la théorie. Sans doute les exemples d'ordre industriel abondent et sont traités avec le souci du détail qui est la marque d'un esprit vraiment pratique; mais M. d'Ocagne, s'adressant cette fois au mathématicien proprement dit autant qu'à l'ingénieur, prend les questions de haut et tient à exposer les méthodes sous leur forme la plus générale, avant d'envisager les cas particuliers.

Il montre que la Nomographie pose à l'Analyste des problèmes à la fois attrayants et utiles. Sans doute les mathématiciens estiment que leur science de prédilection mérite d'être cultivée pour elle-même, mais il ne leur déplaît pas, à l'occasion, de faire « quelque chose qui serve à quelque chose ». Un de ces problèmes a fait l'objet d'un beau Mémoire de M. Gronwall.

J'entre maintenant dans l'analyse de l'Ouvrage.

Aux Chapitres I et II, il est traité de la représentation par *abaques cartésiens* des équations entre deux ou trois variables. Laissant de côté le premier cas, qui ne présente qu'un intérêt secondaire, on a, pour représenter l'équation

$$f(x, y, z) = 0, \tag{1}$$

le procédé suivant, qui est immédiat : Considérons z comme un paramètre variable, x et y comme des coordonnées cartésiennes, et traçons la famille des courbes représentées par l'équation (1), chaque courbe étant *cotée* en z. On voit tout de suite comment l'abaque ainsi constitué permet de trouver deux des nombres x, y, z, connaissant le troisième. La méthode s'étend par le principe de l'*anamorphose générale*. Écrivons, en changeant les notations,

$$f(z_1, z_2, z_3) = 0, \tag{2}$$

[1] Par exemple, *Principes usuels de Nomographie avec application à divers problèmes concernant l'Artillerie et l'Aviation*. Paris, Gauthier-Villars, 1920.

l'équation donnée. On peut la considérer, d'une infinité de manières, comme résultant de l'élimination de x, y entre trois équations

$$(3)\qquad f_1(x, y, z_1) = 0, \qquad f(x, y, z_2) = 0, \qquad f(x, y, z_3) = 0$$

(dont les deux premières peuvent être prises arbitrairement). On est conduit à un nomogramme constitué par trois familles de *courbes cotées* en z_1, z_2, z_3. Les cotes de trois courbes concourantes satisfont à (2).

La méthode est particulièrement intéressante quand on peut faire en sorte que les équations (3) représentent des droites (nomogrammes à *droites concourantes*). Le cas assez fréquent où l'équation (2) peut se mettre sous la forme

$$g_1(z_1) + g_2(z_2) + g_3(z_3) = 0$$

donne lieu aux élégants *abaques hexagonaux* de M. Lallemand. Enfin, dans certains cas, on peut représenter des équations entre plus de trois variables, mais seulement si, grâce à l'introduction de variables auxiliaires convenablement choisies, on peut substituer à une telle équation une suite d'équations ne contenant chacune pas plus de trois variables. L'étude de ces cas fait l'objet du Chapitre III.

Au Chapitre IV, on aborde les nomogrammes *à points alignés*, qui constituent, je l'ai dit, l'invention essentielle de M. d'Ocagne. On peut les obtenir en transformant par dualité les nomogrammes à droites concourantes. Mais il est bien plus avantageux d'employer les *coordonnées parallèles* (les coordonnées parallèles d'une droite sont les longueurs qu'elle intercepte sur deux parallèles fixes, à partir de deux origines). Un nomogramme à points alignés consiste simplement, dans le cas de trois variables, en trois courbes ou *échelles* cotées en z_1, z_2 et z_3. Les cotes de trois points en ligne droite satisfont à (2). Il convient de distinguer les nomogrammes de genre 0, 1, 2 ou 3, suivant que les *échelles rectilignes* sont en nombre 3, 2, 1 ou 0. Les nomogrammes de genre zéro sont naturellement les plus faciles à construire.

Toutes les relations (2) ne sont pas représentables de cette manière, mais beaucoup le sont. Cela tient à ce que la relation la plus

générale qui puisse être traduite par un nomogramme à alignement est de la forme

$$\begin{vmatrix} f_1(z_1) & f_2(z_2) & f_3(z_3) \\ g_1(z_1) & g_2(z_2) & g_3(z_3) \\ h_1(z_1) & h_2(z_2) & g_3(z_3) \end{vmatrix} = 0,$$

où n'interviennent pas moins de neuf fonctions arbitraires.

La méthode s'étend au cas de plus de trois variables, par l'emploi des *alignements* multiples et des *points à deux cotes* (Chap. V). C'est d'ailleurs l'introduction des points à deux cotes qui a permis, pour la première fois, de représenter *directement* (sans les ramener à des suites d'équations à trois variables) certaines équations à plus de trois variables, d'un type fréquent. Comme applications intéressantes, citons la *résolution des équations du troisième et du quatrième degré*, le *calcul des profils de remblai et de déblai*, la *résolution des triangles sphériques*, la *préparation du tir de l'artillerie*. Signalons aussi, à titre d'exemple propre à mettre en valeur la puissance de la méthode, la formule compliquée qui donne l'*épaisseur d'une pale d'hélice d'avion vers le moyeu*, en fonction de données qui sont la densité de la matière, la vitesse périphérique, etc. (p. 312). Cette formule est

$$h = \sqrt{\frac{3}{2R}}\left(1 + \frac{3DV^2}{8R}\right)\sqrt{P\rho}.$$

C'est une relation entre *six* variables. Elle est figurée par un nomogramme à triple alignement, avec deux échelles rectilignes et un système de points à deux cotes. Il va sans dire que le principe des abaques cartésiens ne laisse même pas entrevoir la possibilité de représenter une telle formule.

Ces applications sont traitées, je le répète, avec le souci du détail. Elles doivent être étudiées avec soin, parce que c'est justement le détail qui embarrasse le plus souvent le débutant. Il importe en particulier qu'il se familiarise avec la notion de *module* (le module correspondant à une grandeur est la longueur du segment qui représente l'unité de cette grandeur), et qu'il apprenne à choisir judicieusement ses modules.

On étend encore le champ de la Nomographie en introduisant les *index mobiles* (Chap. VI) dont l'emploi généralise le principe

de l'alignement. Soient par exemple C_1, C_2, C_3, C_4 quatre courbes cotées en z_1, z_2, z_3, z_4. Pour que quatre points pris sur ces courbes soient sur une courbe Γ, égale à une courbe donnée, il faut que leurs cotes satisfassent à une certaine relation. Pratiquement, la courbe Γ sera dessinée sur un transparent qu'on déplacera sur le plan où sont tracées C_1, C_2, C_3 et C_4. On voit la généralité de ce principe. Γ peut en particulier être constituée par deux droites parallèles, par deux droites perpendiculaires, etc. On peut aller encore plus loin en introduisant des *systèmes cotés mobiles*. S'élevant enfin au plus haut degré de généralité, l'auteur expose la *théorie morphologique* qui embrasse tous les nomogrammes possibles et permet de les classer. Sans doute, beaucoup de dispositions théoriques ne sont pas réalisables ou du moins n'ont pas encore été réalisées. Mais là comme ailleurs, il est difficile de tracer la limite infranchissable pour le praticien, et nul ne reprochera à M. d'Ocagne d'avoir poussé son exploration aussi loin que possible.

Dans cette esquisse du beau Livre de M. d'Ocagne, j'ai dû naturellement laisser de côté bien des points, par exemple l'application de la nomographie à la représentation des fonctions d'origine empirique, les méthodes appliquées à la *disjonction des variables*, etc. Signalons seulement, pour terminer, le curieux *calendrier perpétuel* de M. A. Crépin, consistant en un nomogramme à triple alignement. Il montre la possibilité d'appliquer la Nomographie à des questions d'ordre *arithmétique*, puisque la recherche du jour de la semaine correspondant à une date donnée se ramène manifestement à la recherche d'un reste suivant le module 7.

RAOUL BRICARD.

MÉLANGES

VUE D'ENSEMBLE SUR LES MACHINES A CALCULER;

Par M. Maurice d'OCAGNE.

Bibliographie.

C.S. — *Le Calcul simplifié par les procédés mécaniques et graphiques*, par M. d'Ocagne (Gauthier-Villars, 1893; 2e édition, 1905).

E.S.M. — Article *Calculs numériques* de l'*Encyclopédie des Sciences mathématiques* (Édition française, t. I, v. IV, p. 196). Exposé d'après l'article allemand de R. Mehmke, par M. d'Ocagne (Gauthier-Villars, 1909).

C.M. — *Calcul mécanique*, par le colonel Jacob (Ouvrage faisant partie de la *Bibliothèque de Mathématiques appliquées de l'Encyclopédie scientifique*; Doin, 1900).

B.S.E. — *Numéro commémoratif du Centenaire de l'invention, par Thomas de Colmar, de la première machine à calculer industrielle* (*Bulletin de la Société d'Encouragement pour l'Industrie nationale*, t. CXXXII, n° 5, septembre-octobre 1920).

1. *Origine du calcul mécanique.* — Toute application des mathématiques à un objet pratique aboutit, en dernière analyse, à la détermination de certains nombres inconnus au moyen d'autres nombres donnés. Cette détermination peut toujours s'effectuer par les procédés ordinaires du calcul numérique qui consistent uniquement, on voudra bien le remarquer, à ramener toute détermination de cet ordre à une suite d'extraits effectués dans des tables préexistantes, soit qu'on les ait apprises par cœur, comme les classiques tables d'addition et de multiplication, limitées aux neuf premiers nombres, soit qu'on les ait sous les yeux, comme les tables de logarithmes ou de telles autres fonctions usuelles que l'on voudra. Encore convient-il de remarquer que ces dernières

tables n'ont, somme toute, été obtenues que par une succession d'emprunts faits aux premières, ce qui montre bien que toute opération de calcul, si compliquée qu'elle puisse apparaître, se ramène, de proche en proche, au seul comptage unité par unité, fondement unique de tout l'art du calcul. Cette simple observation fait apparaître, dès l'origine, la possibilité de ramener l'exécution d'un calcul quelconque à un procédé purement mécanique dès que l'on saura constituer mécaniquement un simple compteur.

La forme embryonnaire, en quelque sorte, de ces compteurs se reconnaît dans les nombreuses variétés de bouliers employés non seulement par les peuples de l'antiquité, mais encore, de nos jours, par ceux de l'Extrême-Orient où se rencontrent des individus capables de les manœuvrer avec une surprenante dextérité (*Stchoty* des Russes, *Souan-pan* des Chinois, *Soro-ban* des Japonais). De tels instruments, après substitution aux boules enfilées sur des axes rigides, de certaines glissières chiffrées, ont pris, dans les temps modernes, la forme perfectionnée de divers arithmographes tels que ceux de Troncet et de Bollée. Ces instruments, qui ne sont pas des machines, au sens propre du mot, parce qu'en réalité dépourvus de mécanisme, de même que les ingénieuses réglettes calculatrices de Genaille et Lucas, restent en dehors du sujet que nous avons à traiter ici, limité aux véritables machines à calculer (1).

(1) On trouvera quelques indications au sujet de ces instruments dans notre Ouvrage *C.S.* auquel, d'une manière générale, nous renvoyons le lecteur pour les détails omis dans cet article.

Cet Ouvrage est le premier dans lequel ait été tentée une étude d'ensemble des machines à calculer groupées en une classification rationnelle. Le mode de classification qui y avait été adopté a été maintenu, à quelques variantes de détail près, dans les exposés similaires publiés depuis lors (*E.S.M.*; *C.M.*).

Nous ajouterons que cette publication a provoqué de la part de nombre de spécialistes de cette branche de la Mécanique appliquée, inventeurs et constructeurs, des initiatives qui, pour n'avoir pas été concertées, ne s'en sont pas moins trouvées remarquablement concordantes pour réunir entre nos mains, sur le sujet, une documentation d'une très grande richesse. Le dépouillement méthodique de cette belle collection de documents a été effectué, à notre incitation, par un de nos élèves de l'École Polytechnique, M. Jean Vèzes; il en a condensé les résultats dans un travail de fond que nous souhaitons de voir prochainement mettre au jour et qui constituera la source la plus précieuse de renseignements détaillés sur la question.

2. *Machines arithmétiques et machines algébriques.* — Mais avant d'aborder ce sujet nous jetterons un regard rapide sur les grandes divisions que l'on peut établir dans l'ensemble des modes usuels de simplification du calcul.

Tout d'abord, on les range en deux grandes familles selon qu'ils procèdent de la méthode *graphique* ou qu'ils font appel au secours d'organes *mécaniques*.

La méthode graphique intervient dans la science du calcul sous deux formes essentiellement distinctes et qu'il convient de ne pas confondre.

D'une part, en substituant aux nombres soumis au calcul des segments de droite dont ces nombres représentent les longueurs, avec un certain choix d'unité de longueur, ou *module*, on remplace l'opération à effectuer sur ces nombres par une construction géométrique équivalente exécutée sur ces segments; telle est l'essence du *calcul graphique* proprement dit, ou *calcul par le trait*, dont la *statique graphique* peut apparaître comme un cas particulier.

D'autre part, en faisant correspondre aux nombres qui entrent dans le calcul les cotes d'éléments appartenant à certains systèmes simplement infinis, cotés sur un plan au moyen des valeurs du paramètre dont ils dépendent, on peut représenter le lien analytique établi entre ces nombres par une certaine relation de position simple à constater entre ces éléments cotés; telle est l'essence du *calcul nomographique*, pratiqué au moyen de ce qu'on appelle des *nomogrammes*.

Une distinction analogue est à observer dans la façon de réduire le calcul à des procédés purement mécaniques.

Dans une première catégorie de machines, dites *arithmétiques*, comprenant la généralité de celles qui sont d'un usage courant dans la pratique, les nombres soumis au calcul sont inscrits chiffre par chiffre sur certaines parties de la machine, au moyen de dispositifs spéciaux, liés mécaniquement de façon à faire apparaître également chiffre par chiffre, sur une autre partie de la machine, le résultat de l'opération que l'on a en vue.

Mais dans d'autres machines, dites *algébriques*, dont la première idée (tout au moins si on l'envisage d'une façon systématique) appartient au savant ingénieur espagnol Torres-Quevedo, on fait correspondre aux nombres soumis au calcul les points que marquent

des index sur certaines échelles graduées, liées mécaniquement entre elles de façon que les cotes lues ainsi simultanément sur les diverses échelles satisfassent à une relation analytique voulue.

Il saute aux yeux que les machines rentrant dans cette seconde catégorie jouent, dans l'ordre du calcul mécanique, un rôle tout à fait analogue à celui des nomogrammes dans l'ordre du calcul graphique. C'est, au surplus, M. Torres-Quevedo qui a lui-même fait le premier cette remarque ([1]).

Nous allons donner successivement un coup d'œil aux machines appartenant à l'une et à l'autre de ces catégories, mais sans entrer, bien entendu, dans aucun des détails techniques qui ne sont de nature à intéresser que les seuls spécialistes.

I. — Machines arithmétiques.

3. *Schéma général des machines arithmétiques.* — Pour rendre plus claires les explications qui vont suivre, nous commencerons par tracer une sorte de schéma général des machines arithmétiques.

L'organe essentiel de toute machine de ce genre est ce que nous proposerons d'appeler le *chiffreur;* il consiste en un cylindre circulaire droit mobile autour de son axe et portant une chiffraison de 0 à 9 disposée régulièrement le long d'un cercle tracé soit sur une de ses bases, soit sur sa surface latérale, et dont un seul chiffre apparaît à la fois à une lucarne pratiquée à cet effet dans une platine fixe sous laquelle tourne le cylindre.

Il arrive, au reste, parfois que cette chiffraison de 0 à 9 se répète plusieurs fois sur le pourtour du chiffreur.

Si le chiffre n se trouve tout d'abord dans la lucarne et que l'on fasse tourner le cylindre d'une, de deux, de trois, etc. des fractions de tour qui correspondent à chaque chiffre (nous dirons plus simplement d'une, de deux, de trois, . . . *unités*) dans le sens contraire à celui de la chiffraison, le chiffre qui apparaîtra à la lucarne sera le chiffre des unités de $n+1$, $n+2$, $n+3$, ...

Supposons de tels chiffreurs placés les uns à côté des autres de façon que les chiffres lus à leurs lucarnes respectives forment par

---

([1]) *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXIX, 1901, p. 161.

leur ensemble un certain nombre écrit dans le système décimal. Ce système de chiffreurs constituera alors un *totalisateur*.

Si les chiffres lus respectivement aux lucarnes des unités, des dizaines, des centaines, etc. sont a_0, a_1, a_2, ..., a_p, on se trouve avoir ainsi inscrit, en numération décimale, le nombre figuré par

$$a_p \ldots a_2 a_1 a_0.$$

Si l'on fait tourner ensuite les chiffreurs correspondants respectivement de b_0, b_1, b_2, ..., b_p unités, les nouveaux chiffres qui se lisent aux lucarnes sont ceux de la somme des nombres $a_p \ldots a_2 a_1 a_0$ et $b_p \ldots b_2\, b_1\, b_0$, *abstraction faite des retenues*. Pour tenir compte de celles-ci, il faut, lorsque sur un chiffreur, on a, au cours de cette opération, franchi l'intervalle du chiffre 9 au chiffre 0 (ou, si l'on veut, l'*origine de la chiffraison*), faire avancer d'une unité le chiffreur suivant dans l'ordre décimal ascendant.

Deux variantes principales sont d'ailleurs à envisager dans la disposition relative des chiffreurs : dans l'une d'elles, ces chiffreurs tournent autour d'axes parallèles, situés dans un même plan ou sur un même cylindre de révolution, dans l'autre, ils tournent individuellement autour du même axe.

Dans le premier cas, où le totalisateur peut être dit *multiaxial*, *droit* ou *circulaire*, la chiffraison de chaque chiffreur est faite soit sur une des bases, soit sur la surface latérale du cylindre qui le constitue, mais avec les chiffres inscrits *dans le sens des génératrices*.

Dans le second cas, où le totalisateur peut être dit *uniaxial*, les chiffres, inscrits nécessairement sur la surface latérale de chaque cylindre, sont dirigés *perpendiculairement aux génératrices*.

Pour que l'appareil soit, à proprement parler, une machine, il faut que le report des retenues s'effectue automatiquement sans que l'opérateur ait à y porter son attention; le mécanisme approprié, qui doit se répéter dans chaque intervalle de deux chiffreurs consécutifs, est le *reporteur*.

Un totalisateur n'est mécaniquement constitué que lorsqu'il comporte de tels reporteurs.

Pour faire tourner rigoureusement chaque chiffreur du nombre d'unités voulu, on a recours à un dispositif spécial adapté à chacun de ces chiffreurs et qui peut être dit son *actionneur*. Chacun de ces actionneurs peut être mû individuellement, et, de fait, il en

est ainsi dans nombre de machines, celles qui sont plus particulièrement destinées à faire les additions; mais on conçoit également qu'une fois les divers actionneurs disposés en vue de commander chacun la rotation du nombre voulu d'unités, on puisse les faire mouvoir simultanément, au moyen d'un mécanisme unique qui est dit alors l'*entraîneur*.

Enfin, si l'on veut, à la fin de chaque opération, ramener automatiquement tous les chiffreurs à o, il faut munir la machine d'un mécanisme spécial dit *effaceur*.

4. *Appropriation aux diverses opérations arithmétiques.* — Nous n'avons parlé jusqu'ici que du moyen d'effectuer les additions. S'il s'agit de faire une soustraction, tout ce qui vient d'être dit peut subsister à la seule différence près que la rotation de chaque chiffreur soit de même sens que sa chiffraison, au lieu de lui être de sens contraire comme dans le cas précédent.

Pour réaliser cette condition en conservant la machine telle qu'elle vient d'être décrite, il faut changer le sens de la chiffraison des chiffreurs tout en maintenant celui de leur rotation, ou *vice versa*. Dans la première hypothèse, il suffit, à la première chiffraison, d'en accoler une seconde, de sens contraire, se mouvant sous une seconde lucarne de telle sorte que, seules, les lucarnes correspondant, pour les divers chiffreurs, soit à l'addition, soit à la soustraction, soient simultanément ouvertes ou fermées. Dans la seconde hypothèse, le mécanisme doit être combiné de telle sorte que l'on puisse renverser le sens de la rotation des chiffreurs sans que les reporteurs cessent de fonctionner.

Suivant l'une ou l'autre de ces hypothèses, nous dirons que les chiffreurs ne sont pas ou sont *réversibles*.

Il y a d'ailleurs un moyen bien simple de ramener, si l'on veut, toute soustraction à une addition, grâce à l'emploi du nombre complémentaire du nombre à retrancher, relativement à la puissance 10^n qui lui est immédiatement supérieure, grâce à la formule

$$a - b = (a - 10^n) + (10^n - b);$$

les nombres $a - 10^n$ et $10^n - b$ se forment, en effet, mentalement sans effort, au cours même de leur inscription sur la machine.

La multiplication peut être effectuée par additions répétées, de

même que la division par soustractions répétées jusqu'à ce que le reste devienne inférieur au diviseur.

Il va sans dire, d'ailleurs, que ces répétitions ne se font pas toutes à partir des unités, du multiplicande ou du dividende, mais successivement à partir de ses unités, dizaines, centaines, etc., les nombres de fois indiqués par les chiffres correspondants du multiplicateur ou du diviseur.

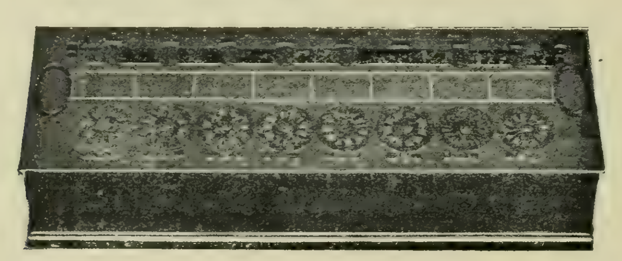
On conçoit, *a priori*, que, pour ces diverses répétitions, l'emploi d'un entraîneur simplifie grandement l'opération puisque, dans chaque position relative des chiffreurs, il fait fonctionner à la fois tous les actionneurs de la quantité voulue. On verra toutefois plus loin, que, moyennant certaines conditions parfois remplies, cette plus grande simplicité de manœuvre ne s'accompagne pas toujours d'une plus grande rapidité.

Grâce aux définitions qui viennent d'être données, il va nous être possible de donner, en quelques mots, une idée suffisamment précise des diverses variétés de machines arithmétiques, en nous bornant, au reste, pour chacune d'elles, à quelques types bien caractéristiques.

A. — Machines sans entraineur.

5. *Totalisateur multiaxial à actionneurs simples.* — C'est à ce type qu'appartient la première en date de toutes les machines à calculer (abstraction faite des instruments, sans mécanisme pro-

Fig. 1.

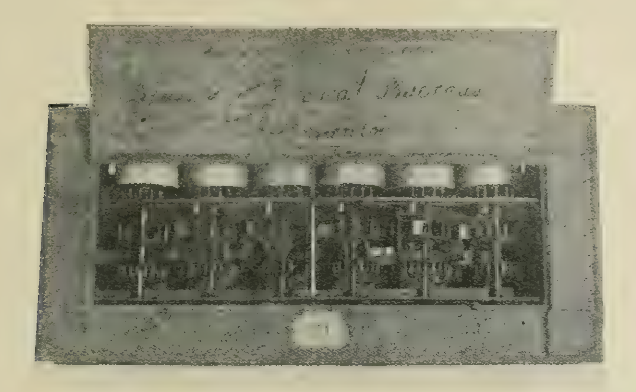


prement dit, rappelés plus haut), celle de Blaise Pascal, dont l'invention remonte à 1642.

Les figures 1 et 1 *bis* donnent son aspect extérieur et une vue horizontale de ses organes mécaniques. L'actionneur de chaque

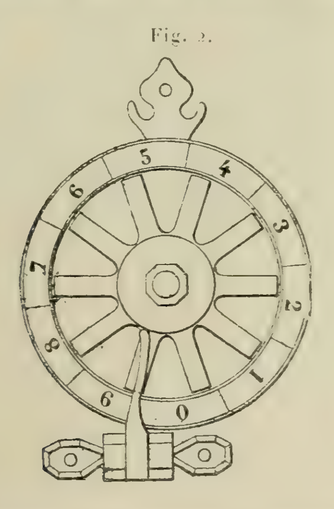
chiffreur est constitué par les rais mobiles d'une roue à jante fixe portant une chiffraison de 0 à 9, et munie d'un buttoir sur la ligne de séparation des cases 0 et 9 (*fig.* 2).

Fig. 1 *bis*.



Un style introduit dans la case correspondant à un chiffre quelconque inscrit sur la jante, avec lequel on pousse le rais voisin, dans le sens décroissant de la chiffraison, jusqu'au buttoir, fait

Fig. 2.



tourner le système des rais et, par suite, le cylindre chiffreur auquel il est invariablement lié, du nombre d'unités marqué par ce chiffre.

Le point capital de l'invention résidait dans le dispositif du

reporteur dont l'introduction conférait à l'appareil la qualité d'une véritable machine.

N'écrivant pas ici pour des spécialistes de la Mécanique appliquée, nous nous contenterons d'indiquer en gros comment était constitué ce reporteur : un peu avant le passage au buttoir de l'origine du chiffreur (point de séparation du 9 et du 0 sur ce chiffreur), le mouvement du cylindre provoquait la montée, autour d'un axe horizontal, d'un poids qui, déclenché au moment précis de ce passage, déterminait, par l'intermédiaire d'un cliquet convenablement placé, une avancée d'une unité pour le chiffreur immédiatement voisin à gauche.

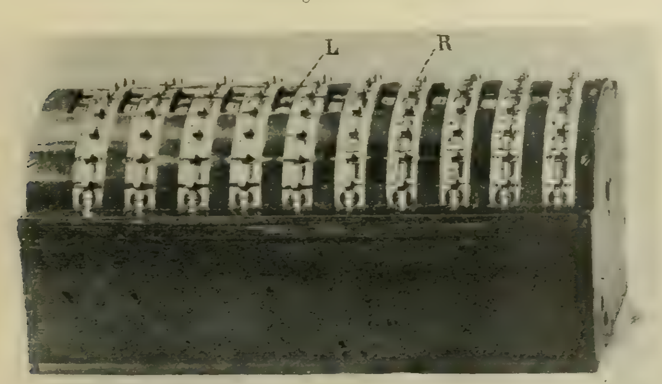
Un tel reporteur ne pouvant fonctionner que dans un seul sens de rotation des chiffreurs, la machine de Pascal n'est pas réversible et comporte nécessairement, par suite, deux séries de lucarnes relatives l'une à l'addition, l'autre à la soustraction, dont une seule à la fois peut être rendue visible au moyen d'un écran glissant que l'on distingue sur la figure 1 où il laisse à découvert les lucarnes de l'addition.

Les dispositions auxquelles s'était arrêté Pascal ont été modifiées par divers chercheurs : Lépine (1725), Hillerin de Boistissandeau (1730). D'autres dispositions s'écartant davantage de celles-ci, quoique reposant sur la même idée de principe, ont été imaginées par Morland (1663), Poleni (1709), Gersten (1735). Ce n'est qu'en 1841 que, dans l'additionneur du Dr Roth, la conception première de Pascal a pris, au point de vue pratique, une forme vraiment satisfaisante; les chiffreurs, constitués par de simples disques portant leur chiffraison le long de leur bord, permettaient de réduire sensiblement les dimensions de l'appareil; mais le perfectionnement le plus sensible au point de vue mécanique, se rencontrait dans le reporteur puisant son énergie dans la tension d'un ressort armé par la rotation de 0 à 9 du chiffreur correspondant et se détendant au moment du passage de 9 à 0; de plus, grâce à un léger décalage de chaque chiffreur par rapport au précédent, les divers reporteurs ne fonctionnaient plus que successivement, bien qu'à court intervalle, au lieu de le faire simultanément, comme dans les précédentes machines (« en feu de file », et non « en feu de peloton » suivant l'expression de l'inventeur lui-même), ce qui avait l'avantage de supprimer, dans le jeu de la machine,

certains efforts exagérés, de nature à le rendre assez pénible, sinon même à le paralyser totalement, ce qui pouvait arriver notamment si, alors que des chiffres 9 étaient inscrits à toutes les lucarnes, on voulait ajouter une seule unité au nombre ainsi formé. Tout au contraire, la facilité du fonctionnement de l'additionneur de Roth a permis à l'inventeur de fonder précisément sur cette opération un moyen de remettre rapidement la machine à zéro, grâce à un bouton placé sur le côté de la boîte qui, lorsqu'on le tire, et quels que soient les chiffres d'abord inscrits dans les lucarnes, fait apparaître dans chacune d'elles le chiffre 9.

6. *Totalisateur uniaxial à actionneurs simples.* — En vue de réduire l'encombrement de la machine, il est clair qu'on devait avoir avantage à recourir à un totalisateur uniaxial dont un pre-

Fig. 3.

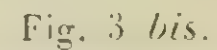


mier exemple a été fourni, dès 1750, par la machine de J.-I. Pereire. Dans cette machine, les chiffreurs étaient constitués par des roues chiffrées sur la périphérie de leur jante et montées sur un même axe; à côté de ces chiffres, chaque roue portait autant de trous apparaissant dans une rainure correspondante du coffret renfermant le mécanisme, dont le bord était également chiffré; une aiguille introduite dans ces trous permettait de faire tourner chaque chiffreur du nombre d'unités voulu.

Mais, comme type vraiment perfectionné de totalisateur uniaxial on peut citer celui de Tchebichef (*fig.* 3 et 3 *bis*), dont les

chiffreurs sont des tambours montés sur un même axe et portant sur leur périphérie la chiffraison de 0 à 9 trois fois répétée; chacun d'eux est actionné par une roue motrice, montée sur le même axe, qu'on peut faire tourner au moyen de doigts implantés sur sa tranche correspondant aux chiffres 1, 2, ..., 9, marqués sur l'enveloppe cylindrique de l'appareil.

La principale caractéristique de l'additionneur de Tchebichef réside dans le fait que le report des dizaines s'y effectue de façon continue, chaque reporteur étant constitué par un train épicycloïdal de raison 10 (visible dans certains des intervalles entre


Fig. 3 *bis*.



les chiffreurs successifs sur la figure 3 *bis* qui représente le totalisateur retiré de son enveloppe).

Un tel dispositif pouvant fonctionner quel que soit le sens de la rotation, on voit qu'à l'encontre de tous ceux dont il a été question jusqu'ici le totalisateur de Tchebichef est réversible. Toutefois, les retenues n'influant que graduellement sur la position des chiffreurs successifs, cette position diffère de celle qui se produirait dans une machine à report discontinu; mais, l'écart angulaire entre ces deux positions restant plus petit qu'un intervalle unitaire, il suffit, pour permettre la lecture voulue, de pratiquer, dans l'enveloppe du totalisateur, des lucarnes assez grandes pour qu'y paraissent à la fois deux chiffres consécutifs de chaque chiffreur; la lecture est guidée, entre les chiffres qu'il convient de retenir comme figurant au résultat, par des bandes marquées en blanc

sur la périphérie de chaque chiffreur (*fig. 3 bis*), qui tiennent compte des écarts angulaires à observer dans la position du chiffreur suivant.

Dans le *calculateur* Burroughs, le report des retenues par train épicycloïdal a été complété par un ingénieux dispositif, fondé sur l'intervention d'une came, pour que l'avancée d'une unité d'un chiffreur, due au report d'une retenue, n'ait lieu que lors du passage de 9 à 0 du chiffreur contigu de droite et, par suite, que tous les chiffres du résultat se montrent exactement alignés comme dans les machines précédentes. Par contre, cette transformation prive le totalisateur de l'avantage d'être réversible.

7. *Actionneurs à touches.* — Dans tous les totalisateurs jusqu'ici envisagés, les actionneurs étaient simples; autrement dit, l'opérateur imprimait, à la main, la rotation voulue à chaque chiffreur, l'amplitude de son geste, déterminée au moyen d'une chiffraison *ad hoc*, étant simplement limitée par le heurt contre un buttoir. Mais on conçoit que la rotation voulue puisse être communiquée au chiffreur par l'intermédiaire d'un mécanisme commandé par des touches correspondant aux différents chiffres à faire entrer dans le total. On pourrait être tenté de ne voir d'abord là qu'une sorte de complication superflue; mais on aperçoit très vite le grand bénéfice à retirer, au point de vue du fonctionnement de la machine, de cette plus grande complication introduite dans sa construction. Alors que l'intervention de la main tout entière est requise pour la mise en mouvement de chaque chiffreur, dans le cas des actionneurs simples, il suffit, dans le second cas, pour le même objet, d'un seul doigt appuyé sur une touche, en sorte que, pour l'introduction, dans le total, d'un nombre de moins de dix chiffres (et il est rare qu'en pratique on atteigne même cette limite), tous les chiffreurs peuvent être mus *simultanément* par une pression des doigts, comme le sont, sur le clavier d'un piano, les touches répondant aux notes d'un accord donné. Et même, par extension d'une forme de langage courante lorsqu'il s'agit du jeu d'un piano, on pourrait dire que chaque nombre à introduire dans la somme se trouve ainsi *plaqué* d'un seul coup sur le totalisateur.

S'il s'agit d'effectuer la somme d'une longue suite de nombres, le gain de temps ainsi réalisé saute aux yeux. On voit, en outre,

combien se trouve facilitée par ce moyen l'exécution des multiplications : il suffit de plaquer, comme il vient d'être dit, le multiplicande, à partir des unités, des dizaines, etc., respectivement les nombres de fois voulus par le chiffre des unités, le chiffre des dizaines, etc., du multiplicateur. Ici intervient évidemment l'habileté manuelle de l'opérateur qui doit s'entraîner à jouer de son clavier comme un pianiste (plutôt que comme un dactylographe qui n'agit que sur une touche à la fois).

Mais une fois que, grâce à un entraînement suffisant, l'opérateur est devenu bien maître de son jeu, il peut — l'expérience l'a prouvé — gagner en vitesse, pour l'exécution des multiplications, les machines à entraîneur dont nous allons parler par la suite. Celles-ci toutefois conservent l'avantage de n'exiger qu'un apprentissage réduit au minimum de la part de celui qui veut s'en servir et d'être à l'abri des « fausses notes » qui, dans le cas des machines à touches, peuvent échapper à un exécutant trop fougueux.

Quant à la réalisation du mécanisme d'un tel actionneur, on peut la réduire schématiquement à ce qui suit : les touches étagées en colonne, au droit de chaque chiffreur, permettent d'exercer des pressions en divers points d'un levier portant à son extrémité un secteur denté engrenant avec une roue solidaire du chiffreur; suivant le point où ce levier est pressé par l'abaissement d'une touche, la course du secteur denté est d'une, deux, . . ., ou neuf dents, faisant tourner le chiffreur d'autant d'unités. Tel est notamment, du moins en gros, le dispositif qui se rencontre dans le *Comptometer* Felt et Tarrant (*fig.* 4).

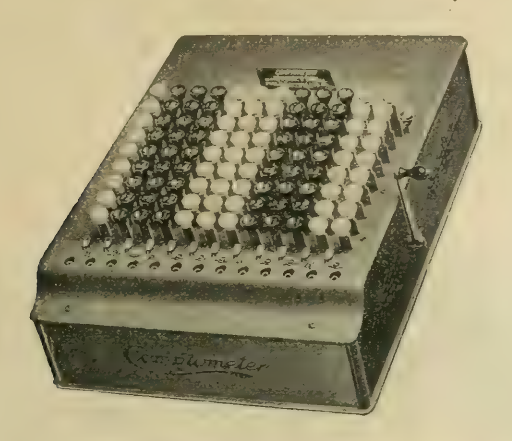
Les machines à touches sont toujours pourvues d'un effaceur qui, d'un seul coup de levier, opère la remise à zéro. En revanche, elles n'offrent souvent pas de dispositif spécial pour les soustractions; mais elles permettent de les effectuer par l'addition du complémentaire du nombre à retrancher, ainsi qu'on l'a vu au nº 4.

B. — Machines avec entraineur.

8. *Pignon à dents d'inégale longueur.* — On a déjà fait voir, au nº 4, l'intérêt qu'il y a à munir la machine d'un entraîneur propre à imprimer *simultanément* aux divers chiffreurs les rotations voulues, en vue de faciliter l'exécution des multiplications et divisions.

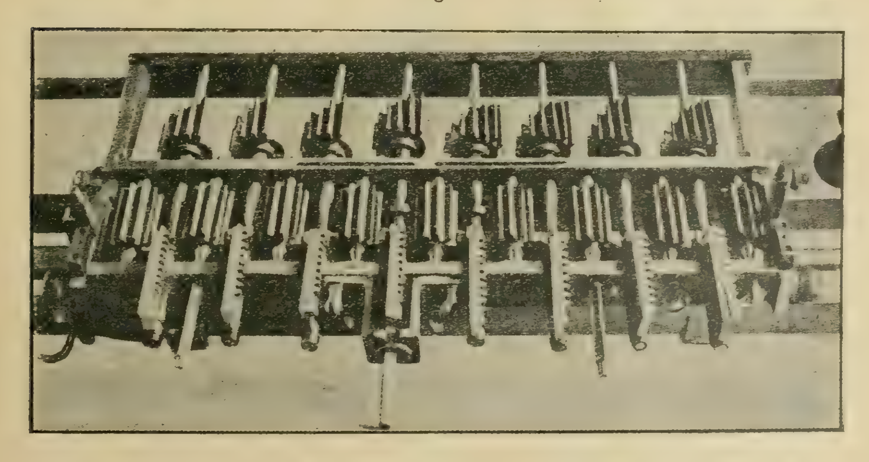
Le moyen le plus anciennement proposé à cet effet est celui que Leibniz avait imaginé dès 1671; il consiste à déterminer la rotation de chaque chiffreur en faisant engrener une roue solidaire de

Fig. 4.



son axe avec un pignon muni de neuf dents dont les longueurs inégales croissent en progression arithmétique; suivant que,

Fig. 5.



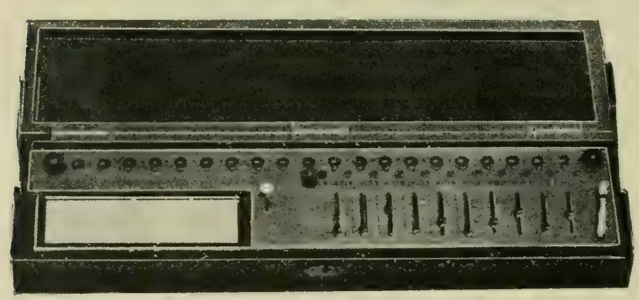
grâce à un dispositif approprié, la mise en prise de la roue et du pignon se fait dans la partie où celui-ci offre une, deux, ..., ou neuf dents, le chiffreur avance d'une, deux, ..., ou neuf unités. D'ailleurs, un arbre de couche commandé par une manivelle com-

munique son mouvement de rotation à tous les pignons, chacun de ceux-ci faisant, en même temps que lui, un tour entier.

Il n'est que juste, nous le répétons, de faire honneur de la première conception de cet artifice à Leibniz; mais, aucun des deux modèles dans lesquels l'illustre géomètre chercha à l'appliquer, en 1694 et 1706, ne put se prêter à un fonctionnement pratique. La figure 5 montre la partie essentielle du mécanisme de la première machine de Leibniz, encore existante à la Bibliothèque de Hanovre; la seconde a disparu.

L'idée d'utiliser le pignon à neuf dents se retrouve dans d'autres

Fig. 6.



essais plus ou moins perfectionnés dus au curé wurtembergeois M. Hahn (1774), à Lord Mahon, comte de Stanhope (1775), à l'officier du génie hessois J.-H. Muller (1784), à l'horloger polonais A. Stern (1814).

Mais ce n'est qu'en 1820 que la même idée s'offrant à l'esprit du financier Thomas, de Colmar (qui, très vraisemblablement, n'avait aucune connaissance des essais antérieurs), donna naissance à l'*arithmomètre*, aujourd'hui classique, qui a constitué le premier type vraiment industriel de machine à calculer [1] (*fig.* 6). Sans

[1] Le centenaire de l'invention de l'arithmomètre Thomas a été dignement célébré à Paris, en juin 1920, par les soins de la *Société d'encouragement pour l'Industrie nationale* qui a organisé, à cette occasion, une exposition rétrospective et actuelle de machines à calculer et une série de conférences s'y rapportant. Le texte de ces conférences a été réuni, avec toute une série de documents du plus haut intérêt relatifs aux machines à calculer dans *B.S.E.*, que l'on peut regarder comme une mine d'utiles renseignements, touchant le sujet. On y trouve notamment les rapports rédigés, à diverses époques, sur l'arithmomètre par Francœur, Hayem, Benoît et le général Sebert (p. 660, 662, 687, 694).

entrer dans de grands détails au sujet de cette machine, nous ne croyons pourtant pas pouvoir nous dispenser de signaler ici ses principales caractéristiques qui ont inspiré nombre de dispositions analogues, plus ou moins perfectionnées, dans les machines construites ultérieurement.

Pour établir la mise en prise de la roue dentée, solidaire du chiffreur, et du pignon à dents d'inégale longueur, au point voulu, cette roue dentée peut être déplacée le long d'un arbre à section carrée qui transmet sa rotation au chiffreur. Un bouton solidaire de cette roue glisse dans une rainure portant une chiffraison de 0 à 9 telle qu'à la hauteur du chiffre n la mise en prise ait lieu avec n dents du pignon. Il suffit donc, en déplaçant les boutons dans leurs rainures (visibles sur la figure 6), de leur faire marquer les chiffres successifs d'un nombre pour qu'un tour de la manivelle (placée à la droite des rainures) fasse entrer (moyennent le jeu des reporteurs) ce nombre dans le total. Par suite, en donnant m tours de manivelle, on fait apparaître dans les lucarnes du résultat le produit du nombre inscrit par m.

Il convient d'ajouter que les neuf dents de chaque pignon n'occupent qu'une partie (la moitié environ) de sa périphérie. Cela permet, en faisant agir le reporteur pendant la période correspondant au passage de la partie non dentée, et donnant à celle-ci un léger décalage d'un pignon au suivant, de réaliser le report en feu de file des retenues, comme dans l'additionneur de Roth.

Pour que l'on puisse effectuer une multiplication par un nombre de plusieurs chiffres sans avoir à donner autant de tours de manivelle qu'il y a d'unités dans ce nombre, le totalisateur à disques, multiaxial, est fixé à une platine qui peut recevoir, par rapport à la partie fixe de la machine, des déplacements successifs égaux à l'intervalle des chiffreurs. Cela permet, *à partir de chaque ordre décimal*, de faire entrer le multiplicande dans le totalisateur autant de fois qu'il y a d'unités dans le chiffre correspondant du multiplicateur, et, partant, de ne donner en tout qu'*un nombre de tours de manivelle égal à la somme des chiffres du multiplicateur*. Pour multiplier, par exemple, le nombre inscrit sur la platine fixe par 365, on aura à donner 14 tours de manivelle en tout au lieu des 365 qui eussent été nécessaires si le totalisateur avait été lui-même fixe par rapport à cette platine.

La platine mobile est d'ailleurs percée d'un second rang de lucarnes, plus petites que celles où se lit le résultat, où, pour chaque ordre décimal, un compteur spécial enregistre le nombre de tours de la manivelle, et, par suite, dans lesquelles, à titre de contrôle, doit se lire le multiplicateur à la fin de l'opération.

Pour que le jeu d'abord additif de la machine devienne soustractif, il suffit de renverser le sens de la rotation des chiffreurs; à cet effet, un manchon glissant sur chaque axe carré porte deux pignons d'angle de sens contraire et la simple manœuvre d'un levier visible à la gauche des rainures chiffrées de la platine fixe (*fig.* 6) met tantôt l'un et tantôt l'autre en prise avec le pignon qui entraîne la rotation du chiffreur correspondant. Il va sans dire qu'en ce cas le compteur des nombres de tours de la manivelle fait apparaître le quotient et que le résidu final dans les lucarnes du totalisateur, où avait été d'abord inscrit le dividende, après que pour chaque ordre décimal on a retranché le diviseur autant de fois qu'il a été possible, est précisément le reste.

Quant à l'effaceur, il est très simplement constitué par une crémaillère qui se met en prise avec des pignons, concentriques aux disques chiffreurs, lorsque la platine mobile est légèrement soulevée; chacun de ces pignons a neuf dents pleines correspondant aux chiffres de 1 à 9 et une dent manquant au droit du 0. Dès lors, la crémaillère tirée dans le sens de sa longueur fait tourner chaque disque chiffreur jusqu'au moment où son 0 se trouve dans la lucarne correspondante.

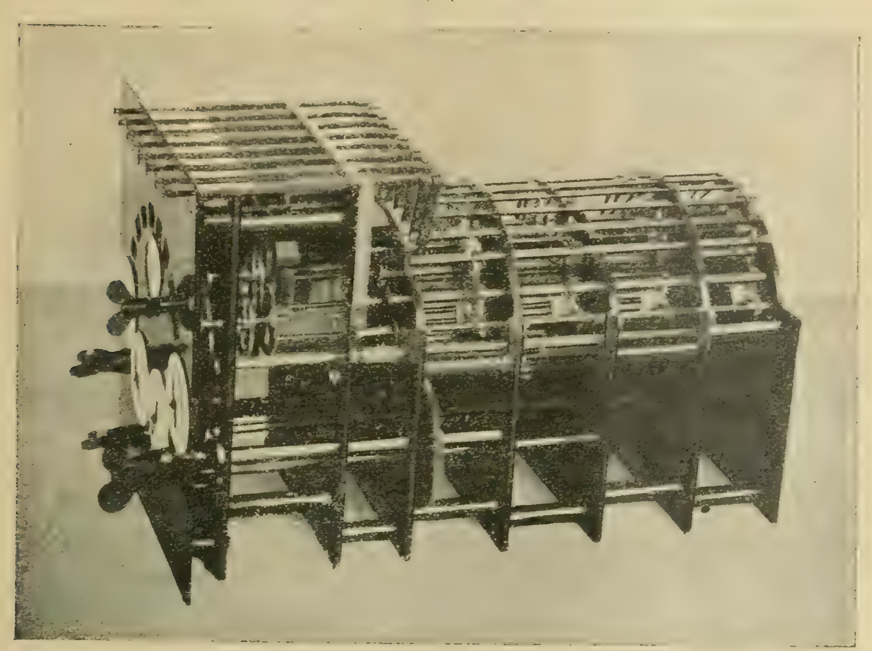
Enfin un dispositif spécial, dit *croix de Malte*, analogue à celui qui est employé en horlogerie sous le même nom, empêche les organes en rotation d'être entraînés par leur inertie au delà de la position où ils doivent s'arrêter, en les immobilisant dans cette position, au moment précis où elle est atteinte, par la pression d'une pièce rigide convenablement disposée.

L'arithmomètre Thomas a été le prototype de toute une série de machines réalisant diverses améliorations, dans le détail desquelles nous ne saurions entrer ici. Nous nous contenterons de mentionner rapidement quelques-unes d'entre elles se distinguant plus spécialement par quelque intéressante particularité.

En premier lieu, nous citerons l'arithmomètre de Maurel, dit *arithmaurel* (*fig.* 7) remontant à l'année 1849, perfectionné depuis

lors par Jayet, dans lequel le totalisateur, multiaxial, est circulaire, ce qui permet de commander tous les chiffreurs à l'aide d'un seul pignon central à neuf dents d'inégale longueur. Cette machine

Fig. 7.

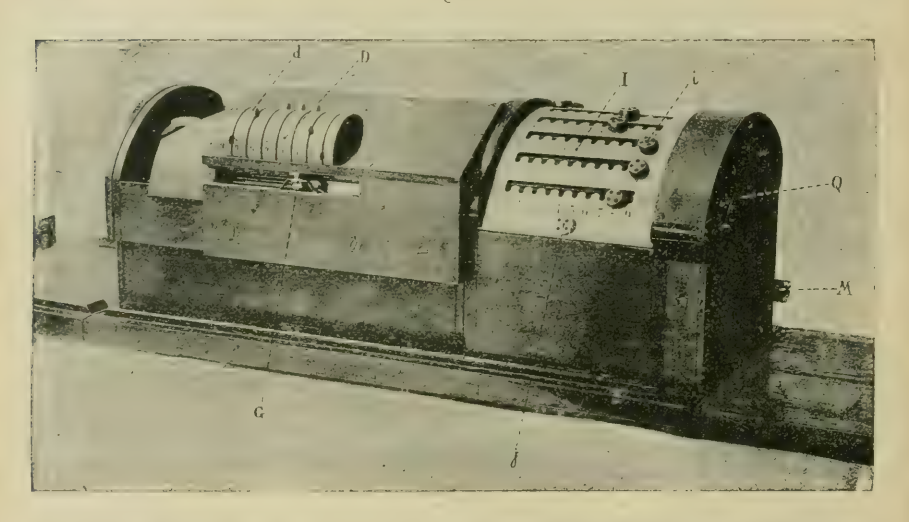


est pourvue d'un mécanisme délicat, tel que ceux de l'horlogerie, grâce auquel la manœuvre est réduite à une extrême simplicité. Les divers chiffres du multiplicande étant inscrits au moyen des tiges graduées visibles à la partie supérieure de la machine, il suffit de marquer, à l'aide des aiguilles mobiles sur les cadrans que l'on voit au-dessous, les chiffres du multiplicateur pour que ceux du produit apparaissent aux lucarnes disposées à cet effet. On peut dire, en somme, que la seule inscription du multiplicande et du multiplicateur suffit pour former le produit. Mais la délicatesse même du mécanisme le rend assez fragile et peu propre à se prêter à un usage industriel.

L'utilisation d'un seul pignon central à neuf dents se retrouve encore, sous une forme des plus ingénieuses, dans la machine de

Tchebichef qui date de 1882. On a vu plus haut (nº 6) comment est constitué le totalisateur de cette machine, qui peut, au reste, être employé séparément, ainsi qu'on l'a indiqué. Pour le rendre propre à l'exécution rapide des multiplications et divisions, l'illustre inventeur l'a complété par un entraîneur *amovible*, qui s'y adapte très aisément au moment où besoin est (*fig.* 8). Grâce à un mécanisme dont le détail ne serait pas ici à sa place [1], il suffit, une fois le multiplicateur inscrit au moyen des boutons

Fig. 8.



mobiles dans les rainures chiffrées circulaires du cylindre avant, et le multiplicande au moyen des boutons mobiles dans les rainures chiffrées rectilignes du cylindre arrière, de tourner la manivelle M jusqu'à ce que ces derniers boutons soient tous revenus à o; à ce moment, le produit se lit dans les lucarnes du totalisateur.

En donnant à l'arithmomètre une forme pleinement circulaire,

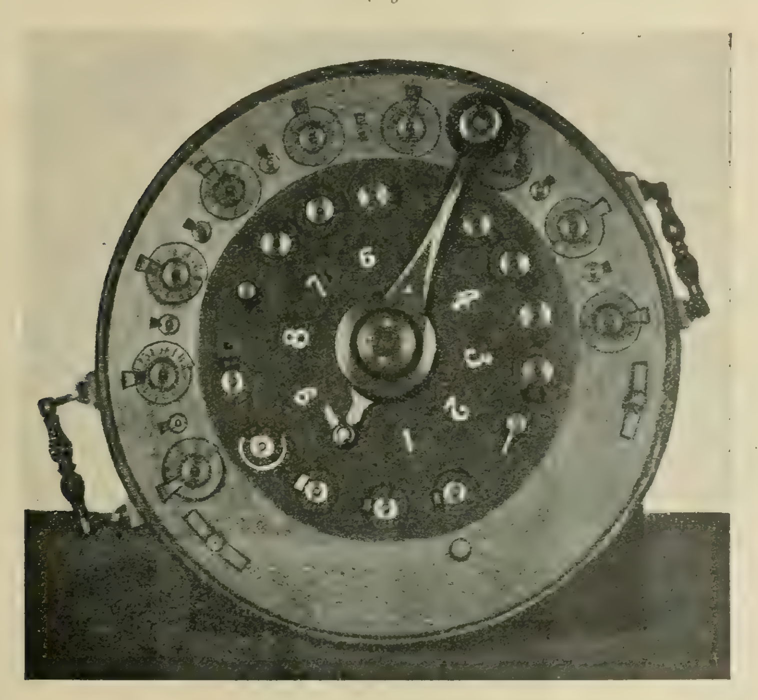
---

[1] Ce mécanisme est complètement décrit dans la note annexe I, de C. S. (2e édition), dont nous avons recueilli les éléments de la bouche même de Tchebichef peu de mois avant sa mort. Le grand géomètre russe, venu pour la dernière fois à Paris, avait bien voulu faire démonter entièrement et remonter sous nos yeux l'unique exemplaire existant de sa machine, dont il a fait don à notre Conservatoire des Arts et Métiers. C'est cette circonstance qui nous a permis d'analyser en détail ce qu'on peut appeler l' « anatomie » de la machine.

l'inventeur anglais J. Edmondson a permis de prolonger indéfiniment, si on le veut, une division qui ne se fait pas exactement.

Parmi les plus récentes machines dérivées de l'arithmomètre Thomas, nous mentionnerons : la machine *Unitas* dans laquelle un second totalisateur permet d'obtenir la somme générale de tous les produits formés successivement sur le premier totalisateur; la *Calculatrice Fournier* munie d'une manivelle multiplicatrice

Fig. 9.



dont chaque neuvième de tour fait effectuer un tour complet aux pignons de l'entraîneur, en sorte qu'une rotation unique, de plus ou moins d'amplitude, de cette manivelle suffit pour chaque ordre décimal du multiplicateur (par exemple, 5 neuvièmes de tour, puis 6 neuvièmes, puis 3 neuvièmes pour une multiplication par 365); enfin la machine *Madas* comportant nombre de perfectionnements de détail et notamment un dispositif limitant automatiquement les opérations soustractives à ce qu'autorisent les possibilités arithmétiques, de façon à rendre le jeu de la machine absolument

indépendant, pour l'exécution des divisions, de l'attention qu'y peut porter l'opérateur.

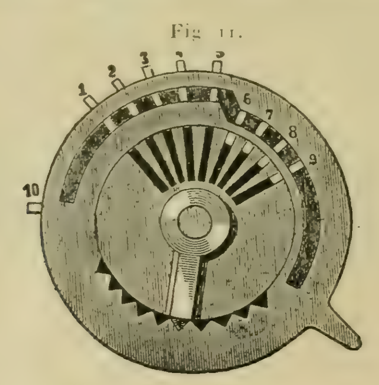
9. *Pignon à nombre variable de dents.* — Pour imprimer aux chiffreurs les rotations partielles voulues, il faut, comme on vient

Fig. 10.



de le voir, limiter le nombre des dents des pignons de l'entraîneur venant en prise avec les roues dentées commandant la rotation des axes des chiffreurs. Dans la solution précédente ce nombre de dents variait d'une tranche à l'autre du cylindre constituant le corps du pignon. Pour pouvoir réduire ce cylindre à une seule tranche assez

Fig. 11.



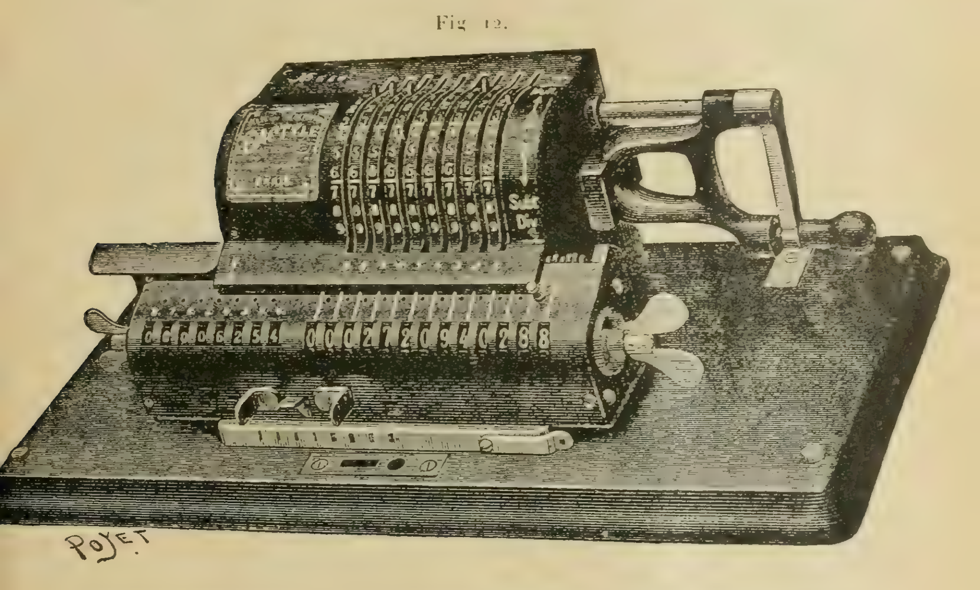
mince, il faut avoir le moyen de faire saillir sur la périphérie de celle-ci un nombre variable de dents.

L'idée d'une telle solution, qui s'était offerte dès 1709 à Poleni, semble avoir été effectivement appliquée pour la première fois, en 1841, par le D[r] Roth dans sa machine circulaire (*fig.* 9) où il l'a ingénieusement réalisée de la manière suivante : chaque pignon

de l'entraîneur est muni de dents mobiles dans des entailles rayonnantes (*fig.* 10) et portant chacune un ardillon faisant saillie sur une face latérale du pignon et qu'un ressort tend à repousser constamment vers le centre. Un excentrique, en appuyant sur ces ardillons de façon à vaincre la pression des ressorts, les éloigne du centre d'une quantité suffisante pour faire saillir les dents qui en sont solidaires.

Vers l'année 1875, l'inventeur russe Odhner a imaginé un type de

Fig. 12.



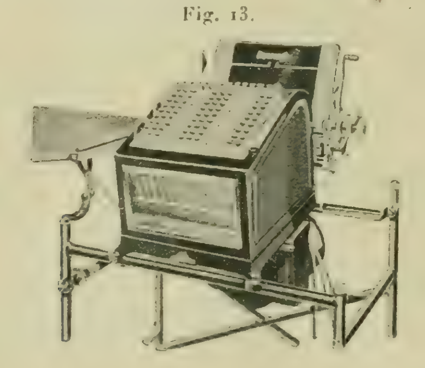
pignon à nombre variable de dents bien plus robuste; pour cela il a déterminé le déplacement des dents dans les entailles rayonnantes, non plus en soumettant les ardillons, fixés à ces dents et retenus par des ressorts, à la pression d'une came, mais en les engageant dans une rainure circulaire composée de deux parties d'inégal rayon (*fig.* 14). Une rotation de la partie extérieure du pignon, comprenant cette rainure, par rapport à la partie centrale, déterminée au moyen d'un doigt fixé sur la tranche de cette partie extérieure, suffit dès lors pour faire saillir le nombre voulu de dents. Grâce au bien moindre encombrement des pignons ainsi constitués, Odhner a pu adapter un entraîneur à un totalisateur uniaxial et a fixé ainsi un type de machine dont divers construc-

teurs ont imaginé de nouvelles variantes en y introduisant certains perfectionnements de détail; au nombre de ces variantes, nous citerons la *Dactyle*, de la maison Château (*fig.* 12), qui est la plus répandue en France.

Une machine se rattachant au genre Odhner a été pourvue d'un mécanisme qui la rend imprimante; c'est l'*Arithmotyp* Erinks dans lequel des secteurs à caractères d'imprimerie, commandés par certains secteurs dentés, amènent, sur une ligne horizontale déterminée, en face d'un rouleau de papier, les chiffres mêmes du produit inscrit sur la machine. Le rouleau s'appuie au moment voulu sur ces chiffres, avec interposition d'un ruban encreur.

10. *Autres types d'entraîneur.* — Aux deux types d'entraîneur auxquels sont consacrés les nos 8 et 9, et qui sont, peut-on dire, les

Fig. 13.



plus classiques, sont venus s'en ajouter, dans la période moderne, quelques autres aujourd'hui assez répandus, et, plus particulièrement, ceux qui, fondés sur l'emploi soit d'un secteur denté, soit d'une crémaillère, ont été introduits dans les machines à touches.

Sans entrer dans aucun détail à ce sujet — ce qui nous entraînerait à des développements trop considérables — on peut, en gros, expliquer le fonctionnement de ces entraîneurs comme suit : un bras, entraînant le secteur denté, est terminé par une butée qui, en venant s'appliquer contre une butée fixe, arrête son mouvement après qu'il a fait tourner le secteur, et, par suite, le chiffreur, du nombre de dents voulu. Il y a pour cela neuf butées fixes, correspondant aux rotations de une à neuf dents; la pression exercée sur une touche fait saillir chaque butée fixe et détermine ainsi la

limitation du déplacement du bras, correspondant à une rotation du chiffreur d'autant d'unités qu'il en est indiqué par le chiffre inscrit sur la touche.

Le cas de la crémaillère n'est, théoriquement au moins, que la limite de celui du secteur, lorsque le rayon de celui-ci devient infini.

Les machines à touches à entraîneur, telles que celles de Felt, Burroughs (*fig.* 13), Ellis. etc., sont, en outre, généralement pourvues d'un dispositif les rendant imprimantes.

La combinaison d'additionneurs imprimants à touches, avec des enclenchements se prêtant à certains contrôles, a donné naissance, entre les mains des frères Patterson, à des machines, dites *caisses enregistreuses*, capables d'assurer tous les besoins de la comptabilité des maisons de commerce.

11. *Machines multipliantes.* — Dans les machines précédentes, les multiplications ou divisions se font par additions ou soustractions répétées, chaque répétition exigeant un tour de la manivelle de l'entraîneur (sauf, comme on l'a vu, pour la calculatrice Fournier, dans laquelle chaque mouvement complet de l'entraîneur est déterminé non par un tour complet, mais par un neuvième de tour de la manivelle). Pour éviter ces répétitions, il faut faire usage de la table de Pythagore. La question se posait donc de combiner une machine qui appliquât les données de cette table comme nous le faisons nous-mêmes lorsque nous opérons la plume à la main. Chose curieuse, une telle machine a été construite pour la première fois, et avec les dispositions les plus ingénieuses, par un jeune inventeur de 18 ans. l'âge qu'avait Pascal lorsqu'il imagina son additionneur [1]. Ce jeune inventeur était Léon Bollée

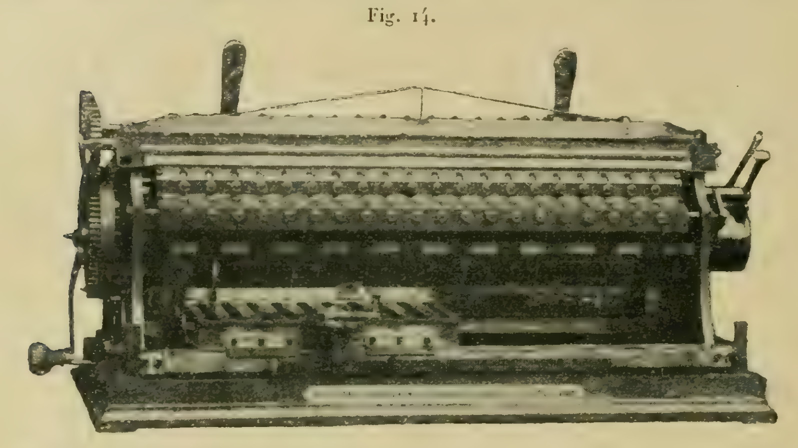
---

[1] Une obligeante communication du célèbre inventeur américain D.-E. Felt nous a appris qu'un de ses compatriotes, E.-D. Barbour, a fait breveter, dès 1872, un projet de machine procédant directement à la multiplication en appliquant la table de Pythagore. Mais, cette machine, qui ne semble, au reste, avoir jamais été construite (d'après l'enquête à laquelle M. Felt lui-même a bien voulu se livrer à notre demande), présentait des dispositions toutes différentes de celles qui se rencontrent dans la machine de Bollée. Elle était, d'ailleurs, restée profondément ignorée, l'exhumation de son brevet par M. Felt ayant produit sur tous les spécialistes qui en ont eu connaissance l'effet d'une sorte de découverte. Il est bien inutile d'ajouter que le tout jeune homme qu'était Léon Bollée, lors de son invention, n'avait pu en avoir aucune espèce d'idée.

qui a, depuis lors, pris une part si importante à la création et au développement de l'automobile. Sa machine (*fig.* 14) a été produite, pour la première fois, devant le public à l'Exposition universelle de 1889.

Dans cette machine (¹) les chiffreurs reçoivent leur mouvement de crémaillères dont les déplacements sont commandés par des tiges implantées sur des plaques où elles constituent, en quelque sorte, une représentation matérielle de la table de Pythagore, et qui, amenées dans le prolongement de ces crémaillères, leur

Fig. 14.



impriment les déplacements requis pour que les chiffreurs tournent du nombre d'unités voulu. Tout comme la table de Pythagore classique, chacune de ces plaques (*fig.* 15) comprend neuf lignes et neuf colonnes; à l'intersection de chaque ligne et de chaque colonne, le produit qui serait inscrit numériquement sur la table de Pythagore est représenté par deux tiges, implantées normalement à la plaque, dont les longueurs sont respectivement égales à autant de fois le pas des crémaillères que le marquent le chiffre des dizaines et le chiffre des unités de ce produit. Si donc, la plaque placée horizontalement est soulevée verticalement d'une quantité égale à neuf pas des crémaillères, chacune de celles-ci avance d'autant de pas qu'en contient la tige qui se trouve dans son prolongement.

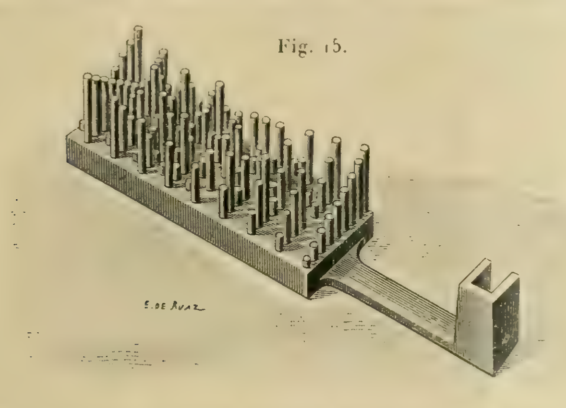
Par exemple, à l'intersection de la ligne 7 et de la colonne 8 se

(¹) Pour plus de détails, *voir* le Rapport du général Sebert, dans *B.S.E.*, p. 732.

trouvent deux tiges de longueurs 5 et 6; dès lors, les crémaillères sous lesquelles seront placées ces tiges seront soulevées l'une de cinq, l'autre de six pas, et si ces crémaillères commandent deux chiffreurs consécutifs elles feront tourner ceux-ci respectivement de cinq et de six unités.

Or, un chariot mobile (*fig.* 14) entraîne un certain nombre de ces plaques calculatrices disposées de telle sorte que, dans chacune des positions d'arrêt de ce chariot, chaque plaque occupe l'intervalle de deux chiffreurs consécutifs. On amène individuellement

Fig. 15.



la ligne voulue de chaque plaque dans le plan des crémaillères, au moyen des boutons mobiles dans les rainures chiffrées de l'entraîneur, absolument comme dans le cas de l'arithmomètre. Puis, pour amener la colonne voulue de chaque plaque sous les crémaillères, on se sert d'une manette avec laquelle il suffit de marquer sur le cadran auquel elle est adaptée le chiffre correspondant du multiplicateur. Les plaques calculatrices étant ainsi mises en place, *un seul tour* de la manivelle placée sur le côté de la machine fait passer sur le totalisateur le produit partiel du multiplicande par le chiffre correspondant du multiplicateur, formé, comme on voit, au moyen de la table de Pythagore.

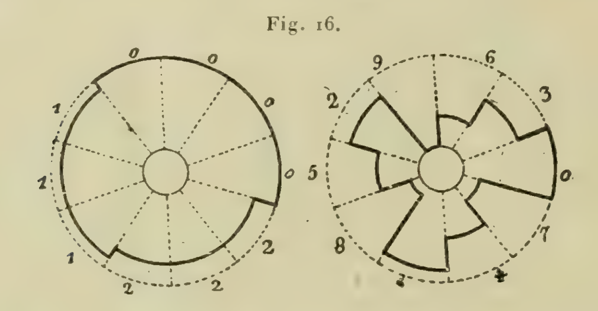
Reprenons l'exemple déjà envisagé plusieurs fois de la multiplication par 365. La machine étant à zéro et le chariot dans sa position initiale, on amène, de la main droite, la manette sur le chiffre 3, et l'on fait faire de la main gauche un tour à la manivelle, puis ayant fait achever à la manette son premier tour, on l'amène sur le chiffre 6, et l'on donne encore un tour de manivelle;

enfin, le second tour étant achevé, on arrête la manette sur le chiffre 5 et l'on donne un dernier tour de manivelle. En tout, par conséquent, un nombre de tours de manivelle égal à celui des chiffres du multiplicateur, au lieu de l'être à la somme de ces chiffres comme avec les précédentes machines. Dans l'exemple choisi, trois tours de manivelle en tout, au lieu de $3 + 6 + 5 = 14$ tours.

On voit que si la manette est fixée sur le chiffre 1 du cadran, la machine fonctionne comme un additionneur.

Le changement de sens de la marche de la machine (pour passer des opérations additives aux soustractives) qui s'obtient au moyen

Fig. 16.



d'un levier, la remise à zéro commandée par les poignées que l'on voit paraître au-dessus de la machine, ingénieusement combinées, rentrent dans la catégorie des détails mécaniques sur lesquels nous n'insistons pas ici.

Ajoutons toutefois qu'en 1893, Léon Bollée a construit un nouveau modèle de sa machine, pourvu de perfectionnements du plus haut intérêt, et notamment d'un système général d'enclenchements disposé de telle sorte, dit le général Sebert « que la machine refuse absolument de faire un calcul impossible ou faux, même si l'opérateur le cherche. Il est également impossible de faire une fausse manœuvre, l'appareil d'enrayage ne permettant de procéder que méthodiquement, tout en laissant entière latitude pour effectuer tous les calculs qui ne sont pas contraires à la théorie ». Ces enclenchements permettent de rendre tout à fait automatique l'exécution des divisions et des racines carrées.

Un inventeur d'un sérieux mérite, quoique simple amateur, M. Malassis, a très ingénieusement utilisé les tiges calculatrices de

Bollée en les implantant normalement à un noyau cylindrique pouvant être déplacé à la fois autour de son axe (suivant le chiffre du multiplicande) et dans le sens de cet axe (suivant l'ordre décimal de ce chiffre). Les tiges, en appuyant sur des crémaillères portées par un chariot mobile, font tourner les chiffreurs du nombre d'unités voulu. Pour le report des retenues, l'inventeur a imaginé un dispositif nouveau et fort ingénieux. Il n'existe malheureusement jusqu'ici de cette machine, pourtant très digne d'attention, qu'un modèle en bois construit des mains de l'inventeur.

L'idée primitive de Bollée a été reprise et mise en œuvre d'une façon nouvelle et ingénieuse, en 1892, par O. Steiger dans une machine, dite *Millionnaire*, où les plaques précédentes sont remplacées par des disques accouplés, entaillés, dans dix secteurs successifs, à des profondeurs représentant, en dixièmes du rayon, les chiffres des unités et des dizaines des divers produits d'un même nombre inférieur à 10 par tous les facteurs pris de 0 à 9. Par exemple, l'ensemble des deux disques accolés, qui ont été disjoints sur la figure 16, représente ainsi les multiples de 3. La substitution de ces disques aux plaques calculatrices a permis de simplifier le mécanisme et de réduire l'encombrement de la machine.

En ayant recours à l'intervention de l'électricité, E. Selling a pu, en 1894, construire une machine, multipliante comme les précédentes, d'un type nouveau, où des électro-aimants sont disposés de telle sorte que les interrupteurs correspondant aux chiffres du multiplicande et du multiplicateur ferment des circuits qui déterminent la formation des chiffres des produits partiels [1].

---

[1] Au cours de la rédaction de cet article, M. Augustin Seguin (descendant direct du célèbre inventeur des chaudières tubulaires, lui-même auteur d'un indicateur mécanique de vitesse aujourd'hui utilisé largement dans la pratique) est venu nous présenter un modèle d'essai d'une machine multipliante conçue d'après un principe qui nous a paru absolument nouveau et qui revient à une traduction mécanique, d'ailleurs fort ingénieuse, du procédé de calcul connu sous le nom de *multiplication ordonnée*. Ce procédé consiste à suivre la règle donnée en algèbre pour la multiplication des polynomes lorsque l'on considère les chiffres de chacun des facteurs comme les coefficients d'un développement procédant suivant les puissances de 10. Les organes mécaniques, imaginés par M. Seguin pour la réalisation de sa machine, nous ont semblé sans analogues dans les machines connues jusqu'ici. Il nous paraîtrait tout à fait intéressant que cet essai aboutît à la construction d'un modèle définitif.

C. — Machines complexes.

12. *Machines à différences.* — Nous disons qu'une machine arithmétique est complexe lorsqu'elle permet de faire autre chose qu'une simple opération arithmétique prise isolément. Au premier rang de ces machines complexes, nous citerons les *machines à différences*, c'est-à-dire les machines permettant de déterminer les valeurs successives d'un polynome pour des valeurs de la variable croissant en progression arithmétique, eu égard au fait, si le polynome est de degré n, que ses différences d'ordre n sont constantes. Comme il ne s'agit d'effectuer mécaniquement que des additions se combinant suivant un certain ordre, on conçoit *a priori* la possibilité de réaliser de telles machines.

C'est J.-H. Muller qui semble avoir, pour la première fois, en 1786, conçu l'idée d'une machine de ce genre, mais sans l'avoir construite. La même idée se présenta, de façon tout à fait indépendante, en 1812, à l'esprit du mathématicien anglais Ch. Babbage qui, à la suite d'essais poursuivis de 1823 à 1833, parvint à lui faire prendre corps dans une machine opérant sur les différences secondes.

Sans connaître le mécanisme imaginé par Babbage, le suédois Georges Scheutz dressa, à son tour, le projet d'une machine opérant cette fois sur les différences quatrièmes, qu'il soumit, en septembre 1838, à l'Académie des Sciences de Paris [1], mais qu'il ne lui fut donné de réaliser qu'en 1853, avec l'aide de son fils Édouard.

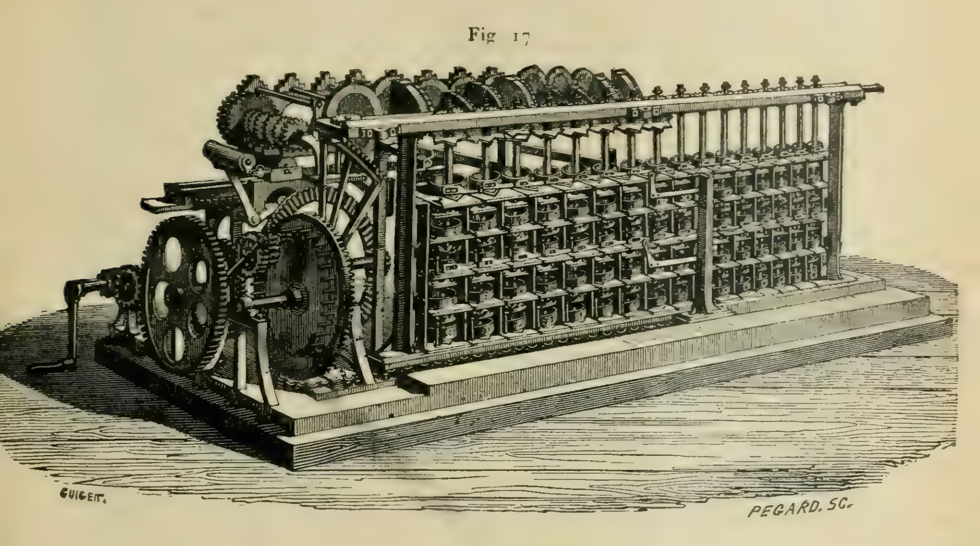
La machine (*fig.* 17) comprend cinq étages de chiffreurs correspondant, de haut en bas, aux valeurs du polynome, à leurs différences premières, secondes, troisièmes, quatrièmes. La position de chaque chiffreur commande le nombre d'unités dont l'entraîneur fait tourner le chiffreur situé immédiatement au-dessus de lui. Cet entraîneur agissant alternativement sur les étages de rang pair ou impair, en imprimant aux chiffreurs d'un même rang des

---

[1] *C. R. Acad. Sc.*, 2e semestre 1838, p. 1056. C'est d'ailleurs à l'occasion de cette machine que Babbage, dans une Note des plus curieuses, présentée à la même Académie (*C. R. Acad. Sc.*, 2e semestre 1855, p. 557), fit connaître un système rationnel de notations mécaniques permettant de réduire, à un tableau graphique, la description schématique d'un mécanisme quelconque.

rotations indiquées par les inscriptions des chiffreurs du rang placé immédiatement en dessous, on commence par inscrire aux divers étages les valeurs de u_2, Δu_1, $\Delta^2 u_1$, $\Delta^3 u_0$ et $\Delta^4 u_0$ (cette dernière différence étant constante). Un premier coup de l'entraîneur, laissant les étages de rang impair invariables, fait apparaître $\Delta^3 u_1$ et Δu_2 à la place de $\Delta^3 u_0$ et Δu_1; le second coup, agissant, au contraire, sur les étages de rang impair, remplace $\Delta^2 u_1$ et u_2 par $\Delta^2 u_2$ et u_3; et ainsi de suite.

Fig 17



Les huit premiers chiffres de l'étage supérieur, à partir de la gauche, s'impriment d'ailleurs en creux dans une lame de plomb, en vue de la stéréotypie.

Pour le calcul des tables de la plupart des fonctions usuelles, on peut, dans des intervalles convenablement limités, remplacer ces fonctions par des polynomes du quatrième degré au plus. C'est dire que la machine peut être utilisée à la fois pour calculer et stéréotyper de telles tables.

De fait, l'exemplaire de la machine qui a figuré à l'Exposition universelle de 1855 et qui est devenu ensuite la propriété de l'Observatoire d'Albany, aux États-Unis, a été ainsi utilisé pour le calcul et l'impression de tables de logarithmes, de sinus et de logarithmes-sinus.

D'autres machines effectuant les mêmes calculs que la machine Scheutz, mais au moyen de dispositifs tout différents, entraînant un bien moindre encombrement, ont été construites par le suédois Wiberg (1) et l'américain G.-B. Grant.

13. *Machines arithmétiques générales.* — Était-il possible de concevoir une machine capable d'exécuter non pas seulement une opération arithmétique isolée, mais toute une suite de telles opérations, sans aucune intervention d'un opérateur humain en cours d'exécution ? Telle est la question à laquelle Babbage n'a pas craint de s'attaquer dès 1834, et qu'il est parvenu à résoudre en combinant son *analatycal engine* où les nombres, puisés, en quelque sorte, dans une première partie de la machine, dite le *magasin*, où on les inscrit sur des chiffreurs empilés par colonnes, sont soumis, dans une seconde partie, dite le *moulin*, à la suite d'opérations voulues, exécutées mécaniquement grâce à la commande réalisée par le moyen d'un certain *ordonnateur*, variable, bien entendu, avec cette suite d'opérations, et qui, constitué à l'aide de feuilles de carton ajourées, n'est pas sans analogie avec l'organe ordonnateur des métiers de Jacquart. Babbage ayant fait fabriquer toutes les pièces qui devaient entrer dans la composition de sa machine, est malheureusement mort avant d'avoir pu en effectuer le montage. Ces pièces sont restées éparses dans une vitrine du South-Kensington Museum de Londres, où on les voit encore. Le fils de l'inventeur a réuni dans un volume spécial intitulé *Calculating Engines* et publié en 1889 à Londres (chez Spon) tous les documents laissés par Babbage relativement à sa machine (2).

Une autre solution du même problème a été obtenue par le grand mécanicien espagnol Torres Quevedo au moyen de l'électro-

---

(1) Celle-ci présentée à l'Académie des Sciences de Paris (*C. R. Acad. Sc.*, 1er semestre 1863, p. 330).

(2) Babbage n'avait rien publié lui-même touchant son invention. Le seul document imprimé s'y rapportant qui, de son vivant, ait vu le jour, est l'article du capitaine du Génie sarde (depuis lors général) Menabrea, publié en 1842, en français, dans la *Bibliothèque universelle de Genève.* Une traduction en anglais de cet article, augmentée de Notes mathématiques d'un réel intérêt, a été donnée, en 1843, dans les *Scientific Memoirs*, par Lady Ada Lovelace, la fille unique de Lord Byron (élève, pour les mathématiques, de Mary Sommerville), qui n'avait d'ailleurs signé ce travail que de ses initiales.

mécanique. On sait à quel point de perfection M. Torres a porté la science de l'automatique, notamment dans cet extraordinaire automate joueur d'échecs qui, dans une fin de partie supposée, disposant de la tour et du roi blancs, fait échec et mat à son partenaire n'ayant plus en main que le roi noir, mais le faisant mouvoir, au reste, suivant le mode permis par la règle du jeu, avec une entière liberté (1).

Les profondes études du savant ingénieur espagnol sur ce difficile sujet l'ont amené à formuler ce principe entièrement général qu'*il est toujours possible de construire un automate dont tous les actes dépendront de certaines circonstances plus ou moins nombreuses et qui obéisse à des règles qu'on peut lui imposer arbitrairement au moment de sa construction.*

M. Torres s'est dès lors proposé de construire un *calculateur purement automatique* susceptible d'effectuer telle succession que l'on veut d'opérations arithmétiques portant sur tels nombres que l'on se donne, sans aucune intervention humaine à partir du moment où l'indication de l'opération à effectuer aura été inscrite sur une simple machine à écrire munie des signes représentatifs des quatre opérations fondamentales ainsi que de celui de l'égalité à la suite duquel la machine, ayant fonctionné automatiquement, viendra, en se servant à son tour de la machine à écrire, imprimer le résultat. Les termes d'un tel problème sont faits pour confondre l'imagination. M. Torres en a pourtant donné une solution complète, non exempte, il est vrai, d'une certaine complication, en raison de la multiplicité des connexions électriques qu'elle suppose, et devant, par conséquent, de l'aveu même de l'auteur, être regardée plutôt comme une curiosité scientifique que comme une acquisition de caractère industriel, en tout cas, d'un puissant intérêt théorique.

M. Torres n'a jusqu'ici construit, sous le nom d'*arithmomètre électromécanique*, qu'un modèle (*fig.* 18) destiné à l'exécution d'une seule opération arithmétique, d'ailleurs quelconque, sur la commande de la machine à écrire (2). A la fin de chaque opération, la

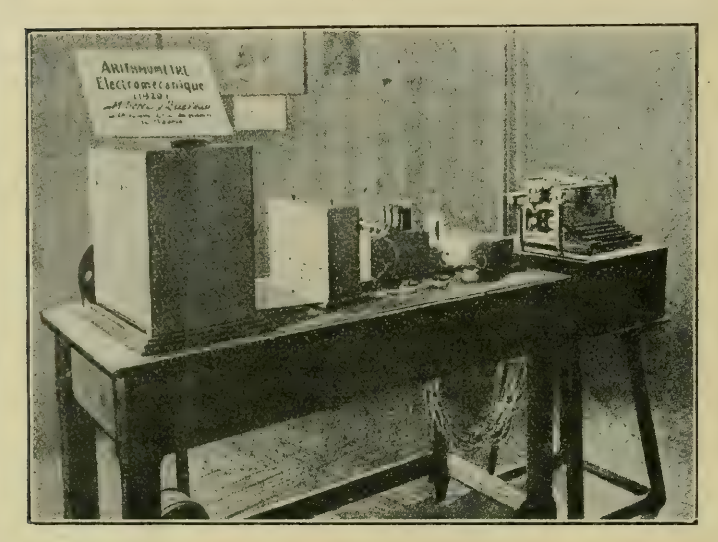
(1) On trouvera une description de cet automate dans le numéro de *La Nature* du 13 juin 1914, p. 56.

(2) On trouvera une description détaillée de l'arithmomètre électromécanique, due à M. Torres lui-même, dans *B.S.E.*, p. 588.

machine est prête à en faire une autre, commandée également par la machine à écrire; elle pourrait être munie d'un dispositif propre à effectuer automatiquement les commandes successives, relatives à un certain enchaînement d'opérations, moyennant une certaine inscription initiale. Cela entraînerait seulement une plus grande complication dans la construction de la machine, mais ne nécessiterait aucune invention nouvelle.

On peut donc dire que le problème de Babbage se trouve, grâce

Fig. 18.

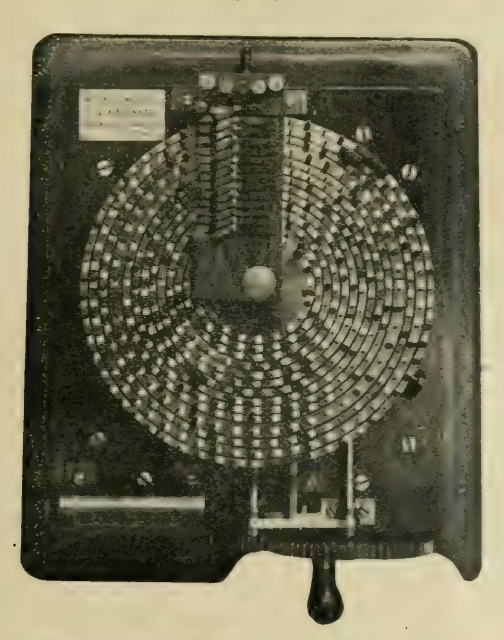


à M. Torres, pleinement résolu par l'électromécanique. Mais, il y a plus : le grand inventeur espagnol a dressé le projet d'une machine atteignant le même but par un pur agencement mécanique, entièrement différent de celui de Babbage. Souhaitons de voir un jour effectivement fonctionner ce merveilleux mécanisme; mais, étant donnée la confiance que nous pouvons faire à son auteur, tenons-le dès maintenant pour une solution définitivement acquise du problème de la machine arithmétique générale.

14. *Machines arithmologiques.* — Certaines questions d'arithmologie, comme la résolution en nombres entiers des équations indéterminées à deux variables, ramenée par M. André Gérardin à celle de certaines congruences, la vérification du fait qu'un très

grand nombre est ou non premier, etc., exigent de laborieux essais numériques, faits pour rebuter les calculateurs les plus intrépides. Opérer mécaniquement de tels essais, à la fois avec une extrême rapidité et une parfaite sûreté tel est le but des machines arithmologiques dont différents types ont été proposés par M. Gérardin lui-même, qui semble avoir été le premier initiateur en ce genre

Fig. 19.



de recherches, M. Kraïtchik, M. P. Carissan et le commandant E. Carissan, frère du précédent.

La machine à congruences du commandant Carissan (*fig.* 19), produite pour la première fois par son auteur à l'Exposition du centenaire de l'arithmomètre Thomas (¹), se compose de couronnes métalliques concentriques munies de broches d'acier équidistantes dont les nombres respectifs sont égaux aux membres premiers successifs jusqu'à une certaine limite (59 sur le modèle construit). Un pignon entraîneur fait tourner ces couronnes toutes à la fois de telle sorte que l'alignement radial des broches se renouvelle

(¹) Et décrite par lui dans *B.S.E.*, p. 600.

au moment où elles passent sur un certain rayon fixe dit *ligne d'investigation.* Les possibilités relatives à un certain module étant représentées par de petites coiffes de fibre, enfilées sur les broches voulues, lorsqu'un alignement sur la ligne d'investigation ne comporte que des coiffes, il y a solution. Or un tel alignement est décelé par la machine grâce à l'ingénieux dispositif que voici : les coiffes entraînées par les couronnes soulèvent, à leur pressage sur la ligne d'investigation, de petits marteaux de cuivre, annulant une coupure de circuit électrique. L'alignement des coiffes sur cette ligne, en annulant toutes les coupures correspondantes, laisse passer le courant qui, dans un récepteur téléphonique placé à l'oreille de l'opérateur, produit un *toc* caractéristique [1].

Pour donner une idée de la rapidité avec laquelle on peut opérer avec cette machine, nous citerons certains exemples de son utilisation pour lesquels le temps a été soigneusement noté :

1° Résolution en nombres entiers (pour $x < 10\,000$) de $x^2 - 13y^2 = 1$. Réponse : $x = 649$, $y = 180$, en 5 minutes;

2° Mettre 708 158 977 sous la forme de deux carrés. Réponse : $19\,224^2 + 18\,401^2$, en 10 minutes;

3° Reconnaître si le nombre $2^{31} - 1$ ou 2 147 483 647 est premier. Réponse affirmative, en 15 minutes.

Aux yeux de mathématiciens, ce n'est certes pas là une des moindres curiosités du calcul mécanique.

II. — Machines algébriques.

15. *Théorie générale. Arithmophores logarithmiques.* — Pour terminer cette rapide revue des machines destinées au calcul, nous dirons quelques mots des machines algébriques définies au n° 2, qui constituent la création propre de M. Torres Quevedo, et dont il a donné une théorie entièrement générale dans le grand Mémoire par lui présenté en 1901, à notre Académie des Sciences (dont il est maintenant correspondant dans la Section de Mécanique) et

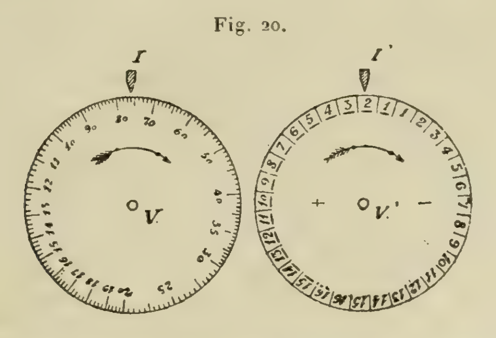
[1] M. Carpentier a suggéré, à cet égard, une modification rendant inutile toute intervention attentive de l'opérateur; elle consisterait à commander le mouvement de la machine par un petit moteur électrique qui s'arrêterait automatiquement au passage d'une solution sur la ligne d'investigation.

inséré dans le Recueil de cette Académie, dit des *Savants étrangers.*

Dans ce Mémoire, vraiment fondamental en la matière, se trouve démontrée rigoureusement la possibilité de traduire mécaniquement, par une mise en œuvre rationnelle de moyens exactement définis, une relation analytique, ou même un système de relations analytiques simultanées, *quelconque.*

Indépendamment des véritables trésors d'ingéniosité que M. Torres a dépensés dans la conception de ses mécanismes, il convient de signaler à part l'idée très originale qui lui a permis de donner aux graduations correspondant aux diverses variables un champ pratiquement indéfini. Cette idée consiste à représenter

Fig. 20.



les valeurs de chaque variable par la rotation, autour de son axe, d'un disque gradué logarithmiquement de 10 à 100, tournant, par conséquent, d'angles proportionnels aux logarithmes des nombres inscrits sur le disque. En raison de la périodicité de la partie décimale du logarithme vulgaire, dans chaque intervalle compris, entre deux puissances successives de 10, il suffit, pour définir l'ordre de grandeur du nombre correspondant, d'adjoindre à ce premier disque un second qui soit pour lui un compteur de tours, jouant, par suite, ici le rôle de la caractéristique du logarithme. L'ensemble de ces deux disques, disjoints sur la figure 20, mais, en réalité, accolés, et dont les graduations se lisent respectivement en face des index I et I', a reçu de son inventeur le nom d'*arithmophore logarithmique.* La graduation du disque compteur s'étendant de — 16 à 16, un tel arithmophore permet de marquer tous les nombres de 10^{-16} à 10^{16}, ce qui peut être regardé pratiquement comme un champ de variation indéfini. Sur la figure 20, les index se trouvant respectivement en face des cotes 78,5 et $+2$, le

nombre marqué est 78,5. Si l'index I′ se trouvait en face de — 2, il faudrait *lire* 0,785 ; en face de 4, ce serait 7850, etc.

Il est facile de lier mécaniquement deux arithmophores logarithmiques à un troisième de façon à faire effectuer par ces organes une multiplication, c'est-à-dire à faire marquer par le dernier le produit des nombres marqués par les deux premiers. M. Torres a eu pour cela recours au train spécial d'engrenages connu sous le nom de *différentiel* depuis son utilisation dans l'automobile. Deux roues identiques R′ et R″, dont les axes se prolongent suivant une droite X, engrènent à la fois avec une roue d'angle R dont l'axe A est fixé à un manchon tournant autour du même axe géométrique X que R′ et R″. Dans ces conditions, si les roues R′, R″ et l'axe A tournent simultanément des angles ω', ω'' et ω autour de X, on a $\omega' + \omega'' = 2\omega$. Si donc R′, R″ et A sont liés à des arithmophores, les deux premiers identiques, le troisième gradué avec une unité angulaire moitié de celle des deux premiers (c'est-à-dire gradué de 10 à 1000, alors que les premiers le sont de 10 à 100), on a entre les nombres N′, N″ et N lus sur les trois arithmophores la relation

$$\log N = \log N' + \log N'' \qquad \text{ou} \qquad N = N'N''.$$

L'addition est naturellement beaucoup moins aisée à réaliser au moyen des arithmophores, leur graduation étant logarithmique. Voici la solution remarquablement ingénieuse que M. Torres a donnée de ce problème, solution fondée sur une véritable interprétation mécanique du principe des logarithmes d'addition de Gauss :

Partant de la relation

$$(1) \qquad \log(u + v) = \log v + \log\left(\frac{u}{v} + 1\right),$$

on voit que le problème sera ramené au précédent si l'on peut former mécaniquement $\log\left(\frac{u}{v}+1\right)$ au moyen de $\log\frac{u}{v}$, ce dernier se déduisant aisément de $\log u$ et $\log v$, grâce à l'emploi du différentiel dont il vient d'être parlé. Or, si nous posons

$$\log\frac{u}{v} = X, \qquad \log\left(\frac{u}{v}+1\right) = Y,$$

nous avons

$$(2) \qquad Y = \log(10^X - 1).$$

Tout revient dès lors à lier mécaniquement deux arithmophores sur lesquels se lisent X et Y liés par (2). Si l'on effectue la représentation de cette équation en prenant X pour abscisse et Y pour ordonnée, on obtient une courbe dont l'allure générale rappelle celle d'une hyperbole ayant pour asymptotes la partie négative de OX et la bissectrice de l'angle XOY. Pratiquement, cette courbe se rapproche assez vite de ses asymptotes pour qu'à partir d'abscisses $-\alpha$ et α, qui peuvent se déterminer sur le graphique, on puisse la confondre avec elles, au degré d'approximation que l'on désire atteindre. On n'a, dès lors, à établir entre les déplacements angulaires X et Y un rapport variable qu'entre les limites $-\alpha$ et α de X. Pour aboutir à une solution pratique, cette remarque doit encore être complétée par la suivante, d'importance capitale, qui met en lumière un genre de difficulté dont le pur mathématicien n'a pas à se soucier et qui, pour le constructeur, pourrait faire absolument obstacle à la réalisation mécanique recherchée :

Le rapport des vitesses angulaires des arithmophores de X et Y, donné par

$$\frac{dY}{dX} = \frac{10^X}{10^X + 1},$$

et qui tend vers o, lorsque X décroît indéfiniment, doit, pratiquement, prendre et conserver cette valeur o à partir de $X = -\alpha$. On ne conçoit pas la possibilité d'un mécanisme réalisant cette condition. Mais, il suffit, pour sortir de cette impasse, d'écrire la relation (2) sous la forme

$$Y = \log(10^X + 1) + mX - mX,$$

dans laquelle on dispose de la constante m, et de poser

$$(3) \qquad Y' = \log(10^X + 1) + mX.$$

$$(4) \qquad X' = -mX,$$

parce qu'alors le rapport des vitesses angulaires correspondant à la relation (3), donné par

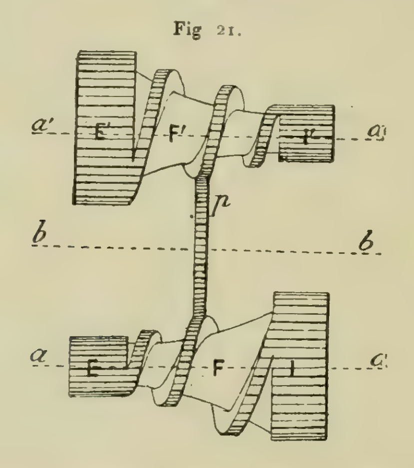
$$(5) \qquad \frac{dY'}{dX} = \frac{10^X}{10^X + 1} + m,$$

reste fini et égal à m lorsque X décroît indéfiniment, donc, pratiquement, doit conserver la valeur m à partir de $X = -\alpha$.

Dans ces conditions, la liaison mécanique voulue est réalisée par M. Torres au moyen d'organes par lui appelés *fusées sans fin*, F et F′ (*fig.* 21), dont le profil dépend de la relation (3), et qui partent des dents d'engrenage disposées le long d'une sorte d'hélice, et terminées par des roues dentées ordinaires, E et I, d'une part, E′ et I′, de l'autre; ces roues dentées sont mises en connexion par l'intermédiaire d'un pignon p, de telle sorte que le rapport de leurs vitesses angulaires passe de la valeur m, lorsque p est en prise avec E et E′, à la valeur $m+1$, lorsque p est en prise avec I et I′, en variant, dans l'intervalle, suivant la relation (5).

Quant à la transformation de X en X′, suivant (4), elle n'offre aucune difficulté. A l'aide d'un différentiel, on forme ensuite Y au

Fig 21.



moyen de X′ et Y′. puisque l'on a simplement $Y = X' + Y'$. Nous allons, pour terminer, faire voir comment M. Torres a su combiner de tels organes en vue d'une solution entièrement générale du problème consistant à obtenir mécaniquement les racines d'une équation algébrique quelconque.

16. *Machines à résoudre les équations.* — Toute équation algébrique à coefficients réels peut, par un groupement convenable de ses termes, s'écrire sous la forme

$$(1) \qquad A_1 x^{m_1} + A_2 x^{m_2} + A_3 x^{m_3} + \ldots = B_1 x^{n_1} + B_2 x^{n_2} + B_3 x^{n_3} + \ldots,$$

dans laquelle chaque membre ne comprend que des termes *positifs*.

Si nous posons, d'une manière générale,

$$x^{m_i} = X_i, \qquad x^{n_i} = Y_i, \tag{2}$$

et si, à chacune des variables x, X_1, X_2, ..., Y_1, Y_2, ..., nous faisons correspondre un arithmophore logarithmique, nous pouvons lier individuellement chaque arithmophore de X_i ou de Y_i à celui de x, de façon à réaliser les relations (2) puisqu'il ne s'agit là que d'établir des rapports constants m_i ou n_i de vitesses angulaires entre ces arithmophores. Cela fait, on formera, sur d'autres arithmophores, comme il a été dit plus haut, les produits $A_i X_i$ et $B_i Y_i$, puis, au moyen de fusées sans fin, telles que celles qui ont été ci-dessus décrites, on pourra, de proche en proche, effectuer les sommations $A_1 X_1 + A_2 X_2 + \ldots$ et $B_1 Y_1 + B_2 Y_2 + \ldots$ sur deux autres arithmophores A et B. Dans ces conditions, si l'on fait tourner l'arithmophore de x, on lit, à chaque instant, sur les arithmophores A et B, les valeurs de $\Sigma A_i X_i$ et de $\Sigma B_i Y_i$, et, *lorsque ces lectures deviennent égales, la valeur de x correspondante est une racine de l'équation donnée.*

Tel est le principe de la machine à résoudre les équations algébriques de Torres, dans le cas où il ne s'agit d'obtenir que les racines réelles d'équations à coefficients réels [1]. Le premier modèle, d'une machine de ce type, construit par l'inventeur, s'appliquait aux équations de l'une des deux formes

$$x^9 + A x^8 = B \qquad \text{et} \qquad x^9 + A x^7 = B.$$

Il ne s'agissait là que d'un simple modèle de démonstration, présenté à l'Académie des Sciences de Paris, le 29 juillet 1895. Depuis lors, M. Torres a sensiblement modifié et amélioré les dispositions de sa machine.

Il a donné de même le moyen de résoudre mécaniquement les équations à coefficients imaginaires telles que

$$\Sigma A_m x^m = 0, \tag{3}$$

où

$$A_m = a_m(\cos\alpha_m + i\sin\alpha_m),$$
$$x = \rho(\cos\omega + i\sin\omega),$$

---

[1] On n'obtient évidemment ainsi que les racines positives. Il suffit de traiter de même la transformée en $-x$ pour obtenir les valeurs absolues des racines négatives.

qui, par application de la formule de Moivre, se scinde en

$$(4)\qquad \begin{cases} \Sigma\, a_m \rho^m \sin(\alpha_m + m\omega) = 0, \\ \Sigma\, a_m \rho^m \cos(\alpha_m + m\omega) = 0. \end{cases}$$

Les modules ρ et a_m peuvent être représentés par des arithmophores logarithmiques, les arguments ω et α_m par des disques pourvus d'une graduation angulaire ordinaire et qui peuvent être dits des *arithmophores angulaires.*

L'opération consistant à former, au moyen de tels arithmophores, les sommes $\alpha_m + m\omega = \theta_m$ n'offre aucune difficulté. La construction, par des arithmophores, de $\log a_m \rho^m \sin\theta_m$ et de $\log a_m \rho^m \cos\theta_m$ se heurte à la difficulté que $\sin\theta_m$ et $\cos\theta_m$ sont susceptibles de passer par des valeurs négatives; mais on lève cette difficulté par un artifice analogue à celui mis ci-dessus en œuvre, en remplaçant ces deux fonctions par

$$c + \sin\theta_m - c \quad \text{et} \quad c + \cos\theta_m - c,$$

c étant une constante quelconque *supérieure à* 1. Les équations (4) prennent alors la forme

$$(4\ bis)\qquad \begin{cases} \Sigma\, a_m \rho^m (c + \sin\theta_m) = c\,\Sigma\, a_m \rho^m, \\ \Sigma\, a_m \rho^m (c + \cos\theta_m) = c\,\Sigma\, a_m \rho^m. \end{cases}$$

M. Torres a donné le moyen de construire mécaniquement (par une ingénieuse combinaison de came et d'excentrique)

$$\log a_m \rho^m (c + \sin\theta_m) \quad \text{et} \quad \log a_m \rho^m (c + \cos\theta_m).$$

L'emploi de fusées sans fin permettra d'en déduire les logarithmes des sommes figurant aux premiers membres des équations (4 *bis*), à chacun desquels correspondra un arithmophore spécial. On formera facilement sur un troisième arithmophore la valeur du second membre commun à ces équations. Il suffira de lier ensemble ces trois arithmophores de façon à rendre leurs déplacements angulaires constamment égaux pour qu'à chaque instant les arithmophores des variables ρ et ω donnent, l'un, le module, l'autre, l'argument d'une des racines de l'équation dont les coefficients ont pour modules et arguments les valeurs marquées par les arithmophores correspondants.

Le cas des équations à coefficients réels se ramène immédiate-

ment au précédent lorsqu'on y suppose les arguments de ces coefficients tous égaux à o (pour les coefficients positifs) ou π (pour les négatifs).

Dans le cas du second degré, le dispositif de la machine peut être sensiblement simplifié. Le modèle effectivement construit pour ce cas par M. Torres offre le grand intérêt de concréter, en quelque sorte, le processus suivant lequel se permutent les valeurs d'une fonction à détermination multiple autour de ses points critiques. C'est là une application particulière de l'idée très curieuse de M. Torres, qu'il a développée dans une Note présentée à la Société mathématique de France [1], consistant à illustrer certains faits du domaine de l'analyse, pour lesquels une figuration géométrique ne suffirait pas, au moyen de modèles cinématiques.

La recherche des racines imaginaires d'une équation algébrique à coefficients imaginaires revenant, comme on vient de le voir, à la résolution d'un système de deux équations à deux inconnues (ρ et ω), on conçoit qu'une extension naturelle des principes qui viennent d'être esquissés conduise au moyen de résoudre mécaniquement des systèmes d'équations à un nombre quelconque d'inconnues. On conçoit aussi que l'emploi de fusées analogues à celles qui ont permis à M. Torres de représenter mécaniquement les logarithmes d'addition rende possible, moyennant l'adoption d'autres profils donnés à ces fusées, la représentation mécanique de toute autre espèce de fonction, et, par suite, la résolution d'équations non plus seulement algébriques, mais transcendantes, comme, par exemple, l'équation de Kepler. Nous nous bornerons à ces quelques indications pour faire entrevoir toute la fécondité des principes dus, en ce domaine, à la prodigieuse imagination de M. Torres.

M. d'Ocagne.

TABLE DES MATIÈRES DE L'ARTICLE PRÉCÉDENT.

---

[1] *Bull. de la Soc. math. de France*, t. XXIX, 1901, p. 167.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BRAGG (W.-H.) et BRAGG (W.-L.). — RAYONS X ET STRUCTURE CRISTALLINE, traduit sur la troisième édition anglaise par Mme M.-J. RIVIÈRE. In-16°, 209 pages. Gauthier-Villars, 1921.

L'étude de la diffraction des rayons X par les réseaux cristallins, née il y a dix ans à peine sous l'impulsion de Laue, constitue déjà un très important Chapitre de la Physique. Elle a eu des conséquences d'intérêt primordial pour les physiciens, en levant définitivement les doutes relatifs à la nature périodique des rayons X et en fournissant une méthode précieuse pour leur analyse et leur fractionnement; mais elle n'est pas moins riche d'enseignements pour le cristallographe et le chimiste, et même pour le mathématicien, grâce à la façon très objective dont elle fait apparaître les symétries des réseaux.

M. W.-H. Bragg, le physicien bien connu, professeur à l'Université de Londres, a écrit en collaboration avec son fils W.-L. Bragg, un petit Livre qui constitue une introduction très vivante à l'étude de ces questions déjà si étendues et si complexes. Publié en 1915, cet Ouvrage a eu, en langue anglaise, le succès qu'il mérite: c'est sur la troisième édition qu'a été faite par Mme Rivière, la traduction que présente la librairie Gauthier-Villars.

Les deux premiers Chapitres rappellent quelques préliminaires indispensables, et en particulier la notion de « réflexion » des rayons X sur une famille de plans réticulaires, qui permet de prévoir très simplement les résultats beaucoup plus difficilement atteints dans la théorie générale de la diffraction par les réseaux à trois dimensions. Après avoir décrit le dispositif expérimental utilisé par eux comme spectromètre à rayons X, les auteurs rappellent ensuite, dans les Chapitres IV et V les notions fondamentales, relatives aux propriétés des rayons X et à la structure cristalline, et indiquent dans le Chapitre VI les caractères essentiels des spectres de rayons X.

Les trois Chapitres suivants sont consacrés à l'étude d'un certain nombre de cristaux, dont la structure peut être complètement analysée par l'étude des spectres de rayons X. La discussion précise des résultats observés avec les chlorures de K et de Na, le sulfure de zinc, le diamant et le spath fluor, les classe dans les divers sous-groupes de symétries qu'admet le système cubique, compte tenu des positions relatives de deux réseaux cubiques simples, imbriqués, contenant des atomes de l'une ou de l'autre espèce. La conclusion du Chapitre VII, c'est qu'on peut, une fois déterminée la longueur d'onde d'une certaine raie de rayons X, déterminer les dimensions de la maille fondamentale d'un réseau cristallin quelconque, et du même coup sa masse, d'où le nombre de molécules dont elle est constituée; l'étude des spectres relatifs aux différentes faces permet ensuite de déterminer l'arrangement de ces molécules dans l'élément fondamental. Des cas un peu plus compliqués sont ensuite envisagés, en particulier celui d'une série de plans réticulaires parallèles entre eux, mais à espacements inégaux alternés, sur lesquels on peut obtenir des indications assez nettes par la comparaison des intensités des spectres des divers ordres. L'examen des relations entre la symétrie cristalline et l'arrangement des atomes fait l'objet du Chapitre IX. Toute cette partie présente, même au seul point de vue géométrique, un très grand intérêt.

La plupart des cristaux étudiés ont une structure trop complexe pour qu'on ait pu, au moins jusqu'ici, la préciser complètement par l'étude spectrographique. Le Chapitre X donne des résultats intéressants relatifs à de tels cristaux.

Le Chapitre XI esquisse la discussion très complexe des divers facteurs qui influent sur l'intensité des faisceaux de rayons X réfléchis par un cristal; enfin le Chapitre XII termine l'Ouvrage par une étude des radiogrammes de Laue dus à la réfraction, par un cristal, non plus d'une radiation quasi monochromatique comme celles qui constituent les raies caractéristiques d'anticathodes de métaux lourds, mais de la radiation générale à longueurs d'onde continues qui constitue la plus grande partie du rayonnement émis par une anticathode de platine.

JEAN VILLEY.

THIRY (RENÉ), Maître de Conférences à la Faculté des Sciences de Strasbourg. — SUR LES SOLUTIONS MULTIPLES DES PROBLÈMES D'HYDRODYNAMIQUE RELATIFS AUX MOUVEMENTS GLISSANTS. Thèse présentée devant la Faculté des Sciences de Strasbourg pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences mathématiques. Paris, Gauthier-Villars, éditeur; un vol., 111 pages.

Le travail présenté par M. René Thiry devant la Faculté des Sciences de Strasbourg inaugure d'une façon brillante la série des Mémoires mathématiques qu'elle a suscités et dont la jeune et nouvelle Université aura le droit d'être fière.

Le sujet de ce travail est l'étude approfondie, dans des cas précis, de certaines indéterminations qui se présentent dans plusieurs problèmes d'Hydrodynamique fondamentaux. Les questions, à l'ordre du jour, qui intéressent la résistance qu'un solide en mouvement, immergé dans un fluide, éprouve à son avancement du fait de ce fluide même, sont de celles dont la solution théorique importe le plus. En supposant le fluide parfait incompressible, on sait déjà (*cf.* par exemple, H. VILLAT, *Aperçus théoriques sur la résistance des fluides*, 1 vol., collection Scientia, Gauthier-Villars, Paris, 1921), que l'existence de surfaces de discontinuité constitue une nécessité, en accord du reste avec les expériences les plus courantes. C'est donc en creusant toutes les conséquences de cette hypothèse des mouvements glissants, qu'il faut chercher à approfondir notre connaissance théorique des fluides. De nombreux travaux récents, à la suite des recherches de MM. T. Levi-Civita, M. Brillouin, U. Cisotti, H. Villat, ont permis d'étudier un grand nombre de cas, et d'élucider beaucoup de difficultés concernant ces problèmes. Le travail de M. R. Thiry se rattache à de récents Mémoires de M. H. Villat.

Parmi les difficultés les plus imprévues qui aient été rencontrées, la dernière en date et la plus troublante fut signalée par M. H. Villat [*Sur la détermination des problèmes d'Hydrodynamique relatifs à la résistance des fluides* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 1914, p. 455]. M. H. Villat prouve, par un exemple tangible où les calculs sont poussés jusqu'au bout, que pour un solide déterminé dans un fluide donné, on peut trouver au moins deux solutions absolument distinctes, satisfaisant à toutes les équations hydrodynamiques, et toutes deux également acceptables du point de vue physique.

Dans son travail, M. R. Thiry confirme le fait, que les deux cas traités par M. H. Villat comprennent entre eux une chaîne continue de solutions également valables pour le même corps solide, dans les mêmes conditions données pour les vitesses et les pressions aux grandes distances.

Des vues ingénieuses permettent d'expliquer en quelque sorte physiquement cette série de solutions, par l'introduction de petits obstacles fictifs, segments de plans ajoutés en quelque endroit du solide donné, lesquels segments de plans sont supposés ensuite tendre vers zéro : les perturbations apportées au mouvement primitif par la présence de ces obstacles supplémentaires ne tendent pas toujours à disparaître en même temps que les susdites parois supplémentaires. D'où une première cause d'indétermination.

Partant de là, diverses considérations amènent M. R. Thiry à étudier d'une façon complète le mouvement d'un fluide parfait contenant deux solides plans, tous deux normaux à la direction générale du courant à l'infini ; ceci afin d'approfondir plus spécialement le cas où l'un des deux plans a des dimensions très petites par rapport à l'autre. Trois cas se trouvent possibles, en excluant le cas dénué d'intérêt où l'un des deux plans se trouve noyé dans le sillage de l'autre :

a. Les sillages sont illimités à l'arrière de chaque plan;

b. Les lignes de jet de l'un des deux plans viennent se raccorder de chaque côté avec le second plan;

c. Le sillage de l'un des deux plans se ferme et l'autre est illimité.

(Un quatrième cas, où seul un des bords du sillage du premier plan viendrait se raccorder avec le second plan, doit être écarté *a priori*, en vertu d'un théorème antérieur de M. M. Brillouin.)

Contrairement à ce qu'on aurait pu prévoir, les configurations (*a*) et (*b*) sont exceptionnelles, elles ne peuvent se présenter que pour des valeurs particulières des données. Le cas (*c*) se révèle au contraire comme le cas le plus général : la nécessité du sillage fermé est une circonstance inattendue, et qu'il est tout à fait important d'avoir mise en évidence.

La mise en œuvre des cas (*a*) et (*b*) se fait par l'application opportune des principes déjà connus de la théorie. M. R. Thiry

s'y montre fort adroit dans le développement des calculs qui s'y rapportent.

Le cas (*c*) comportait des difficultés toutes spéciales et dont l'auteur s'est tiré d'une façon extrêmement originale. Il commence par obtenir, pour un domaine doublement connexe limité par des polygones, des formules susceptibles de représenter conformément un tel domaine sur une bande horizontale formée d'une infinité de rectangles identiques mis bout à bout et considérés comme non distincts. Des considérations d'*Analisys Situs* permettent ensuite de préciser le nombre des points d'inflexion qui peuvent se présenter dans les sillages, et de connaître également le nombre des points de ramification de la surface de Riemann qui sert à déterminer le problème dans le plan du logarithme de la vitesse.

Il faut signaler l'introduction de cette surface de Riemann et l'emploi très habile qu'en fait M. R. Thiry. Partant de là, le problème hydrodynamique peut être développé : on constate que sa résolution dépend de celle d'un système de 15 équations à 15 inconnues. Primitivement une seizième équation semblait devoir intervenir, mais des considérations à la fois très opportunes et très justes permettent d'en faire abstraction : cela provient de ce que la constante cyclique autour du sillage fermé n'est pas nécessairement nulle; or, si cette constante est différente de zéro, il se trouve, comme le fait voir l'auteur, que cela ne change rien à la mise en équations du problème, à part la suppression de l'équation en surnombre. Il reste à faire voir que les 15 équations restantes sont en effet résolubles, les inconnues satisfaisant à toutes les conditions de réalité et de limitation voulues. Ce sujet difficile trouvera place dans une prochaine publication de l'auteur; il exige de trops longs développements pour avoir pu figurer dans ce Mémoire.

Spécialement des cas (*a*) et (*c*) étudiés ci-dessus, on peut déduire aisément de nouvelles solutions multiples de problèmes types de l'espèce qui se présente couramment en Hydrodynamique.

Tout ceci nous apporte de nouvelles lumières et très précises, sur les indéterminations dont l'existence avait été signalée récemment. Et la façon élégante dont M. R. Thiry a pu surmonter certaines difficultés dont certaines étaient fort malaisées à vaincre, ou même peu commodes à poser correctement, permet d'affirmer

que l'auteur fera honneur aux Mathématiques françaises. En outre, ce qui ne gâte rien, le travail est rédigé de la façon la plus concise et la plus claire. La Rédaction.

CHARBONNIER (P.), ingénieur général. — Traité de Balistique extérieure. Un vol in-8° de IX-637 pages. Doin et Gauthier-Villars, Paris, 1921.

«...Sire, c'est dans le temps de la paix, à bien parler, que l'on doit étudier le métier de la guerre et il ne faut pas attendre à en acquérir la connaissance qu'on soit obligé de la mettre en pratique. » C'est par ces lignes, empruntées à la dédicace du traité de Balistique, publié en 1669 par Blondel, maître de camp aux armées du Roi, que s'ouvre le traité de Balistique extérieure de M. l'ingénieur général Charbonnier. Tous ceux qui s'intéressent à l'artillerie et qui, par conséquent, connaissent les travaux que l'auteur lui a consacrés depuis de longues années et qui l'ont classé parmi les maîtres de la Balistique moderne, se réjouiront de l'apparition de ce Tome I d'un Ouvrage considérable qui comprendra six volumes. Cet Ouvrage embrasse tout le développement théorique et pratique de la Balistique extérieure. Le manuscrit en a été déposé, dès janvier 1918, à l'Institut, et l'Académie des Sciences a décerné en 1919 le prix Poncelet à son auteur.

C'est l'expérience d'une vie consacrée tout entière à la science du tir, le fruit de réflexions toujours orientées vers le perfectionnement théorique ou pratique de cette science qui sont ainsi mis au jour. Déjà, M. Charbonnier a publié en 1904, chez Béranger, un Volume sur la Balistique extérieure et, en 1907, chez Doin, un Traité de Balistique extérieure en deux Volumes. Il s'agit maintenant, moins d'un Livre destiné à des spécialistes, que d'une œuvre considérable, vaste synthèse où l'auteur ne négligera aucun problème, si simple ou si réduit soit-il, et où il conduira le lecteur jusqu'au terme de l'évolution profonde que la Balistique a subie, durant la dernière guerre, sous l'empire de la nécessité, grâce à la collaboration de praticiens et de savants qui s'ignoraient d'abord et qui ont travaillé, chacun avec les tendances propres de son esprit, à l'amélioration de la théorie et des applications.

Rien de ce qui se lance ne saurait être étranger à M. Charbon-

nier; qu'il s'agisse d'une bille, d'un boomerang ou d'un obus, il veut en suivre le mouvement et connaître ses lois. La Balistique extérieure est pour lui, comme il le dit, la branche terrestre de l'astronomie. C'est l'astronomie d'un ciel qui tomberait sur nos têtes et je crois bien aussi que l'auteur doit tenir la théorie cinétique des gaz pour une artillerie lilliputienne.

Examinons le plan général de l'Ouvrage : on sait que la Balistique extérieure étudie le projectile à partir de sa sortie de l'arme; elle établit les propriétés de la trajectoire et les méthodes de calcul qui permettent de la déterminer. Admettons que les actions dues à la résistance de l'air soient équivalentes à une force unique appliquée au centre de gravité du projectile, tangente à la trajectoire de ce point, de sens opposé à celui de la vitesse et d'intensité $cF(v)$, c désignant le coefficient balistique, coefficient qui dépend de la forme du projectile et du poids spécifique de l'air dans lequel il se meut, tandis que la fonction F ne dépend que de la grandeur de la vitesse et demeure la même pour toutes les formes de projectiles. L'étude de la trajectoire de ce centre de gravité constitue ce qu'on appelle le *problème balistique principal*. Si l'on tient compte des variations atmosphériques et par suite de c, de l'action du vent, de la variation de l'intensité de la pesanteur, du mouvement de rotation de la terre, de la forme et du mouvement de rotation du projectile, on est conduit à introduire un ensemble de termes correctifs dont l'étude correspond aux *problèmes balistiques secondaires*.

Ce sont ces problèmes, principal et secondaires, qui forment la matière des trois premiers Tomes que l'auteur réunit sous le titre général de *Balistique extérieure rationnelle*. La balistique rationnelle est en somme l'étude des solutions d'un système d'équations différentielles faite directement à partir des équations elles-mêmes, au moins dans le cas général. Elle se rattache ainsi à la théorie moderne des équations différentielles.

Dans le Tome I sont établis les théorèmes généraux de la Balistique; le Tome II étudie les théories balistiques; le Tome III s'occupe des problèmes balistiques secondaires. Un Tome IV, intitulé *Balistique extérieure expérimentale*, fera connaître au lecteur tout l'outillage nécessaire pour fonder ou appliquer la Balis-

tique rationnelle : appareils servant à la détermination expérimentale de la fonction F (v) qui n'est connue que par la Table de ses valeurs numériques; détermination des données et des caractéristiques nécessaires à l'établissement des Tables de tir; méthodes pratiques de calcul utilisées dans les polygones d'artillerie. Une histoire de la Balistique extérieure formera le volume V dans lequel le lecteur pourra suivre le développement parallèle, d'une part, des méthodes de l'analyse, des sciences expérimentales et des appareils de mesure, et de l'autre, de l'utilisation que le balisticien en a faite. Ce Tome se terminera par une bibliographie complète et enfin, le Tome VI formera un Recueil de Tables numériques, instrument de travail indispensable au balisticien.

Le Tome I, paru en 1921, se divise en deux Parties. La première est consacrée aux « cas limites du problème balistique » obtenus soit en laissant de côté la résistance de l'air : c'est le mouvement dans le vide; soit en supprimant la courbure de la trajectoire : c'est le tir rectiligne horizontal ou vertical. La seconde Partie traite des propriétés générales des trajectoires atmosphériques, telles qu'on peut les déduire des équations différentielles du mouvement avec des hypothèses très larges sur la forme de la fonction F (v), et du problème d'analyse posé par l'intégration de ces équations. Une introduction établit les bases de la balistique extérieure rationnelle en exposant les lois de la résistance de l'air.

L'étude des trajectoires du vide est très développée : elle permet de familiariser le lecteur avec des notations, des expressions, des formules que l'on retrouvera dans tout le cours de l'Ouvrage; de commencer l'étude des problèmes de tir dans un cas où les solutions sont particulièrement simples : tir en brèche, tir défilé, tir de côte, tir fusant, tir à ricochet, tir sur un but mobile, tir pendulaire, tir en aéroplane, où l'on entend bien qu'il ne faut pas trop prendre à la lettre l'expression de trajectoire du vide et qu'il s'agit d'une première approximation de la réalité.

La notion de familles de trajectoires commence à apparaître : on sait que la trajectoire, ou courbe balistique, issue d'un point donné dépend de trois constantes arbitraires : V_0, la vitesse initiale; α, l'angle de tir; c, le coefficient balistique. C'est l'étude de ce complexe de trajectoires qui est en somme représenté par

l'ensemble des tables de tir. Dans le cas du vide, c ne figurant pas, il reste une congruence de trajectoires dans laquelle on étudie les familles $V_0 =$ const. et les familles $\alpha =$ const. Enfin, pour chaque trajectoire, déterminée par des valeurs données à V_0 et à α, il y a lieu d'étudier la gerbe, c'est-à-dire la congruence partielle extraite de l'ensemble des trajectoires qui correspond à de petites variations ∂V_0 et $\partial\alpha$ des conditions initiales et d'examiner la répartition des points de chute correspondants.

Ce Livre premier se termine par une étude approfondie du tir d'altitude et une analyse très précise des conditions d'application de la règle suivante, si commode dans la pratique, connue sous le nom d'*hypothèse de la rigidité de la trajectoire;* l'angle de tir α ayant permis d'atteindre une portée X sur le plan horizontal, nous admettrons qu'une rotation de la trajectoire dans son plan vertical d'un angle ϖ autour de son point de départ, comme si c'était un corps rigide, nous permettra d'atteindre la même portée X sur le plan incliné d'un angle ϖ, dit « angle de site », qui passerait par ce point de départ.

Le Livre II s'occupe de la Balistique rectiligne. Le premier cas, celui du mouvement rectiligne horizontal, correspond à la suppression de la pesanteur; nous voyons apparaître les intégrales $S(v)$ et $D(v)$ de $\frac{1}{F(v)}$ et de $\frac{v}{F(v)}$ qui portent le nom de *fonctions balistiques de Siacci* et joueront dans la suite un rôle important, ainsi que les développements en série qui sont à la base des méthodes de la Balistique rationnelle; le mouvement vertical met en jeu simultanément la pesanteur et la résistance de l'air; il introduit les nouvelles fonctions balistiques $\Sigma(c, v)$ et $\Delta(c, v)$ qui se déduisent des précédentes en remplaçant $F(v)$ par $c\,F(v) - g$. Ce mouvement est étudié complètement, avec de nombreux exemples relatifs à des formes particulières de $F(v)$, parmi lesquelles se trouve le cas des résistances monomes Bv^m. L'auteur fait une intéressante application des Chapitres qui précèdent à l'étude qualitative du mouvement des projectiles cylindriques ou discoïdes.

Avec la deuxième Partie, qui expose les théorèmes généraux de la Balistique, nous abordons le problème complet. L'auteur établit d'abord les équations différentielles du mouvement, liant les variables x, y, v, t, τ; x et y sont les coordonnées du mobile, v sa

vitesse, t le temps, τ l'angle de la tangente avec l'horizontale. Comme on le sait, l'intégration de ces équations différentielles se ramène à l'intégration de la seule équation différentielle de l'hodographe, suivie de quadratures.

Mais, sans effectuer cette intégration, on peut étudier sur les équations différentielles les propriétés générales du mouvement, en supposant simplement que la résistance F (v) est une fonction croissante de son argument v. L'auteur établit ainsi des propositions relatives aux variations de la vitesse, aux formes de l'hodographe, à l'étude des familles d'hodographes correspondant aux différentes valeurs des éléments caractéristiques V_0, α, c. Cette étude, qui comprend en particulier des procédés de construction graphique de l'hodographe, est très complète et très détaillée. Puis vient un examen général des formes de la trajectoire, de ses points remarquables, de ses asymptotes et enfin, l'étude des variations que subissent les éléments du mouvement lorsque les éléments caractéristiques sont affectés des variations ∂V_0, $\partial\alpha$, ∂c, ∂g, étude déduite, naturellement, des équations aux variations.

Abandonnant un instant le domaine pratique pour pénétrer dans celui de l'Analyse pure, l'auteur consacre un Chapitre presque tout entier au problème de l'intégration par quadratures des équations de la Balistique. Il suffit d'intégrer au moyen de quadratures l'équation différentielle de l'hodographe; quelles sont donc les formes analytiques de la fonction F (v) qui permettront cette intégration par quadratures? On connaissait, depuis Bernoulli, le cas des résistances monomes Bv^m, avec d'Alembert sont intervenues des résistances fonctions rationnelles de la vitesse; des expressions particulières plus compliquées ont été découvertes par Siacci et tout récemment encore, par M. Ouivet. Mais c'est à M. Drach que revient l'honneur d'avoir résolu complètement le problème posé par Siacci : déterminer toutes les formes de F (v) permettant de ramener aux quadratures l'étude du mouvement des projectiles. Les méthodes générales d'intégration de M. Drach lui ont permis de trouver toutes les formes demandées; un résumé des recherches de M. Drach est remarquablement exposé ici par M. Denjoy et suivi de la contribution personnelle que ce dernier savant a apportée à ces questions. Ce Chapitre sera consulté avec intérêt et avec fruit par tous les analystes.

Nous retournons maintenant à la pratique, avec l'explication des intégromètres balistiques et des machines à calculer les trajectoires, étude qui termine le Chapitre premier.

Le Chapitre II est consacré aux problèmes balistiques inverses. Si l'on connaît une intégrale du système des équations différentielles, liant deux éléments du mouvement, x et y par exemple, le problème inverse a pour but de calculer les autres éléments v, t, τ. Ce calcul ne fait pas intervenir la fonction $F(v)$; il permet de la déterminer. Par exemple, la trajectoire $y = f(x)$ a pu être définie expérimentalement par le relevé des points d'impact du projectile sur une série d'écrans; des différentiations, des quadratures et des calculs algébriques permettront d'avoir les autres éléments du tir et la forme correspondante de la loi de résistance de l'air. On conçoit l'importance pratique de ce problème inverse qui est traité ici dans toute son ampleur, avec de nombreuses applications, en particulier à la trajectoire de Piton-Bressant.

Enfin le troisième et dernier Chapitre est consacré aux développements en séries de Mac-Laurin pour le calcul des petits arcs. On exprime ainsi quatre des cinq quantités x, y, v, t, τ en fonction de l'une d'elles; en limitant les séries aux premiers termes, on obtient des polynomes par rapport à la variable choisie. On dira que le tir est horizontal si ces polynomes peuvent représenter avec une approximation suffisante l'arc de trajectoire qui va de l'origine au point de chute et l'on établit ainsi les formules du tir horizontal relatives aux éléments du point de chute.

Le résumé qui précède donne une idée de la richesse et de la variété des questions que M. Charbonnier expose dans ce premier Volume avec beaucoup de clarté et de simplicité. Peut-être le lecteur sera-t-il d'abord surpris du nombre considérable de noms donnés à des formules, des méthodes, des théorèmes dont beaucoup correspondent à des transformations de calcul usuelles ou à de simples remarques, bien que l'on ne souligne, généralement, en analyse pure, que les conclusions générales d'une série de telles transformations ou de telles remarques. Cela tient, je crois, à ce qu'une transformation de formules, sans intérêt pour l'analyste, peut grandement faciliter le calcul pratique et qu'il est plus commode, pour rappeler le procédé, de l'associer à un nom propre. Malgré l'abondance des méthodes particulières, les grandes lignes

de chaque théorie se détachent avec vigueur et s'imposent à l'esprit du lecteur.

Ce premier Volume est le digne début d'une œuvre magistrale : souhaitons qu'elle nous apparaisse bientôt dans toute son ampleur.

Paul MONTEL.

MÉLANGES.

SUR LES FONCTIONS QUI ADMETTENT UN THÉORÈME D'ADDITION ALGÉBRIQUE;

PAR M. H. MINEUR.

Nous nous proposons de chercher à quelles conditions il existe une fonction uniforme admettant un théorème d'addition algébrique donné.

Dans la première Partie, nous étudions des fonctions que nous appelons « fonctions paramétriques ». Soit $\psi(x, y)$ l'une d'elles, que nous supposons fonction holomorphe de x et y. Nous montrons que l'équation fonctionnelle

$$f(u+v) = \psi[f(u), f(v)]$$

admet une infinité de solutions $f(u)$ holomorphes dans le voisinage de $u = 0$.

Dans la seconde Partie, nous supposons que $\psi(x, y)$ est une fonction algébrique de x et de y et nous formons les conditions nécessaires et suffisantes pour que les fonctions $f(u)$ précédemment définies soient uniformes dans tout le plan.

Pour terminer, nous examinons le cas où $\psi(x, y)$ étant toujours une fonction algébrique de x et de y, $f(u)$ n'est pas uniforme et nous montrons comment, par des calculs rationnels, on peut ramener ce cas au précédent.

Nous obtenons ainsi une définition des fonctions elliptiques analogue à la définition élémentaire de l'exponentielle. Si l'on

remplace dans cette Note la fonction paramétrique $\psi(x, y)$ par la fonction paramétrique particulière xy, on obtient successivement la notation exponentielle, la définition de la fonction puissance et celle de l'exponentielle.

I.

1. — Fonctions paramétriques.

Définition. — Une fonction *paramétrique* est une fonction $\psi(x, y)$ de deux variables vérifiant les conditions suivantes :

1°
$$\psi[x, \psi(y, z)] = \psi[(x, y), z],$$

quels que soient x, y, z ;

2° Il existe un nombre α unique tel que

$$\psi(x, \alpha) = x, \qquad \psi(\alpha, x) = x;$$

3° Si l'on se donne deux des trois nombres x, y, z, la relation

$$z = \psi(x, y)$$

définit le troisième sans ambiguïté.

Nous n'imposons pour le moment à $\psi(x, y)$ aucune autre condition; le mot *fonction* doit donc être pris ici dans son sens le plus général; on peut supposer, par exemple, que x représente un système de n variables ainsi que y et z ; $z = \psi(x, y)$ représentera dans ce cas un système de n fonctions de $2n$ variables.

Définition. — Nous poserons

$$\psi_0(x) = \alpha, \qquad \psi_1(x) = x, \qquad \psi_2(x) = \psi(x, x), \quad \ldots,$$
$$\psi_n(x) = \psi[x, \psi_{n-1}(x)].$$

La formule récurrente précédente permet de définir $\psi_n(x)$, quel que soit l'entier positif n ; il est facile de constater qu'on a également

$$\psi_n(x) = \psi[\psi_{n-1}(x) x].$$

Théorème. — *Quels que soient les entiers n et p,*

$$\psi_{n+p}(x) = \psi[\psi_n(x), \psi_p(x)].$$

Si $n = 1$, le théorème résulte de la définition de $\psi_{n+1}(x)$; supposons-le vrai pour $n = n' - 1$ et démontrons-le pour $n = n'$:

$$\psi[\psi_{n'}(x), \psi_p(x)] = \psi\{\psi[x, \psi_{n'-1}(x)], \psi_p(x)\}$$
$$= \psi\{x, \psi[\psi_{n'-1}(x), \psi_p(x)]\} = \psi[x, \psi_{n'+p-1}(x)] = \psi_{n'+p}(x).$$

Théorème. — *Quels que soient les entiers positifs n et p,*

$$\psi_n[\psi_p(x)] = \psi_{np}(x).$$

Ce théorème se démontre par récurrence comme le précédent.

Définition. — Nous désignerons par $\psi_{\frac{1}{n}}$ la fonction inverse de ψ_n et nous supposerons qu'à une valeur de y la relation $y = \psi_n(x)$ fait correspondre une seule valeur de x:

$$x = \psi_{\frac{1}{n}}(y).$$

Théorème. — *Quels que soient les entiers n et p,*

$$\psi_{\frac{1}{n}}\left[\psi_{\frac{1}{p}}(x)\right] = \psi_{\frac{1}{np}}(x).$$

Posons

$$y = \psi_{\frac{1}{p}}(x), \qquad z = \psi_{\frac{1}{n}}(y),$$

où

$$y = \psi_n(z), \qquad x = \psi_p(y).$$

On a

$$x = \psi_n[\psi_p(z)] = \psi_{np}(z),$$

donc

$$z = \psi_{\frac{1}{n}}\left[\psi_{\frac{1}{p}}(x)\right] = \psi_{\frac{1}{np}}(x).$$

Définition. — p et q étant deux entiers positifs, posons

$$\psi_{\frac{p}{q}}(x) = \psi_p\left[\psi_{\frac{1}{q}}(x)\right];$$

si l'on multiplie p et q par un même nombre, le second membre ne change pas.

Théorème. — *Si n et n' sont deux nombres rationnels positifs,*

$$\psi[\psi_n(x), \psi_{n'}(x)] = \psi_{n+n'}(x).$$

Soient

$$n = \frac{p}{q}, \qquad n' = \frac{p'}{q'}, \qquad y = \psi_{\frac{1}{qq'}}(x);$$

on a

$$\psi\left[\psi_{\frac{p}{q}}(x),\ \psi_{\frac{p'}{q'}}(x)\right] = \psi\left[\psi_{pq'}(y),\ \psi_{p'q}(y)\right] = \psi_{pq'+qp'}(y),$$

$$\psi\left[\psi_{\frac{p}{q}}(x),\ \psi_{\frac{p'}{q'}}(x)\right] = \psi_{\frac{pq'+qp'}{qq'}}(x) = \psi_{\frac{p}{q}+\frac{p'}{q'}}(x).$$

C. Q. F. D.

On démontre de la même façon que

$$\psi_n[\psi_{n'}(x)] = \psi_{nn'}(x).$$

Définition. — Soit m un nombre rationnel positif, nous définirons $\psi_{-m}(x)$ par la relation

$$\psi[\psi_{-m}(x),\ \psi_m(x)] = \alpha;$$

elle est équivalente à

$$\psi[\psi_m(x),\ \psi_{-m}(x)] = \alpha.$$

Supposons en effet la première de ces deux relations vérifiée, on a

$$\psi\{\psi[\psi_{-m}(x),\ \psi_m(x)],\ \psi_{-m}(x)\} = \psi[\alpha,\ \psi_{-m}(x)] = \psi_{-m}(x)$$

en vertu de la condition 1° :

$$\begin{aligned}&\psi\{\psi[\psi_{-m}(x),\ \psi_m(x)],\ \psi_{-m}(x)\}\\ &\quad = \psi\{\psi_{-m}(x),\ \psi[\psi_m(x),\ \psi_{-m}(x)]\} = \psi_{-m}(x),\end{aligned}$$

et en vertu de la condition 2° :

$$\psi[\psi_m(x),\ \psi_{-m}(x)] = \alpha.$$

En particulier, $\psi_{-1}(x)$ est défini par

$$\psi[x,\ \psi_{-1}(x)] = \alpha.$$

Théorème :

$$\psi[\psi_{-1}(x),\ \psi_{-1}(y)] = \psi_{-1}[\psi(x,\ y)].$$

Il suffit de transformer comme précédemment l'expression

$$\psi\{\psi[\psi_{-1}(x),\ \psi_{-1}(y)],\ \psi(x,\ y)\};$$

on trouve qu'elle est égale à α; le théorème énoncé en résulte.

Théorème. — *Si p est un entier positif,*

$$\psi_{-1}[\psi_p(x)] = \psi_p[\psi_{-1}(x)].$$

Ce théorème se démontre facilement par récurrence.

THÉORÈME. — *Quels que soient les nombres rationnels n et p,*

$$\psi[\psi_n(x), \psi_p(x)] = \psi_{n+p}(x).$$

Ce théorème a été démontré lorsque n et p sont positifs. Si n et p sont des entiers positifs ou négatifs, il se démontre en utilisant le théorème précédent ; supposons par exemple $n = -n'$, $p = -p'$, n' et p' étant deux entiers positifs :

$$\begin{aligned}\psi[\psi_n(x), \psi_p(x)] &= \psi\{\psi_{n'}[\psi_{-1}(x)], \psi_{p'}[\psi_{-1}(x)]\}\\ &= \psi_{n'+p'}[\psi_{-1}(x)] = \psi_{-(n'+p')}(x) = \psi_{n+p}(x).\end{aligned}$$

Si n et p sont des nombres rationnels quelconques

$$n = \frac{q}{q'}, \qquad p = \frac{s}{s'},$$

on est ramené au cas précédent en posant

$$x = \varphi_{q's'}(y)$$

THÉORÈME. — *Si n et p sont deux nombres rationnels quelconques,*

$$\psi_n[\psi_p(x)] = \psi_{np}(x).$$

Ce théorème se démontre comme le précédent, on revient au cas où n et p sont positifs en utilisant la formule

$$\psi_{-n}(x) = \psi_{-1}[\psi_n(x)].$$

En se limitant aux valeurs réelles et positives des variables, on voit que $\psi(x, y) = xy$ est une fonction paramétrique. $\psi_n(x)$ est égal à x^n et les théorèmes

$$\psi_n[\psi_p(x)] = \psi_{np}(x), \qquad \psi[\psi_n(x), \psi_p(x)] = \psi_{n+p}(x)$$

ne sont autres que la généralisation des formules élémentaires

$$(x^n)^p = x^{np}, \qquad x^n x^p = x^{n+p}.$$

La fonction xy est symétrique. Toutes les fois qu'une fonction paramétrique sera symétrique, nous dirons qu'elle est *indéfiniment symétrique*.

Si $\psi(x, y)$ est une fonction paramétrique, $f(x)$ est une fonction quelconque et $g(x)$ son inverse, $f\{\psi[g(x), g(y)]\}$ est aussi une fonction paramétrique.

Si φ et ψ sont deux fonctions paramétriques, il n'existe pas toujours de fonction $f(x)$ telle que

$$f[\varphi(x, y)] = \psi[f(x), f(y)].$$

Dans le cas particulier où φ et ψ sont indéfiniment symétriques et où x est une variable réelle, il existe une infinité de fonctions $f(x)$ vérifiant l'équation précédente, ces fonctions pouvant être discontinues.

2. — Fonctions paramétriques analytiques de deux variables.

Considérons maintenant une fonction paramétrique analytique de deux variables $\varphi(x, y)$, supposons $\alpha = 0$ (¹) et $\varphi(x, y)$ holomorphe dans le domaine $(x = 0, y = 0)$. Soit

$$\varphi(x, y) = a_0 + a_1 x + b_1 y + \ldots.$$

Les conditions $\varphi(\alpha, x) = x$, $\varphi(y, \alpha) = y$ montrent que

$$a_0 = \alpha, \qquad a_1 = b_1 = 1;$$

donc

$$\varphi(x, y) = x + y + a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2 + \ldots.$$

Soit n un entier positif, $\varphi_n(x)$ est une fonction holomorphe de x dans le domaine de $x = 0$ et le premier terme de son développement est nx; on peut donc effectuer l'inversion de $y = \varphi_n(x)$ si y reste voisin de zéro (²). D'une façon plus générale, $\varphi_n(x)$, où n est rationnel, est holomorphe dans ce même domaine; son rayon de convergence dépend de n, mais il est fini pour chaque valeur de n. Soit

$$\varphi_n(x) = nx + a_2^{(n)}x^2 + a_3^{(n)}x^3 + \ldots + a_p^{(n)}x^p + \ldots;$$

les coefficients a_p^{n} sont des fonctions du nombre rationnel n; cherchons la forme de ces fonctions : égalons pour cela les déve-

---

(¹) Si α n'était pas nul, il suffirait de considérer la fonction

$$\psi(x - \alpha, y - \alpha) + \alpha,$$

qui est une fonction paramétrique.

(²) L'hypothèse introduite au paragraphe 1 que $y = \psi_n(x)$ peut être inversée est donc bien satisfaite dans ce cas.

loppements de $\varphi_n[\varphi_p]$ et de $\varphi_p[\varphi_n]$:

$$n a_2^p + p^2 a_2^n = p a_2^n + n^2 a_2^p,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$n a_q^p + a_2^n \left(a_{\frac{q}{2}}^p\right)^2 + \ldots + a_q^n p^q = a_q^p n^q + \ldots + p a_q^n.$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Donnons dans ces identités à p une valeur fixe et résolvons-les *successivement* par rapport à $a_2^{(n)}, a_3^{(n)}, \ldots, a_q^{(n)}, \ldots$; on trouve sans difficulté que a_q^n est un polynome $P_q(n)$ de degré q sans terme constant ; *lorsqu'on y donne à n une valeur rationnelle*, la série

$$n x + P_2(n) x^2 + \ldots + P_q(n) x^q + \ldots$$

représente le développement de $\varphi_n(x)$.

Soit

$$P_q(n) = b_1^q n + b_2^q n^2 + \ldots + b_q^q n^q.$$

Nous allons montrer qu'il existe deux nombres ρ et ρ' tels que la série

$$\sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{q} b_p^q t^p x^q$$

est absolument convergente lorsque

$$|x| < \rho \quad \text{et} \quad |t| < \rho'.$$

Soient n_1 un nombre rationnel inférieur à 1 et ρ_1 un nombre tels que, pour $|x| < \rho_1$,

$$|P_2(n_1) x^2 + \ldots + P_q(n_1) x^q + \ldots| < \varepsilon.$$

$n_1 + \varepsilon = A$ étant inférieur à 1. On aura pour $|x| < \rho_1$

$$|\varphi_{n_1}(x)| < A|x| < \rho_1,$$

et, si N est un entier positif, $\varphi_{n_1^N}(x)$, qui s'obtient à partir de $\varphi_{n_1}(x)$ par itération, sera holomorphe pour $|x| < \rho_1$ et vérifiera dans ce domaine

$$|\varphi_{n_1^N}(x)| < A^N |x| < A|x|.$$

Soit $\dfrac{M}{1 - \dfrac{|x|}{\rho}}$ une majorante de $\varphi_{n_1}(x)$ ($\rho < \rho_1$); comme

$$|\varphi_{n_1}(x)| < A|x|.$$

$\dfrac{M}{1 - \dfrac{|x|}{\rho}}$ sera aussi une majorante pour $\varphi_{n_1^N}(x)$; donc

$$|P_q(n)| < \frac{M}{\rho^q}$$

$$(n = n_1,\ n = n_1^2,\ n = n_1^3,\ \ldots,\ n = n_1^N,\ \ldots).$$

Désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_q$ les valeurs que prend $P_q(n)$ pour $n = n_1, n = n_1^2, \ldots, n = n_1^q$; la formule de Lagrange appliquée à P_q donne

$$P_q(n) = \sum_{i=1}^{q} A_i \frac{(n - n_1)(n - n_1^2)\ldots(n - n_1^{i-1})(n - n_1^{i+1})\ldots(n - n_1^q)}{(n_1^i - n_1)\ldots(n_1^i - n_1^{i-1})(n_1^i - n_1^{i+1})\ldots(n_1^i - n_1^q)}.$$

Mais

$$|A_i| < \frac{M}{\rho^q}; \quad |n_1^i - n_1^j| > n_1^{q+1}$$

si $i \neq j$ et si i et j sont inférieurs à q; donc

$$|P_q(n)| < \frac{Mq}{\rho^q n_1^{q-1}(n_1 + \varepsilon)^{q-1}} \quad \text{pour} \quad |n| \leq \varepsilon.$$

Par conséquent,

$$|P_q(n)| < \frac{M'}{\rho'^q} \quad \text{pour} \quad |n| \leq \varepsilon.$$

Soit C le cercle de centre O de rayon ε :

$$b_p^q = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{P_q(n)}{n^p}\, dn;$$

donc

$$|b_p^q| < \frac{M''}{\rho'^p \rho''^q};$$

la série

$$f(t, x) = \sum_{q=1}^{+\infty} \sum_{p=1}^{q} b_p^q t^p x^q$$

est donc convergente dans le domaine

$$|t| < \rho'', \quad |x| < \rho'.$$

Théorème. — *Il existe une fonction analytique $f(t, x)$ holomorphe dans le domaine* (0, 0) *qui se réduit à $\varphi_t(x)$ lorsque t est rationnel.*

Les fonctions

$$f(t + t', x) - \varphi[f(t, x), f(t', x)] \quad \text{et} \quad f(tt', x) - f[t, f(t', x)]$$

sont nulles lorsque $|x| < \rho'$ et lorsque t et t' prennent des valeurs rationnelles; l'ensemble des nombres rationnels admet l'origine comme point limite et les fonctions précédentes sont holomorphes dans son voisinage; elles sont donc identiquement nulles.

t étant un nombre quelconque, posons

$$\varphi_t(n) = f(t, x);$$

on aura encore

$$\varphi[\varphi_t(x), \varphi_{t'}(x)] = \varphi_{t+t'}(x),$$
$$\varphi_t[\varphi_{t'}(x)] \qquad = \varphi_{tt'}(x).$$

Théorème. — *$\varphi(x, y)$ est symétrique.*

Soit x_0 tel que $|x_0| < \rho'$; si x et y sont voisins de zéro,

$$\varphi_t(x_0) = x, \qquad \varphi_{t'}(x_0) = y$$

définissent t et t' sans ambiguïté [1] et

$$\varphi(x, y) = \varphi[\varphi_t(x_0), \varphi_{t'}(x_0)] = \varphi_{t+t'}(x_0) = \varphi[\varphi_{t'}(x_0), \varphi_t(x_0)] = \varphi(y, x).$$

Une fonction paramétrique analytique est indéfiniment symétrique.

Par la suite, nous dirons qu'une fonction $\varphi(x, y)$ est indéfiniment symétrique par rapport à α, lorsque cette fonction sera symétrique, holomorphe dans le domaine (α, α), et telle que $\varphi[x, \varphi(y, z)]$ soit symétrique par rapport à x, y, z, et que $\varphi(x, \alpha) = x$.

3. — Application aux équations fonctionnelles.

Considérons l'équation fonctionnelle

$$(1) \qquad f[\varphi(x, y)] = \psi[f(x), f(y)],$$

où $f(x)$ est l'inconnue et où φ et ψ sont deux fonctions indéfiniment symétriques par rapport aux valeurs α et β.

Dans l'équation (1), faisons $x = \alpha$; il en résulte $f(\alpha) = \beta$; supposons $f(x)$ holomorphe dans le voisinage de $x = \alpha$. De l'équa-

(1) $\dfrac{\partial}{\partial t}\varphi_t(x_0)$ n'est pas nul, car, pour $t = 0$, cette dérivée est égale à x_0.

tion (1) on déduit, en faisant $y = x$,

$$f[\varphi_2(x)] = \psi_2[f(x)],$$

d'où

$$f\left[\varphi_{\frac{1}{2}}(x)\right] = \psi_{\frac{1}{2}}[f(x)] \qquad \text{et} \qquad f\left[\varphi_{\frac{1}{2^n}}(x)\right] = \psi_{\frac{1}{2^n}}[f(x)],$$

n étant un entier positif. La fonction

$$f[\varphi_t(x)] - \psi_t[f(x)],$$

où x est supposé constant, étant régulière pour $t = 0$ et s'annulant pour $t = \frac{1}{2^n}$, est identiquement nulle. Soient a une valeur de x suffisamment voisine de α et A un nombre voisin de β. Il existe une seule solution de l'équation (1) telle que $f(a) = A$, elle est définie par

$$f[\varphi_t(a)] = \psi_t(A);$$

l'équation $x = \varphi_t(a)$ définit t comme fonction holomorphe de x, $u(x)$ dans le domaine de α, la fonction $f(x) = \psi_{u(x)}(A)$ est donc holomorphe dans ce domaine et vérifie l'équation (1) : soient x, y deux valeurs voisines de α et $x = \varphi_t(a)$, $y = \varphi_{t'}(a)$.

$$\begin{aligned} f[\varphi(x, y)] &= f[\varphi_{t+t'}(a)] \\ &= \psi_{t+t'}(A) = \psi[\psi_t(A), \psi_{t'}(A)] = \psi[f(x), f(y)]. \end{aligned}$$

En laissant a fixe et en donnant à A toutes les valeurs d'un certain domaine entourant le point β, on définit une infinité de solutions holomorphes de l'équation (1).

En particulier, les solutions de l'équation

$$f(x+y) = \varphi[f(x), f(y)]$$

sont les fonctions

$$f(x) = \varphi_x(A).$$

4. — Application aux groupes a un paramètre.

Considérons un groupe continu à un paramètre contenant la transformation identique, désignons par T_a les transformations du groupe et par T_α la transformation identique. Le produit de deux transformations du groupe $T_a T_b$ est une transformation T_c du groupe, c, est une fonction de a et b : $c = \psi(a, b)$.

$\psi(a, b)$ *est une fonction paramétrique.*

Formons en effet le produit $T_a T_b T_c$ de deux manières différentes :

$$T_d = T_a T_b T_c = T_a(T_b T_c) = (T_a T_b) T_c,$$

nous aurons

$$d = \psi[a, \psi(b, c)] = \psi[\psi(a, b), c].$$

Comme T_α désigne la transformation identique,

$$T_a T_\alpha = T_\alpha T_a = a \qquad \text{ou} \qquad \psi(a, \alpha) = \psi(\alpha, a) = a;$$

si l'on suppose de plus qu'à une transformation T_a correspond une seule valeur du paramètre a, la troisième condition du paragraphe 1 est vérifiée.

Bornons-nous aux groupes pour lesquels $\psi(a, b)$ est une fonction analytique de a et b. D'après les résultats du paragraphe 2, $\psi(a, b)$ est symétrique par rapport à a et b; donc tout groupe continu à un paramètre est permutable.

Faisons le changement de paramètre défini par $a = f(t)$ $f(t)$ étant une solution de

$$f(t + t') = \psi[f(t), f(t')]$$

et posons $T_a = U_t$, nous aurons

$$U_t U_{t'} = U_{t+t'};$$

le paramètre t est donc un paramètre canonique.

On voit donc que la théorie précédemment développée n'est autre que la théorie des groupes continus ; on peut déduire les résultats des paragraphes 1, 2, 3 de la théorie des groupes ; la méthode que nous avons employée a le seul avantage d'être purement fonctionnelle et de ne pas utiliser d'équations différentielles. On peut démontrer de même, au moyen des équations fonctionnelles, que tout groupe continu à un paramètre est semblable au groupe des translations à un paramètre.

La démonstration du paragraphe 2 s'étend sans modification au cas où x représente un système de n variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ainsi que y et z, la relation $z = \psi(x, y)$ représentant un système de n fonctions analytiques de $2n$ variables

$$z_i = \psi_i[x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On montre que $\psi_t(x_1, \ldots, x_n)$ est une fonction holomorphe de t.

On peut ainsi étudier la théorie des groupes à n paramètres et démontrer, par exemple, qu'un groupe à n paramètres se compose de ∞^{n-1} sous-groupes à un paramètre; on peut former les conditions de similitude de deux groupes. Nous ne nous occuperons pas de ces questions, nous ferons seulement l'étude des fonctions indéfiniment symétriques algébriques.

II.

5. — Fonctions indéfiniment symétriques algébriques.

Nous avons étudié jusqu'ici les fonctions indéfiniment symétriques en nous bornant au cas où les variables restent dans le voisinage de la valeur α. Nous allons supposer maintenant que la fonction indéfiniment symétrique précédemment considérée,

$$z = \varphi(x, y),$$

est une branche de fonction algébrique de x et de y définie par

$$\Phi(x, y; z) = 0.$$

La fonction

$$f(u) = \varphi_u(\alpha)$$

vérifie l'équation

$$(1) \qquad f(u+v) = \varphi[f(u), f(v)],$$

c'est-à-dire

$$(1') \qquad \Phi[f(u), f(v); f(u+v)] = 0.$$

En d'autres termes, $f(u)$ admet un théorème d'addition algébrique. Weierstrass a démontré [1] qu'une telle fonction $f(u)$ est définie dans tout le plan et rentre dans un des trois types suivants : fonction algébrique, fonction algébrique de e^{ku}, fonction algébrique d'une fonction elliptique. Pour donner une définition précise des fonctions indéfiniment symétriques algébriques, nous étudierons donc le théorème d'addition des fonctions précédemment énumérées ; nous commencerons par considérer le cas où ces fonctions sont uniformes et nous admettrons que $f(u)$ est une fonction elliptique, les résultats seront encore valables lorsqu'une ou deux périodes s'annuleront. De cette étude, nous déduirons les

---

[1] *Cf.* Phragmen, *Acta mathematica*, t. VII, 1885.

conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une fonction elliptique admettant un théorème d'addition donné.

6. — Le théorème d'addition des fonctions elliptiques.

Soit $f(u)$ une fonction elliptique de périodes ω, ω', d'ordre r; soit

$$\Phi[f(u), f(v); f(u+v)] = 0 \tag{1}$$

son théorème d'addition, $\Phi(x, y; z)$ étant un polynome entier indécomposable.

Soient x, y, z trois nombres liés par la relation

$$\Phi(x, y; z) = 0. \tag{2}$$

Il existe dans un parallélogramme de périodes deux points u et v tels que

$$x = f(u), \qquad y = f(v), \qquad z = f(u+v). \tag{3}$$

Soient en effet u_1, v_1 deux points tels que $x = f(u_1)$, $y = f(v_1)$; $z_1 = f(u_1 + v_1)$ est racine de (2); faisons décrire à x' et à y' simultanément deux contours fermés partant de x et de y, de sorte que la racine z' de l'équation

$$\Phi(x', y'; z') = 0, \tag{2'}$$

définie par continuité et égale initialement à z_1 soit égale à z lorsque x' et y' sont revenus en x et y; par continuité, on définira u' et v' par $x' = f(u')$, $y' = f(v')$, et l'on aura constamment $z' = f(u' + v')$, puisque ceci a lieu dans le domaine de u_1, v_1; lorsque x' et y' seront arrivés en x et y, u' et v' auront pris des valeurs u et v et l'on aura bien les relations (3). Il en résulte que Φ est symétrique par rapport à x et y.

Si u, v, w sont trois valeurs quelconques, la relation entre

$$x = f(u), \qquad y = f(v), \qquad z = f(w), \qquad Z = f(u + v - w)$$

s'obtiendra en éliminant t entre

$$\Phi(x, y; t) = 0, \qquad \Phi(z, t; Z) = 0.$$

Soit

$$\Phi(x, y, z; Z) = 0$$

la relation obtenue; on voit comme précédemment qu'elle est symétrique par rapport à x, y, z.

Cherchons les nombres α tels que l'on ait identiquement

$$\Phi(x, \alpha; x) = 0.$$

D'après le théorème précédent, il existe deux points u, v tels que

$$\alpha = f(v), \qquad x = f(u) = f(u+v),$$

v est donc une période et

$$\alpha = f(m\omega + m'\omega') = f(0),$$

α est unique.

Étudions les racines de (2) lorsque x et y sont voisins de α. Nous supposerons que $u = 0$ est une racine simple de $f(u) = \alpha$; si cela n'était pas, on raisonnerait sur $f(u - \varepsilon)$. Soient

$$u_1^0 = 0, \quad u_2^0, \quad \ldots, \quad u_r^0$$

les r nombres situés dans un parallélogramme de périodes tels que $f(u_i^0) = \alpha$; désignons par u_i et v_i deux valeurs voisines de u_i^0; les racines de (2) sont représentées par les équations

$$x = f(u_i), \qquad y = f(v_j), \qquad z = f(u_i + v_j);$$

seules les racines pour lesquelles un des deux indices est égal à 1 tendent vers α en même temps que x et y, car si i et j sont tous deux différents de 1, z tend vers $f(u_i^0 + v_j^0)$, qui est en général différent de α.

Une telle racine $z = \psi[x, y]$ vérifie donc une des deux relations

$$\psi(x, \alpha) = x, \qquad \psi(\alpha, y) = y;$$

considérons par exemple

$$x = f(u_1), \qquad y = f(v_i), \qquad z = f(u_1 + v_i);$$

lorsque u_1 est nul, on a bien

$$x = \alpha, \qquad z = y.$$

Parmi ces racines, une seule vérifie les deux relations

$$\varphi(x, \alpha) = x, \qquad \varphi(y, \alpha) = y,$$

c'est celle qui correspond à $i = 1$, $j = 1$.

En résumé, $\Phi(x, y; z) = 0$ vérifie les conditions suivantes, que nous appellerons les *conditions* I :

1° L'élimination de t entre les équations

$$\Phi(x, y; t) = 0, \qquad \Phi(z, t; Z) = 0$$

conduit à la relation $\Phi(x, y, z; Z) = 0$ symétrique en x, y, z;

2° Il existe un nombre α et un seul tel que $\Phi(x, \alpha, x) = 0$;

3° Toute racine $z = \psi(x, y)$ de $\Phi(x, y; z) = 0$ (2), égale à α lorsque $x = y = \alpha$, est holomorphe au voisinage de $x = \alpha$, $y = \alpha$ et vérifie *l'une des deux* relations

$$\psi(x, \alpha) = x, \qquad \psi(\alpha, y) = y;$$

une seule d'entre elles, $z = \varphi(x, y)$, vérifie les deux relations

$$\varphi(x, \alpha) = x, \qquad \varphi(\alpha, y) = y.$$

Nous appellerons « fonction indéfiniment symétrique algébrique » une fonction $z(x, y)$ définie par $\Phi(x, y; z) = 0$, Φ vérifiant les conditions I.

Le polynome Φ étant donné, il est facile de constater, par des calculs rationnels, s'il vérifie ou non les conditions I. Les conditions 1° et 2° exigent un calcul d'élimination et un calcul d'identification [il ne faut pas oublier que α peut être infini, exemple $p(u)$].

Pour la condition 3, il suffira de vérifier que le développement d'une racine $z = \psi(x, y)$ de (2), telle que $\psi(\alpha, \alpha) = \alpha$ au voisinage de $x = \alpha$, $y = \alpha$, a l'une des deux formes

$$z - \alpha = (x - \alpha) + a(y - \alpha) + \ldots,$$
$$z - \alpha = (y - \alpha) + a(x - \alpha) + \ldots,$$

et qu'une racine seulement a un développement commençant par les termes

$$z - \alpha = (x - \alpha) + (y - \alpha) + \ldots.$$

7. — Définition d'une fonction elliptique par son théorème d'addition.

Soit $\Phi(x, y; z)$ un polynome vérifiant les conditions I; nous allons montrer qu'il existe une infinité de fonctions uniformes $f(u)$ telles que

$$\Phi[f(u), f(v); f(u+v)] = 0.$$

Soit $z = \varphi(x, y)$ la racine de (2) $\Phi(x, y; z) = 0$ définie au paragraphe 3 des conditions I, montrons que $\varphi(x, y)$ est indéfiniment symétrique par rapport à la valeur α.

$z = \varphi(x, y)$ et $z_1 = \varphi(y, x)$ vérifient toutes deux l'équation (2) et les conditions $\varphi(x, \alpha) = x$, $\varphi(\alpha, y) = y$; comme une seule racine de (2) y satisfait, on conclut que $z = z_1$ et que $\varphi(x, y)$ est symétrique.

De même $\Phi(x, y, z; Z) = 0$ admet une seule racine Z qui, pour $x = \alpha$, se réduit à $\varphi(y, z)$; pour $y = \alpha$, à $\varphi(x, z)$; pour $z = \alpha$, à $\varphi(x, y)$; comme

$$Z = \varphi[x, \varphi(y, z)], \qquad Z_1 = \varphi[\varphi(x, y), z], \qquad \ldots$$

vérifient ces conditions, on a

$$\varphi[x, \varphi(y, z)] = \varphi[\varphi(x, y), z];$$

φ est donc indéfiniment symétrique.

Soit $\varphi_t(x)$ l'itérée de $\varphi(x, y)$, c'est une fonction holomorphe de t et de x dans le domaine $|t| < \rho$, $|x - \alpha| < \rho'$; soit C une constante vérifiant $|c - \alpha| < \rho'$; posons

$$f(u) = \varphi_u(C),$$

$f(u)$ est holomorphe dans le cercle Γ de centre $u = 0$ et de rayon ρ; elle vérifie dans ce cercle l'équation

$$f(u + v) = \varphi[f(u), f(v)],$$

on a donc

$$\Phi[f(u), f(v); f(u + v)] = 0. \tag{1}$$

Si u reste dans Γ, $f(u)$ est uniforme; nous allons montrer qu'il en est de même dans le cercle Γ' de centre $u = 0$ de rayon 2ρ.

Soit $\mathfrak{C}$ un *contour fermé* issu de O et intérieur à Γ'; l'équation (1) montre que le prolongement analytique de $f(u)$ peut être suivi le long de $\mathfrak{C}$; supposons un instant que ce prolongement nous conduise à une fonction $f_1(u)$ distincte de $f(u)$; $f(u)$ se comporte dans Γ' comme une fonction algébrique; elle a donc en tout point une valeur bien définie :

1° On peut disposer de u et v de façon que u et $u + v$ se déplaçant à l'intérieur de Γ, v décrive $\mathfrak{C}$. La relation (1) deviendra alors

$$\Phi[f(u), f_1(v); f(u + v)] = 0;$$

faisons $v = 0$, nous aurons

$$\Phi[f(u), f_1(0); f(u)] = 0;$$

il résulte des conditions 1 que

$$f_1(0) = \alpha.$$

2° Déplaçons u et v à l'intérieur de Γ de façon que $u+v$ décrive $\mathcal{C}$, on aura

$$\Phi[f(u), f(v); f_1(u+v)] = 0.$$

Lorsque u et v tendent vers zéro, $f_1(u+v)$ tend vers α; soit

$$f_1(u+v) = \psi[f(u), f(v)];$$

comme $\psi(\alpha, \alpha) = \alpha$, on a par exemple

$$\psi(x, \alpha) = x.$$

d'où, en faisant $v = 0$,

$$f_1(u) = f(u).$$

Après avoir décrit $\mathcal{C}$, $f(u)$ revient au voisinage de $u = 0$ avec la même détermination.

On peut répéter ce raisonnement en substituant Γ' à Γ, et ainsi de suite; *$f(u)$ est uniforme dans tout le plan* et vérifie (2).

$f(u)$ dépend de la constante C, qui doit rester voisine de α; la relation

$$\varphi_t[\varphi_{t'}(C)] = \varphi_{tt'}(C)$$

permet de définir $\varphi_t(x)$, x étant une valeur telle que $x = \varphi_{t'}(C)$.

Il est aisé d'obtenir toutes les fonctions $g(u)$ qui vérifient l'équation (1)

$$\Phi[g(u), g(v), g(u+v)] = 0;$$

si l'on fait $v = 0$ dans cette équation ([1]), on obtient $g(0) = \alpha$; donc

$$g(u+v) = \varphi[g(u), g(v)];$$

comme au paragraphe 3, on en déduit

$$g(tu) = \varphi_t[g(u)],$$

soit u_0 la valeur de u telle que

$$g(u_0) = C, \qquad g(t) = \varphi_{\frac{t}{u_0}}(C) = f\left(\frac{t}{u_0}\right).$$

([1]) Une fonction qui admet un théorème d'addition algébrique est algébroïde dans tout domaine borné.

Toutes les solutions de (1) sont de la forme $f(ku)$, où k est une constante.

Pour terminer, nous allons montrer comment il est possible de reconnaître rapidement la nature de la fonction $f(u)$.

Supposons un instant que $f(u)$ soit une fonction elliptique de périodes ω, ω'' et d'ordre r. La relation (2)

$$\Phi(x, y; z) = 0$$

peut être remplacée par

$$x = f(u), \qquad y = f(v), \qquad z = f(u + v),$$

ainsi que nous l'avons montré au paragraphe 2; α est racine simple de l'équation $f(u) = 0$; on en déduit facilement que l'équation (3) est de degré $D = r^2$ par rapport à l'une quelconque des variables x, y, z. Soient p un entier et

$$\Phi_p[f(u), f(pu)] = 0$$

la relation entre $f(u)$ et $f(pu)$ déduite de (1) par itération; Φ_p est de degré $D_p = p^2 r$ par rapport à $f(u)$.

Si $f(u)$ est une fonction rationnelle d'une exponentielle $R(e^{ku})$ et si r est le degré de $R(x)$ par rapport à x, on a

$$D = r^2, \qquad D_p = pr.$$

Si $f(u)$ est une fonction rationnelle de u de degré r,

$$D = r^2, \qquad D_p = r.$$

Il suffira donc de comparer les degrés des relations

$$\Phi(x, y; z) = 0, \qquad \Phi(x, x; z) = \Phi_2(x, z) = 0$$

pour reconnaître dans lequel des trois cas on se trouve.

III.

LES FONCTIONS MULTIFORMES QUI ADMETTENT UN THÉORÈME D'ADDITION ALGÉBRIQUE.

M. Phragmen a démontré que si une branche de fonction analytique admet un théorème d'addition algébrique, on peut poursuivre son prolongement analytique dans tout le plan et que cette fonction est soit une fonction algébrique, soit une fonction algébrique de e^{kz}, soit une fonction algébrique d'une fonction elliptique. Nous procéderons comme dans le cas des fonctions uni-

formes, nous étudierons d'abord le théorème d'addition de ces fonctions et nous démontrerons ensuite la réciproque.

Soient $x = f(u)$ une fonction elliptique, X une fonction algébrique de x définie par $F(x, X) = 0$; soient n le nombre des déterminations de X considéré comme fonction de x et n' le nombre analogue lorsque X est considéré comme fonction de u. En général $n' \neq n$. Soient $X_1(u)$, $X_2(u)$, ..., $X_{n'}(u)$ ces n' déterminations, x une valeur quelconque et u_1, u_2, ..., u_r tels que $f(u_i) = x$. $X_j(u_i)$ est racine de l'équation $F(x, X) = 0$; réciproquement, toute racine de cette équation a cette forme. En général, si u et v sont tels que $f(u) = f(v)$, les n' déterminations de $X(u)$ sont distinctes de celles de $X(v)$.

Pour obtenir la formule d'addition de $X(u)$, on formera celle de $f(u)$ et l'on éliminera $f(u)$ entre cette formule et

$$F[f(u), X(u)] = 0.$$

La relation ainsi formée est en général décomposable ; ceci tient à ce que $X(u)$ n'est défini que si l'on ajoute à $F[f(u), X(u)] = 0$ une condition initiale de la forme $X(u_0) = X_0$.

Soit $\Phi(X, Y; Z)$ le facteur de décomposition qui fournit le théorème d'addition de la fonction $X(u)$ que l'on considère :

$$\Phi[X(u), X(v); X(u+v)] = 0.$$

En supposant que $u = 0$ n'est un point critique pour aucune des branches de $X(u)$, on constatera, comme au paragraphe 6, que Φ vérifie les conditions suivantes, que nous appellerons les *conditions* II :

1° L'élimination de t entre $\Phi(x, y; t) = 0$, $\Phi(z, t; Z) = 0$ conduit à la relation $\Phi(x, y, z; Z) = 0$ symétrique en x, y, z.

2° Il existe n' nombres $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tels que $\Phi[x, \alpha_i; x] = 0$.

3° Toute racine $z = \psi(x, y)$ de $\Phi(x, y; z) = 0$ (2) vérifiant $\psi(\alpha_i, \alpha_i) = \alpha_i$ est holomorphe au voisinage de $x = \alpha_i$, $y = \alpha_i$ et vérifie l'une des deux relations

$$\psi(x, \alpha) = x, \qquad \psi(\alpha, y) = y ;$$

une seule d'entre elles, $z = \varphi^{(i)}(x, y)$, les vérifie toutes les deux.

Soit Φ un polynome vérifiant ces conditions ; nous allons montrer qu'il existe une infinité de fonctions à n' déterminations telles

que

$$(1) \qquad \Phi[X(u), X(v); X(u+v)] = 0.$$

Posons

$$\varphi_n^1(v) = X_1(u);$$

$X_1(u)$ est holomorphe dans un cercle Γ de centre $u=0$ de rayon ρ. Si u se déplace dans le cercle Γ′ de rayon 2ρ, $X_1(u)$ peut revenir en $u=0$ avec une autre détermination $X_i(u)$, on voit, comme au paragraphe 7, que $X_i(0)$ est égal à un des nombres α et que $X_1(u)$ ne peut prendre au voisinage de $u=0$ que n' déterminations $X_1(u)$, $X_2(u)$, ..., $X_{n'}(u)$, chacune d'elles étant déterminée par une condition telle que $X_i(0)=\alpha_i$, en remplaçant ρ par 2ρ, puis par 4ρ, ...; on démontre que $X(u)$ n'a que n' déterminations dans tout le plan et vérifie (1); toute autre solution est de la forme $X(ku)$.

$X(u)$ est une fonction algébrique d'une fonction elliptique; nous allons montrer comment, Φ étant donné, on peut former une relation algébrique

$$(3) \qquad F(x, X) = 0$$

telle que X soit défini par une équation de la forme

$$F[f(u), X(u)] = 0.$$

où $f(u)$ est une fonction uniforme.

Soient A un nombre quelconque et w_1, w_2, ..., w_p les points situés dans un parallélogramme de périodes tels qu'une détermination au moins de $X(w_i)$ soit égale à A. Soit

$$Y_i(u) = X_i(u - w_i);$$

on a, quel que soit i,

$$\Phi[Y_i(u), Y_i(v), A; Y_i(u+v)] = 0.$$

Soit

$$\Psi_i[Y_i(u), Y_i(v); Y_i(u+v)] = 0$$

le théorème d'addition de $Y_i(u)$; les polynomes Ψ_i sont tous distincts, car on ne peut avoir, quel que soit A, une relation de la forme $Y_i(u) = Y_j(ku)$ entre deux fonctions Y. Il en résulte que

$$\Phi(x, y, A; Z) = \Psi_1(x, y; Z)\Psi_2(x, y; Z)\ldots\Psi_p(x, y; Z)$$

à un facteur constant près, $\Phi(x, y, A; Z)$ est décomposable.

Si $\Phi(x, y, A; Z)$ et $\Phi(x, y, B; Z)$ ont un facteur commun, il existe au moins un nombre w tel que A et B soient deux déterminations de $X(w)$.

Par des calculs rationnels, on peut former les conditions nécessaires et suffisantes que doivent vérifier n' nombres $A_1, A_2, \ldots, A_{n'}$ pour que les n' relations

$$\Phi(x, y, A_i; Z) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n')$$

admettent un facteur de décomposition commun. Soit S le système de relations obtenu après que l'on a supprimé les solutions dans lesquelles deux A sont égaux; si $A_1, \ldots, A_{n'}$ sont n déterminations de $X(u)$, ils vérifient S et réciproquement; si l'on se donne A_1, par exemple, le système S définira un nombre fini de systèmes $A_1, A_2, \ldots, A_{n'}$; l'élimination de $A_2, A_3, \ldots, A_{n'}$ entre les équations de S et l'équation

$$x = A_1 + A_2 + \ldots + A_{n'}$$

conduira donc à une relation algébrique entre A_1 et x :

$$F(x, A_1) = 0.$$

Si l'on remplace dans cette relation A_1 par une détermination de $X(u)$, x sera une fonction $f(u)$ uniforme de u dans tout le plan; $X(u)$ sera donc bien défini par une équation de la forme

$$F[f(u), X(u)] = 0,$$

et l'on pourra former $F(x, X)$ par des calculs rationnels; par élimination, on formera le théorème d'addition de $f(u)$.

Dans les paragraphes 6 et 7, nous nous sommes bornés au cas où $u = 0$ est une racine simple de $f(u) = 0$; il pourrait arriver que $\Phi(x, y; z) = 0$ étant donné, il existe des fonctions uniformes $f(u)$ telles que $u = 0$ soit une racine multiple de $f(u) = 0$ et que

$$\Phi[f(u), f(v); f(u+v)] = 0,$$

on étudierait dans ce cas la fonction $f(u - \varepsilon)$; pour cela, il suffirait de former un facteur de décomposition $\Psi(x, y; z)$ de $\Phi(x, y, A; Z)$ et de chercher les fonctions $g(u)$ qui vérifient

$$\Psi[g(u), g(v); g(u+v)] = 0.$$

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GEFFROY (J.), Ingénieur des Arts et Manufactures, professeur à l'École centrale. — TRAITÉ PRATIQUE DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE. In-8°, 1921, II-191 pages. Paris, Armand Colin.

Quelles sont les études propres à former les jeunes esprits ? La question, qui n'a guère cessé de défrayer les polémiques depuis un demi-siècle, est, une fois de plus, à l'ordre du jour. On en discute, — et l'on en décrète —, sans prendre toujours la peine de la bien définir et de la bien poser. Les mots d'« utilitaire » et d'« éducatif », prodigués comme le « tarte à la crême » classique, servent souvent d'unique argument, et leur opposition apparaît comme un dogme qui n'a besoin ni d'être établi, ni même expliqué. N'avons-nous pas vu insinuer qu'une connaissance ne peut contribuer à la formation de l'esprit du moment qu'elle sert à quelque chose ?

C'est le contraire qui est vrai; et c'est ce qu'il n'est pas nécessaire de développer longuement pour les lecteurs du *Bulletin*. Qui dit application pratique ne dit pas de toute nécessité sain exercice de la pensée; il y a cependant toujours forte présomption que l'un est solidaire de l'autre et que l'effort intellectuel qui sert est un effort de bon aloi.

Il faut bien dire, au reste, que toute étude — et particulièrement toute étude utile — sera, en principe, profitable à l'esprit si elle est bien traitée, si ses aspects supérieurs, philosophiques, dirai-je, sont bien mis en lumière. La façon d'enseigner fait souvent plus que l'objet même de l'enseignement.

D'autre part, à la question « comment ? », il importe, de joindre la question « quand ? » Le même enseignement sera éducatif ou ne le sera point suivant l'âge, le degré de développement de ceux auxquels il s'adressera.

Toutes ces réflexions, qui ne cessent d'ailleurs guère de s'imposer en ce moment, me reviennent particulièrement à l'esprit à propos du rôle de la Géométrie descriptive. J'ai entendu d'excellents

esprits, avec lesquels j'ai d'ailleurs le plaisir d'être en accord sur beaucoup de choses, soutenir qu'elle est inutile et proposer de la rayer de l'enseignement. Je ne saurais, quant à moi, partager entièrement cette opinion. Certes, la place qui lui convient est modeste. Ce n'est qu'un langage. Mais précisément, on a le droit de dire de toute science mathématique ce qu'on a dit un peu imprudemment de toute science en général, à savoir qu'elle n'est qu'une langue bien faite. L'édifice logique des Mathématiques n'est, en un certain sens, pas complet s'il ne comprend un langage graphique propre à représenter correctement les figures de l'espace. Par là, la découverte de Monge en fait partie essentielle et intervient d'une manière naturelle et nécessaire lorsqu'on en veut faire comprendre l'esprit.

Mais à quel moment cette intervention doit-elle se produire en ce qui regarde la Géométrie descriptive elle-même; et à quel moment aussi les applications pratiques de cette méthode sont-elles à leur place dans l'enseignement ?

Pour la première, on convient que cette idée simple et sa mise en œuvre générale qui ne l'est pas moins conviennent à l'enseignement secondaire. Pour les secondes, il n'en est pas de même, et c'est là que réside l'intéressante innovation apportée aujourd'hui par M. Geffroy. Jusqu'à une date relativement récente, les programmes de nos grandes Écoles d'ingénieurs réservaient une place relativement grande à la Stéréotomie. On s'accorde aujourd'hui à reconnaître que cette place était exagérée. Si utile que cette discipline puisse être en pratique, elle ne constitue, scientifiquement parlant, qu'une application immédiate des problèmes, en général les plus élémentaires, de la Géométrie descriptive. Pour qui est familier avec le maniement de celle-ci, le détail de celle-là tombe aisément dans la puérilité. En fait, il est, je le crois bien, beaucoup de polytechniciens, qui ont conservé de cette partie de leur enseignement un assez mauvais souvenir.

M. Geffroy a su voir que cette application, dépourvue de valeur éducative pour l'élève-ingénieur, en a au contraire une considérable pour le lycéen. Le premier est, ou doit être, en possession de la méthode; le second en est encore à en pénétrer l'esprit. A ce stade, et contrairement à l'opinion que nous rappelions en commençant, c'est l'application qui éclaire la théorie, et cela d'autant plus qu'elle

en est plus proche et s'en déduit plus immédiatement. Comme le remarquait un jour M. Belot dans une séance de la Société de Philosophie, point de meilleur commentaire des cas d'égalité des triangles que le levé des plans d'une part, la construction des systèmes articulés métalliques de l'autre. Au reste, cette identification d'une figure, cette connaissance des caractères et des mesures propres à la déterminer entièrement, n'est-ce pas l'objet propre ou tout au moins le premier des objets propres de la Géométrie elle-même ? N'est-ce pas le premier qu'il importe de signaler à l'écolier? Or la Stéréotomie représente, elle aussi, un autre aspect du même problème. Elle constitue ainsi un des exemples les plus aptes à faire comprendre la nature de la Géométrie.

C'est donc une résolution des plus heureuses, à notre sens, que M. Geffroy accomplit en l'incorporant à un Traité de Géométrie descriptive élémentaire, et il faut vivement souhaiter que l'impulsion qu'il donne soit suivie.

Cette nouvelle conception du plan général de l'Ouvrage a sa répercussion sur la partie purement théorique elle-même. L'idée scientifique s'adapte, dans une certaine mesure, à l'application qui s'en réclame. Ne doutons point qu'elle n'y gagne.

Dans le cas actuel, cette adaptation se traduit par une plus grande importance donnée à la méthode des changements de plans, que l'auteur introduit jusque sous sa forme la plus générale, c'est-à-dire avec remplacement des deux plans de projection primitifs par deux nouveaux plans rectangulaires quelconques.

La notion du changement de plan sera introduite aussitôt que possible, dès les premières lignes de l'Ouvrage. A cet effet, la représentation cotée, qui ne préjuge rien sur le choix éventuel d'un plan vertical, est donnée la première; la représentation par deux plans de projection arrive d'ailleurs immédiatement après, mais elle arrive après et comme se déduisant de la précédente. Dès lors, la construction relative au changement de plan vertical peut s'indiquer dès la cinquième page de l'Ouvrage, du moins en ce qui regarde le point. Au lieu, en effet, de réunir en une seule fois, comme on le fait d'habitude, les règles du changement de plans pour les différentes figures élémentaires, en les faisant précéder de l'exposé des constructions fondamentales relatives à toutes ces figures, on formulera la règle du changement de plan vertical pour un point

dans la théorie du point, celle qui concerne la droite dans la théorie de la droite, celle qui concerne le plan dans la théorie du plan.

Pour nouveau que soit cet agencement, il n'a rien que de très naturel. Les besoins de l'application sont, comme en beaucoup d'autres circonstances, tout à fait en accord avec ceux de la vraie logique. Pourquoi l'exposé de la Géométrie descriptive ne suivrait-il pas celui de la Géométrie analytique, cet autre langage destiné à exprimer le même ensemble de faits ? Or, en Géométrie analytique, le changement de coordonnées se présente comme l'opération fondamentale : il se présente dès le début, c'est-à-dire avant la théorie même de la droite et du plan, et sous sa forme la plus générale, j'entends dans le cas du passage d'un système d'axes rectangulaires quelconques à un système d'axes rectangulaires quelconques.

Donc le premier Chapitre traite successivement du point, de la droite et du plan, en y comprenant chaque fois la théorie du changement de plan vertical pour chacun de ces éléments. Y est comprise également l'étude de l'intersection des droites et des plans ainsi que celle des droites et plans perpendiculaires. Ce premier exposé se montre déjà comme d'un bon logicien, d'un esprit mathématique solide, par la rigueur avec laquelle sont discutés les cas d'exception dans lesquels telle méthode générale se trouve en défaut, de manière que la discussion ne puisse en laisser échapper aucun.

Cette excellente tenue logique se manifeste à nouveau dès le début du Chapitre suivant. C'est en somme le langage même de la Géométrie descriptive, ce sont son vocabulaire et sa grammaire qui ont fait l'objet du Chapitre I. Dans les premières lignes du Chapitre II, l'auteur pose avant tout en principe la distinction essentielle qui doit être établie, dans tout problème, entre la solution géométrique à proprement parler et sa traduction dans le nouveau langage auquel le lecteur vient d'être initié. Encore convient-il et est-il souvent nécessaire que ce qu'il y a d'arbitraire dans ce langage soit choisi de manière à simplifier le plus possible les opérations, et c'est là que le rôle de la méthode des changements de plans apparaît pleinement. Il ne s'agit plus d'exposer le principe du changement de plan, lequel est déjà acquis, mais de l'étendre au changement de plan horizontal et au changement de plans le plus général, et surtout de montrer comment on pourra disposer des

nouveaux plans de projection de manière à introduire entre eux et la figure donnée des relations convenables. Les rabattements, puis les rotations viennent après les changements de plans pour répondre aux mêmes besoins.

Les problèmes de distances et d'angles (Chapitre III) sont l'application naturelle et nécessaire de ce qui précède.

Un court Chapitre IV est consacré aux distinctions relatives à la visibilité. Tout y est encore très logiquement ramené à deux règles simples concernant la position mutuelle d'un point et d'un plan et, d'autre part, celle de deux droites. Observons toutefois que si M. Geffroy juge indispensable, comme cela l'est en effet, de donner pour tous les cas possibles des règles générales et en quelque sorte mécaniques, il ne partage point pour la « vision dans l'espace » le mépris un peu puéril que professent envers elle certains spécialistes. Ce mépris était général parmi ceux qui ont enseigné la Géométrie descriptive à la génération dont je fais partie : ils n'avaient pas tout à fait tort, en ce sens que les règles mécaniques sont très commodes, pour venir en aide à la vision dans l'espace plutôt que pour la supprimer; dans l'ensemble ils ne nous ont jamais très bien convaincus, et je ne le regrette point. Ils auraient encore grossi le nombre, trop considérable déjà, des élèves auxquels l'emploi des Mathématiques enseigne le dogmatisme et la méconnaissance du mécanisme réel des choses. J'imagine au surplus que parmi ceux qui s'exprimaient ainsi, bien peu avaient touché à la réalité et manié des assemblages, des constructions, des machines. M. Geffroy est d'une autre formation et tient à montrer à toute occasion comment, tout en représentant sur le papier, il faut savoir aussi « restituer » dans l'espace.

Les représentations des polyèdres, les problèmes classiques d'intersections et d'ombres qui les concernent occupent le Chapitre V. Après cela, le lecteur possède tous les éléments voulus pour passer aux applications pratiques.

Celles-ci occupent 35 pages sur les 190 dont se compose l'Ouvrage. Après quelques principes généraux et deux exemples qui les illustrent, elles concernent un peu la coupe des pierres et beaucoup plus la charpente. C'est ce Chapitre qui peut-être effarouchera, par sa nouveauté, les lecteurs de tempérament timide. Ils ne manqueront sans doute pas de lui reprocher la série de termes nouveaux

et un peu barbares au premier abord que comporte cette technique. On peut regretter en effet leur multiplicité et l'impossibilité où l'on est d'y rien changer, consacrés qu'ils sont par un usage séculaire; mais un maître intelligent peut trouver à ce petit inconvénient quelques compensations en montrant, par exemple, comment tous ces mots font image. Si même la collaboration si désirable en toute circonstance entre les différents enseignements pouvait être poussée assez loin, — ce qui serait assez difficile, je dois le reconnaître, étant donné l'âge auquel ces notions doivent être abordées, — le professeur de français trouverait matière à quelques utiles remarques dans la forme de ces mots, leur date, les renseignements qu'ils nous donnent sur l'origine et le développement de l'art de la construction en France.

Ce qui est incontestable, en tout cas, c'est le fond des choses : c'est la valeur éducative de l'exposé, relativement complet dans sa brièveté, que l'on trouvera des principes de la charpente dans l'Ouvrage actuel et où l'écolier lira comment, dans l'établissement d'une couverture de bâtiment, il y a une application constante des principes de la Géométrie descriptive et de la Géométrie tout court, et il n'y a en somme que cela.

Le dernier Chapitre est aussi résolument scientifique que le précédent était pratique. Il a pour but d'initier sommairement à quelques-unes des notions de la Géométrie projective moderne.

Quelques sujets d'exercices terminent l'Ouvrage, et cela ne gâte rien : l'une de ces épures est une question de charpente.

Si nous avons su donner une juste idée de ce petit Livre, on se rendra compte qu'il dénote, tant par son idée première que par les détails de sa composition, un esprit hautement averti à la fois des théories géométriques modernes et des exigences de la vie industrielle. On sait combien cette connaissance simultanée de la théorie et de la pratique est difficile à rencontrer; mais nos jeunes ingénieurs n'ignorent pas quel rare exemple M. Geffroy a donné à cet égard.

Sur l'excellence de la directive qu'il donne, et l'utilité, pour notre enseignement secondaire, de s'engager résolument dans cette voie, nous n'avons personnellement aucun doute. Nous irons même plus loin : nous voudrions qu'aux épures tracées sur le papier corresponde la taille d'objets réels, à l'atelier de menuiserie. Chercher

parmi les scies et les rabots un élément de culture générale et de formation du jugement, voilà qui peut sembler bien extraordinaire à ceux qui conçoivent l'enseignement à l'ancienne mode. On peut affirmer que les universitaires au courant des conditions de l'esprit scientifique et de la manière de le développer seront d'un autre avis. J. HADAMARD.

DU PASQUIER (LOUIS-GUSTAVE), Professeur de Mathématiques supérieures à l'Université de Neufchâtel. — LE DÉVELOPPEMENT DE LA NOTION DE NOMBRE. 1 vol. Paris-Neufchâtel, Attinger frères, éditeurs, 1921. (*Mémoires de l'Université de Neufchâtel*, t. III.)

Ce Volume nous présente un ensemble de recherches tout à fait attachantes, sur les origines et le développement de la numération chez les peuples. Disons tout de suite que tout en atteignant à la plus grande précision scientifique dans son exposition, et sans abandonner jamais le point de vue élevé qui est le sien, l'auteur a réussi à faire, sur un sujet qui risquait d'être aride, un volume qui se lit avec un plaisir constant. Cela fait le plus grand honneur à la méthode de l'éminent Professeur de l'Université de Neufchâtel. On sait du reste que M. du Pasquier est l'un des mathématiciens les plus autorisés pour parler de la théorie des nombres : l'Arithmétique supérieure lui doit de savantes recherches notamment sur les unités hypercomplexes et les questions qui s'y rattachent (cf. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1918; *Bulletin de la Société mathématique*, 1920, et surtout *Comptes rendus du Congrès international des Mathématiciens*, Strasbourg, 1920).

Dans l'enfance des individus, comme dans celle des peuples, la notion de nombre cardinal n'existe pas originellement, son acquisition correspond à la nécessité, qui se présente d'ailleurs d'elle-même, de caractériser certaines collections concrètes d'objets semblables. Le problème de « compter des objets » ne peut être considéré comme ayant reçu une solution, que lorsqu'on a réalisé une représentation abstraite permettant la précision. Trois stades se sont présentés chez tous les peuples, du moins chez ceux parvenus à une civilisation assez avancée : ils correspondent successivement à la numération digitale (d'où provient l'importance des

nombres 5 et 10 dans toutes les numérations), puis à la numération parlée, enfin à la numération écrite, cette dernière ayant permis les spéculations abstraites les plus élevées.

Après avoir consacré un Chapitre à l'analyse logique et psychologique de la notion du nombre, M. du Pasquier donne de multiples et intéressants exemples de numération digitale : cette arithmétique palpable, restée rudimentaire le plus souvent, a été poussée jusqu'à un haut degré de perfection chez les Grecs et les Chinois : ces derniers parviennent très aisément à exprimer, à l'aide des dix doigts, tous les nombres entiers de 1 à 10000.

La numération parlée a consisté tout d'abord à faire correspondre des noms déterminés aux premiers nombres entiers : ces noms ont été au début ceux d'objets concrets éveillant naturellement l'idée de ces nombres : ainsi le mot qui signifie *main* signifie aussi 5 dans les idiomes primitifs et dans presque toutes les langues océaniennes. Une autre méthode, nécessitant un stade plus avancé, est la méthode symbolique, employée par les Hindous et les Javanais. Quel que soit le point de départ, le sens primitif des vocables utilisés a fini par se perdre, et l'on a aperçu de plus en plus le caractère abstrait. C'est à ce degré de développement que se rattache la méthode du mathématicien hindou Aryabatta (vers 476 de notre ère) qui, au moyen des lettres de l'alphabet, parvient à désigner tous les nombres jusqu'à 10^{18}. La méthode dite *katapaya* se fonde sur un principe analogue : chacune des 34 consonnes de l'alphabet sanscrit correspond aux nombres 0, 1, 2, ..., 9, qui ont donc chacun plusieurs figurations, les voyelles sont considérées comme n'ayant aucune valeur numérique : pour former un nombre par cette méthode, on écrit les consonnes à la place des chiffres, en intercalant des voyelles *ad libitum* de manière à former des mots et des phrases, ou même des vers, faciles à retenir : ce procédé est intéressant à signaler, c'est celui qu'emploient aujourd'hui les calculateurs prodiges que l'on voit capables de répéter de mémoire des suites de nombres incohérents qui ont été énoncés ou mis un instant sous leurs yeux.

Une fois nommés les premiers nombres, considérés comme éléments constitutifs, on a obtenu des « systèmes additifs » en composant de nouveaux noms à l'aide des précédents, à l'aide de l'addition exclusivement ; ce principe se retrouve dans tous les

langages connus, il est imparfait en ce qu'il ne permet pas pour chaque nombre une représentation unique; les règles fournissant une solution satisfaisante doivent être les suivantes :

1° Tout nombre entier doit être représentable;

2° La désignation des nombres doit être univoque;

3° Une même règle constante permettra d'énoncer tous les nombres;

4° Cette dénomination, pour les nombres $< N$, se fera au moyen de certains mots invariables, éléments constitutifs fixes;

5° Les éléments constitutifs ne doivent pas être nombreux ni compliqués;

6° La représentation des nombres doit être aussi brève et simple que possible.

On aperçoit que la numération digitale fournit un moyen d'aborder une solution imparfaite du problème : prenant en général une base b, on obtient le schéma suivant :

$$1, 2, \ldots, b; \quad b+1, b+2, \ldots; \quad b+b, b+b+1, \ldots; \quad b+b+h, \ldots.$$

C'est le système additif, vite impraticable, qu'on peut améliorer au moyen des systèmes additifs à progression arithmétique (dans lesquels on donne des noms nouveaux aux nombres $b+b$, $b+b+b$, etc.) et des systèmes additifs à progression géométrique. Mais on peut encore perfectionner le procédé, en adoptant le principe de multiplication, et en disant : 2 fois b, 3 fois b, ... au lieu de $b+b$, ... De cette façon on peut nommer les nombres de 1 à b^2 en n'utilisant que les b premiers nombres. Il faut ajouter une règle grammaticale, variable selon les peuples, pour permettre de distinguer l'agrégation multiplicative d'avec la composition additive.

En utilisant seulement les principes précédents, on peut continuer l'application du principe de multiplication, combiné avec l'addition, pour arriver à nommer n'importe quel nombre sans former de mots nouveaux : cela se rencontre par exemple chez les Aïnous, au nord du Japon. On peut aussi, et c'est le procédé des savants hindous, donner un nom nouveau à chaque puissance de la base b^2, b^3, ... En pratique, le résultat n'est pas toujours

simple, puisque par exemple 2365 se dit, en sanscrit (la base b est égale à 10),

pantcha chachty-uttara-tri çatâdhika-dvi sahasram.

Le système multiplicatif à progression arithmétique auquel nous sommes habitués choisit comme surunités les nombres 10^2, 10^3, 10^6, 10^9, 10^{12}, 10^{15}, ... (règle latine); tandis que chez d'autres peuples les surunités spécialement dénommées sont 10^2, 10^3, 10^6, 10^{12}, 10^{24}, ...

Tous les peuples ont possédé une numération parlée plus ou moins avancée; la numération écrite a demandé beaucoup plus d'efforts, elle demandait une faculté d'abstraction bien plus considérable, et une conscience très nette du but à atteindre. M. du Pasquier énumère, classe et étudie toutes les méthodes connues, depuis les hiéroglyphes égyptiens et les signes chaldéens, jusqu'à notre numération courante actuelle; dans un Chapitre fort complet, il met nettement en évidence les principes qui ont servi de bases aux différents systèmes, dont beaucoup sont parfaitement adaptés aux besoins usuels : on se souvient de la surprise que Paul Tannery disait avoir éprouvée en constatant avec quelle facilité il parvenait à s'assimiler les procédés de calcul écrit des peuples grecs.

Le point initial de toute numération est évidemment le choix de la base : la base 10, pour des raisons anthropomorphiques, a prévalu partout (ou presque partout). Pascal semble avoir été le premier mathématicien à observer que cette base était en somme assez malheureuse. « Si les savants, écrit M. du Pasquier, dans leur cabinet de travail ou dans leurs laboratoires de psychologie avaient eu à résoudre le problème : quel nombre conviendrait le mieux comme base du système de numération? ils n'auraient certainement pas donné la préférence au nombre 10. Malheureusement cette importante question fut décidée aux époques préhistoriques, par des hommes qui, vu leur état d'infériorité intellectuelle, ne pouvaient même pas se poser le problème, et se sont laissés guider par la structure extérieure du corps humain. »

Des 381 idiomes que M. du Pasquier s'est astreint à s'assimiler (au moins en ce qui concerne la numération), 184 possèdent la

base 10, 105 la base 5, la plus ancienne vraisemblablement, 60 la base 20. On trouvera dans le Volume de savants développements et des considérations historiques à ce propos; nous ne pouvons ici que les signaler.

Contrairement à la règle quasi universelle, de n'adopter comme base que des nombres dérivés de 5, les Néo-Zélandais possédaient une numération à base 11, du moins c'est ce qui semble résulter de témoignages dignes de foi; l'auteur essaie d'expliquer comment un pareil système hendécadique aurait pu prendre naissance; le système duodécimal (que Buffon voulait introduire jadis) était utilisé vers 1880 par une tribu nègre du nord du fleuve Binué (affluent du Niger). Les Tarahumares de l'Amérique centrale ont un système sénaire, les Bengalais possèdent un système quaternaire.

Du fait que l'immense majorité des peuples utilise le système décimal, il ne résulte pas (comme il a été dit plus haut) que la base 10 soit la meilleure. Un Chapitre très judicieux examine cette question spéciale, et M. C. du Pasquier prouve que les bases 4 ou 6 seraient de beaucoup préférables. Toutes choses égales d'ailleurs, il faudrait 243 fois moins de temps et de travail pour apprendre à calculer dans le système quaternaire que dans le système décimal, il en faudrait 18 fois moins dans le système sénaire que dans le système décimal. Quelle perte de temps serait évitée, que d'efforts on pourrait diriger vers d'autres activités, si la base de notre système de numération avait été choisie plus judicieusement!

J'ai donné dans les lignes précédentes un résumé, fort incomplet, des matières traitées dans le Volume, mais ce que je n'ai pu transcrire, c'est la somme d'ingéniosité d'abord, et de patientes recherches, que représente ce Livre. M. du Pasquier a su rendre attrayant l'exposé très documenté de ses théories; il convient de l'en louer sans réserves. Tous les mathématiciens, et spécialement ceux qui enseignent les mathématiques, auront le plus grand profit à lire cet Ouvrage, où ils apprendront mille choses utiles, et par surcroît plusieurs autres « plaisantes et délectables », ce qui ne saurait rien gâter.

HENRI VILLAT.

MÉLANGES.

SUR L'ITÉRATION DE CERTAINES FONCTIONS ALGÉBRIQUES;

PAR M. P. FATOU.

Nous avons étudié dans différents Mémoires les propriétés limites auxquelles conduit l'itération des fractions rationnelles, et cette étude, quoique assez compliquée, nous a fourni cependant des résultats assez généraux et précis ([1]). Lorsque la fonction dont on fait l'itération n'est plus rationnelle, mais présente des points de ramification ou d'indétermination, la question devient encore plus difficile. Nous n'examinerons ici que des exemples d'itération de fonctions algébriques ou rationnelles, exemples relativement simples et pouvant être traités complètement, mais sur lesquels on voit apparaître déjà certaines propriétés, assez différentes de celles auxquelles donnent lieu les cas d'itération déjà étudiés.

Lorsque la fonction algébrique considérée est la fonction inverse d'une fonction rationnelle, l'étude des positions limites des *conséquents* d'un point du plan complexe est évidemment identique au problème analogue concernant les *antécédents* d'un point pour une substitution rationnelle, et ce problème peut être considéré comme à peu près résolu dans les Mémoires cités. Signalons, d'autre part, la question de l'itération d'une relation biquadratique symétrique entre deux variables, qui revient, comme on sait, à l'étude des polygones d'un nombre fini ou infini de côtés inscrits dans une conique et circonscrits à une autre conique, c'est-à-dire à un problème classique de la théorie des fonctions

---

([1]) *Voir*, par exemple : P. FATOU, *Sur les équations fonctionnelles* (3 Mémoires) (*Bulletin de la Société mathématique de France*, 1919-1920).

elliptiques. Pour obtenir des exemples nouveaux qui soient encore assez simples, nous nous rappellerons que les cas d'itération les plus simples concernant les substitutions rationnelles sont ceux dans lesquels ces dernières possèdent un *cercle fondamental*, et qu'il est facile, d'autre part, de définir des substitutions algébriques à cercle fondamental, ne rentrant pas dans les catégories déjà énumérées. Si l'on pose, par exemple, les deux relations

$$z = R(t),$$
$$z_1 = R_1(t),$$

laissant invariants chacune l'axe réel et le demi-plan au-dessus de l'axe réel, R et R_1 étant d'ailleurs des fonctions rationnelles de degré supérieur au premier, l'élimination de t entre ces deux relations conduit à une équation en z et z_1, laquelle définit une substitution algébrique ayant, en général, les propriétés voulues.

Nous allons particulariser encore davantage cet exemple, en posant

(1) $$\begin{cases} z = R(t), \\ z_1 = kR(t) + k't \end{cases}$$

avec les conditions

(2) $$k > 1, \qquad k' > 0.$$

Soient, d'autre part,

$$t = u + iv,$$
$$z = x + iy,$$
$$z_1 = x_1 + iy_1.$$

Si $y > 0$, on a aussi $v > 0$, et

$$y_1 = ky + k'v > ky.$$

Si l'on fait l'itération de la substitution résultante

$$z_1 = \Phi(z),$$

on obtient

$$y_n > k^n y$$

et par conséquent

$$\lim_{n=\infty} z_n = \infty,$$

et cela quelle que soit la détermination choisie pour la valeur de $z_n = x_n + iy_n$.

Si l'on fait l'itération en sens contraire, on obtient

$$y_{-n} < \frac{y}{k^n},$$

$$\lim y_{-n} = 0;$$

les points z_{-n} tendent, par conséquent, vers l'axe réel.

Pour les points de l'axe réel eux-mêmes, différentes circonstances peuvent se présenter suivant le choix de la fonction $R(t)$. Nous poserons dorénavant

$$z = R(t) = t - \frac{1}{t}.$$

Les deux déterminations de la fonction $t(z)$ sont uniformes autour du point à l'infini et respectivement de la forme :

$$t = z + O\left(\frac{1}{z}\right),$$

$$t' = O\left(\frac{1}{z}\right),$$

d'où

(3) $$\begin{cases} z_1 = (k+k')z + O\left(\frac{1}{z}\right), \\ z'_1 = kz + O\left(\frac{1}{z}\right). \end{cases}$$

Nous avons donc deux substitutions ayant chacune, d'après la terminologie en usage, un *point double attractif* à l'infini, les multiplicateurs étant $\frac{1}{k+k'}$ et $\frac{1}{k}$. Il s'ensuit qu'à l'extérieur d'un cercle de rayon L suffisamment grand, les fonctions itérées

$$z_n = \Phi_n(z)$$

convergent uniformément vers l'infini, et cela quelles que soient les déterminations choisies.

Mais pour préciser davantage ce qui se passe pour les points de l'axe réel, nous allons maintenant construire l'hyperbole représentant la relation entre z et z_1 :

(4) $$(z_1 - kz)[z_1 - (k+k')z] = k'^2.$$

Nous supposerons d'ailleurs, pour éviter une discussion peu

intéressante,

$$(5) \qquad k < 2, \qquad k' < \frac{k(2-k)}{k-1},$$

en plus des inégalités (2). En coupant l'hyperbole (4) par la première bissectrice ($z_1 = z$), on obtient

$$z^2 = \frac{k'^2}{(k-1)(k+k'-1)} = \zeta^2$$

et

$$(6) \qquad \zeta^2 < k'^2$$

d'après (2) et (5). Nous construisons le carré de côté 2ζ qui admet les axes pour médianes, et qui, d'après (6), renferme à son intérieur les points d'intersection de l'hyperbole avec l'axe des z_1 ($z_1 = \pm k'$). Nous avons couvert de hachures la région comprise entre les deux branches de l'hyperbole et à l'intérieur du carré. On démontre immédiatement en s'aidant de la figure que si

$$z > \zeta,$$

la suite

$$z, \quad z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n, \quad \ldots$$

est croissante et a l'infini pour limite, et cela quelles que soient les déterminations choisies; on trouve un résultat analogue pour

$$z < -\zeta,$$

eu égard à la symétrie par rapport à l'origine.

Supposons, au contraire, z compris entre $\pm\zeta$; on voit de suite, en coupant la région couverte de hachures par des parallèles à l'axe des z_1, qu'il y a toujours une valeur de z_1 comprise entre $\pm\zeta$ quand z est compris entre ces mêmes limites; il existe donc au moins une suite de points conséquents qui sont tous compris dans l'intervalle $(+\zeta, -\zeta)$. C'est ce qu'on peut exprimer aussi de la manière suivante : désignons par S et S' les deux substitutions correspondant aux fonctions qui expriment les deux valeurs de z_1 pour z donné (ces deux fonctions, représentées par les deux branches de l'hyperbole, sont croissantes et non ramifiées pour z réel); on peut choisir les entiers a, b, c, ... de manière que la

chaîne infinie de substitutions :

$$\ldots S' \quad \underbrace{S\ldots SS}_{c \text{ fois.}} \quad \underbrace{S'\ldots S'S'}_{b \text{ fois.}} \quad \underbrace{S\ldots SS}_{a \text{ fois.}}$$

appliquée au point z, donne des points tous intérieurs au segment $(-\zeta, +\zeta)$.

Mais on pourra trouver également des chaînes de substitutions telles que les conséquents de z tendent vers l'infini. En effet, d'après l'équation (4), on a

$$z_1 + z'_1 = (2k + k')z.$$

Par conséquent, en appelant z_1 celui des deux nombres z_1, z'_1 qui est le plus grand en valeur absolue :

$$|z_1| > \left(k + \frac{k'}{2}\right)|z|,$$

$$|z_1| > h|z| \qquad (h > 1),$$

et après n opérations, en choisissant toujours le conséquent immédiat le plus éloigné de l'origine,

$$|z_n| > h^n |z|,$$

d'où

$$\lim z_n = \infty.$$

(Ceci est encore vrai pour $z = 0$, puisque le premier conséquent ne sera pas nul.)

Considérons maintenant non plus un point isolé, mais un segment σ ; les conséquents successifs de σ seront toujours des segments simplement couverts, les deux fonctions $z_1(z)$ étant monotones ; tout d'abord, si le segment σ n'a aucun point commun avec le segment Σ, d'extrémités $\pm\zeta$, les segments conséquents $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ tendent vers l'infini quelles que soient les déterminations choisies.

Si au contraire σ a au moins un point commun avec Σ, on pourra toujours choisir la chaîne des substitutions itérées de manière que les conséquents $\sigma_1, \sigma_2, \ldots$ aient toujours une extrémité comprise au sens large dans le segment Σ, et par conséquent ne tendent pas vers l'infini. On peut également choisir la chaîne des substitutions de manière que $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n, \ldots$ tendent vers

l'infini, mais à la condition que σ renferme au plus une des extrémités de Σ. En effet, prenons pour σ le segment $(-\zeta+\varepsilon, \zeta)$, ε étant positif et très petit et effectuons l'itération au moyen de la branche de gauche de l'hyperbole; les points $b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots$ extrémités de droite des segments conséquents tendent évidemment vers l'infini; il en est de même des extrémités de gauche $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$; en effet, $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ croissent constamment en valeur algébrique et s'ils tendaient vers une limite finie λ, on aurait évidemment

$$\lambda = \Phi(\lambda),$$

Φ étant la fonction représentée par la branche de gauche de l'hyperbole, et cela est impossible puisque cette branche ne rencontre la première bissectrice qu'au point $(-\zeta, -\zeta)$ et que $\lambda > -\zeta$.

Donnons-nous maintenant *a priori* la chaîne de substitutions :

$$\ldots \quad \underbrace{SS\ldots SS}_{c \text{ fois.}} \quad \underbrace{S'S'\ldots S'S'}_{b \text{ fois.}} \quad \underbrace{SS\ldots SS}_{a \text{ fois.}}$$

et désignons par E l'ensemble des points dont les conséquents obtenus au moyen de cette chaîne ne tendent pas vers l'infini. E est contenu dans le segment $\Sigma(-\zeta, +\zeta)$. Je dis de plus que E est un ensemble fermé, non dense et renfermant au moins un point. D'abord E est fermé, car si μ était un point de l'ensemble dérivé de E n'appartenant pas à E, le $p^{\text{ième}}$ conséquent μ_p de μ serait extérieur à Σ; μ étant limite de points $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ de E, μ_p serait limite des points $\alpha_p, \beta_p, \gamma_p, \ldots$; donc l'un de ces derniers points, γ_p par exemple, serait extérieur à Σ, et les conséquents de γ tendraient vers l'infini, ce qui est contraire à l'hypothèse. E est non dense; en effet, les relations

$$dz_1 = k\,dz + k'\,dt,$$

$$dz = \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)dt$$

donnent

$$\frac{dz_1}{dz} = k + \frac{k't^2}{1+t^2} > k > 1$$

(puisque t est réel en même temps que z). Donc les longueurs

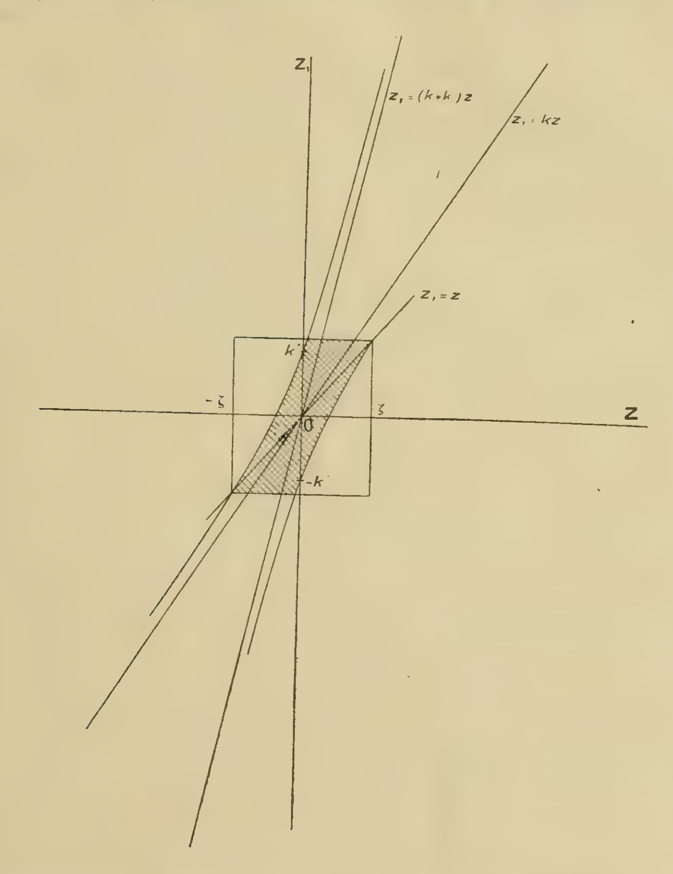
des segments conséquents d'un segment donné σ croissent plus vite que les termes d'une progression géométrique de raison plus grande que 1; donc σ_p, pour une valeur suffisamment grande de p, contient un segment extérieur à Σ et appartenant, par suite, au domaine du point à l'infini; donc σ, lequel est arbitrairement petit, contient lui-même un segment dont aucun point n'est de E; c'est-à-dire que E n'est dense dans aucun intervalle. Enfin E renferme au moins un point, car le conséquent immédiat E_1 du segment Σ, obtenu au moyen de l'une ou l'autre branche de l'hyperbole, contient Σ; par suite, tous les segments conséquents Σ_p renferment Σ et ne sauraient tendre vers l'infini. Il résulte d'ailleurs, de ce qu'on a vu plus haut, que E peut se réduire à un seul point, à savoir l'une des extrémités de Σ. Mais on a vu aussi que l'on peut toujours choisir la chaîne des substitutions itérées de manière que E renferme un point donné à l'avance contenu dans Σ; par conséquent, la somme de tous les ensembles E, en infinité non dénombrable, n'est autre que le segment Σ.

Si maintenant on considère les antécédents successifs d'un segment borné quelconque de l'axe réel, on prouve immédiatement, par ce qui précède, que ces segments antécédents tendent vers des points de Σ, leurs longueurs tendant vers zéro.

Revenons maintenant à l'étude des domaines conséquents et antécédents d'un domaine quelconque D du plan complexe; nous supposerons que D est un domaine fermé; si D est extérieur à un cercle de rayon L, nous avons vu que tous ses conséquents tendent uniformément vers l'infini; il en est de même lorsque tous les points de D sont à une distance $> \varepsilon > 0$, de l'axe réel. Supposons que D soit un domaine fermé quelconque n'ayant aucun point commun avec le segment Σ. Nous pouvons enfermer les parties de D voisines de l'axe réel et intérieures au cercle de rayon 2L qui a son centre à l'origine, dans des rectangles de hauteur $2h$ très petite, symétriques par rapport à l'axe réel; la section d'un de ces rectangles par l'axe réel sera un segment σ extérieur à Σ; si p est un entier suffisamment grand, les divers segments σ_p, conséquents de rang p de σ, seront tous extérieurs au cercle de centre O et de rayon 2L; donc, par raison de continuité évidente,

si l'on prend h suffisamment petit les domaines conséquents de rang p du rectangle construit sur σ seront tous extérieurs au cercle de centre O et de rayon L.

Donc la suite infinie des domaines conséquents des rectangles considérés tend uniformément vers l'infini; comme il en est de même pour les parties restantes de D, on voit bien que toutes



les suites de domaines conséquents de D tendent uniformément vers l'infini.

Considérons maintenant un point m du segment Σ; donnons-nous, d'autre part, une chaîne de substitutions conséquentes, ces substitutions n'étant pas ramifiées sur l'axe réel, comme nous le savons; si m n'appartient pas à l'ensemble E correspondant à la

chaîne donnée, m est le centre d'un cercle dont les conséquents, obtenus par cette chaîne, tendent vers l'infini; en effet, m appartient à un segment de l'axe réel dont les conséquents, obtenus par la chaîne donnée, tendent vers l'infini; construisant ensuite un rectangle de hauteur suffisamment petite sur le segment considéré, on achève le raisonnement comme plus haut.

On voit que l'ensemble E joue le même rôle que l'ensemble désigné par F dans nos études sur l'itération des fonctions rationnelles; mais tandis que F est toujours un ensemble parfait, E est un ensemble fermé pouvant ne contenir qu'un seul point; toutefois, il y a ici, en raison du caractère non univoque des substitutions itérées, une infinité non dénombrable d'ensembles analogues à E, dont la somme est encore un ensemble parfait (segment).

Étudions maintenant la suite des antécédents d'un domaine borné et fermé du plan complexe, et qui se déduisent du domaine initial D, en effectuant de proche en proche l'une ou l'autre des transformations

$$z = \Psi(z_1),$$
$$z = \overline{\Psi}(z_1),$$

obtenues en résolvant l'équation (4) par rapport à z. Soit D_{-n} un domaine antécédent de rang n de D; on passe de D à D_{-n}, en effectuant sur D une transformation qui s'exprime au moyen d'une relation que nous pouvons écrire

$$z_{-n} = \Phi_{-n}(z).$$

Les points critiques de la fonction Φ_{-n} sont, comme on le voit aisément, les conséquents jusqu'au rang $n-1$ des points critiques de la fonction $\Phi_{-1}(z)$; on a d'ailleurs

$$\Phi_{-1}(z) = \frac{(2k+k')z \pm k'\sqrt{z^2+4k(k+k')}}{2k(k+k')}$$

et les points critiques de cette fonction sont les deux points purement imaginaires

$$z = \pm 2i\sqrt{k(k+k')},$$

dont les conséquents tendent vers l'infini, et de manière que les

ordonnées tendent également vers l'infini. Le domaine D étant borné, il résulte de l'inégalité

$$y_{-n} < \frac{y}{k^n}$$

que les domaines D_{-n} tendent vers l'axe réel; à partir d'un certain rang, ces domaines ne contiennent donc plus de points critiques des fonctions $\Phi_{-n}(z)$; par suite, dans les domaines D_{-p}, p étant un entier convenable, les fonctions $\Phi_{-n}(z)$ ont toutes leurs branches uniformes, et ces branches de fonctions forment, au sens de M. Montel, une famille normale, puisque leurs parties imaginaires sont bornées et tendent même vers zéro; les fonctions limites de ces fonctions ne peuvent donc être que des constantes réelles; de plus, ces constantes sont représentées par des points du segment Σ, comme il résulte immédiatement du fait déjà démontré que les conséquents d'un domaine fermé ne contenant aucun point de Σ tendent uniformément vers l'infini. En définitive, les domaines D_{-n}, pour n infiniment grand, ont des dimensions évanouissantes, et tendent à se confondre avec des points du segment Σ.

Réciproquement, tout point μ de Σ est limite d'antécédents d'un point quelconque m du plan. Prouvons-le d'abord pour un point m de l'axe réel extérieur à Σ; or le $p^{\text{ième}}$ conséquent d'un segment σ contenant μ et contenu dans Σ finit par devenir aussi grand qu'on le veut; d'autre part, on peut choisir la chaîne des substitutions S et S' de manière que certains points des segments σ_n restent toujours intérieurs à Σ; dans ces conditions, le segment σ_n finit toujours par contenir, pour $n > p$, le point m ou son symétrique m' par rapport à l'origine. Donc il y a des antécédents de m ou de m' aussi près que l'on veut de μ; comme, d'autre part, on peut renfermer m et m' et un point quelconque q du plan dans un domaine fermé et borné D, et que les dimensions des domaines antécédents de D tendent vers zéro, μ est aussi limite d'antécédents de q. Ceci est tout à fait analogue à ce qui se passe pour les fonctions rationnelles.

On peut remarquer que les points critiques des fonctions $\Phi_n(z)$ $(n > 0)$ tendent vers le segment Σ; on ne peut donc pas appliquer sans précaution, à ces fonctions, la théorie des familles normales dans un domaine contenant des points de Σ.

Enfin je me contente d'énoncer sans démonstration la proposition suivante : les racines des équations

$$\Phi_n(z) = z$$

sont toutes réelles et ont pour points limites tous les points de Σ.

On pourra traiter d'une manière analogue divers exemples d'itération de fonctions algébriques ; mais une théorie générale de ce problème, même en se bornant aux substitutions à cercle fondamental, ne paraît pas facile. Nous pensons pouvoir y revenir ultérieurement.

SUR UN INVARIANT CINÉMATIQUE ET LE THÉORÈME DE LA COMPOSITION DES VITESSES;

Par M. G. KŒNIGS.

1° On démontre par des constructions élémentaires les propositions suivantes :

La projection de la vitesse d'un point M sur le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ qui joint un point fixe à ce point est égale à $\frac{dr}{dt}$, où r désigne la longueur du vecteur $\overrightarrow{OM}$.

Si un vecteur $\overrightarrow{OR}$ est la somme géométrique de deux autres $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, la vitesse $\overrightarrow{V_R}$ du point R est la somme géométrique des vitesses $\overrightarrow{V_P}$ et $\overrightarrow{V_Q}$ des points P et Q.

Cela résulte de la considération de la dérivée géométrique d'une somme.

2° Du rapprochement de ces deux théorèmes on déduit le suivant aussi connu que les deux premiers :

« La différence des projections sur un vecteur variable des vitesses de ses extrémités est égale à $\frac{dr}{dt}$, où r désigne la longueur du vecteur. »

Dans le cas où le vecteur a une longueur invariable, les projections sur lui des vitesses de ses extrémités sont égales. Ce théorème, comme on sait, est plein de conséquences et Mannheim en a tiré grand parti dans ses recherches de géométrie et de cinématique.

Mais il y a une remarque qui semble avoir échappé, c'est que puisque la différence des projections des vitesses des extrémités du vecteur a pour mesure $\frac{dr}{dt}$, cette différence est un *invariant* à l'égard du choix du système de référence. En exprimant que cet invariant a des valeurs égales pour deux systèmes de référence différents, on obtiendra un théorème.

3° Par exemple, on peut ainsi déduire *de la cinématique du point* le théorème de la composition des vitesses de la façon la plus directe.

Soient S et S′ deux systèmes de référence différents, M un mobile et P son point de coïncidence dans S; j'appelle aussi A un point *quelconque* de S.

Appliquons la remarque précédente aux points A et M en prenant successivement S′ et S pour systèmes de référence. Les vitesses par rapport à S′ seront marquées de l'accent; nous aurons

$$\text{proj.}_{AM} \text{ de } \overrightarrow{V'_M} - \text{proj.}_{AM} \text{ de } \overrightarrow{V'_A} = \text{proj.}_{AM} \text{ de } \overrightarrow{V_M} - \text{proj.}_{AM} \text{ de } \overrightarrow{V_A};$$

or $\overrightarrow{V_A}$ est nul car A appartient au système S, de plus les points A et P ont sur $\overrightarrow{AM}$ mêmes projections de vitesse puisque $\overrightarrow{AP}$ est un vecteur de longueur invariable, on a donc

$$\text{proj.}_{AM} \text{ de } \overrightarrow{V'_M} = \text{proj.}_{AM} \text{ de } \overrightarrow{V_M} + \text{proj.}_{AM} \text{ de } \overrightarrow{V'_P},$$

et comme AM est une droite quelconque, il en résulte que $\overrightarrow{V'_M}$ est la somme géométrique des vitesses $\overrightarrow{V_M}$ et $\overrightarrow{V'_P}$, ce qui est le théorème fondamental de la Cinématique.

On ne manquera pas d'être surpris qu'une démonstration aussi simple et aussi directe de ce théorème ait pu passer si longtemps inaperçue.

SUR UN THÉORÈME DE M. FATOU ;

Par M. G. VALIRON.

Dans une Note récente [1], j'ai démontré, pour les fonctions d'ordre fini, cette proposition de M. Fatou :

I. *Si $f(z)$ est une fontion entière, $u = \mathrm{M}(r)$ le maximum du module de $f(z)$ pour $|z| = r$, $r = \varphi(u)$ la fonction inverse de $\mathrm{M}(r)$, et α un nombre positif arbitrairement petit, l'équation*

$$f(z) = \mathrm{Z} \tag{1}$$

admet au moins une racine dans la couronne

$$\varphi(|\mathrm{Z}|) \leqq |z| \leqq \varphi(|\mathrm{Z}|)^{1+\alpha} \tag{2}$$

pourvu que le module de Z soit assez grand, $|\mathrm{Z}| > \mathrm{A}(\alpha)$.

Je vais donner ci-dessous une démonstration plus générale, n'utilisant plus le théorème de Weierstrass sur la composition en facteurs et dont il résulte que le théorème est encore vrai lorsque l'ordre est infini pourvu que la croissance de $\mathrm{M}(r)$ soit suffisamment régulière.

1. Je poserai

$$\log \mathrm{M}(r) = \mathrm{V}(r);$$

M. Hadamard a montré que la fonction $\mathrm{V}(e^{\mathrm{X}})$ est une fonction convexe de X [2], et il est bien connu que le quotient de cette fonction par X n'est pas borné, il en résulte que, h étant un nombre fini donné, le rapport

$$\frac{1}{h}\left[\mathrm{V}(e^{\mathrm{X}+h}) - \mathrm{V}(e^{\mathrm{X}})\right]$$

finit par dépasser tout nombre donné. Par suite, une relation de

---

[1] *Comptes rendus*, novembre 1921.

[2] *Voir* les *Leçons sur les fonctions entières* de M. Borel, 2e édition, Note IV.

la forme

(3) $$V(r) = V(R) + 2$$

entraîne que le rapport de r à R tend vers 1 lorsque R croît indéfiniment.

2. Supposons $f(0) = 0$, ce qui ne diminue pas la généralité et simplifie l'écriture, désignons par R la valeur de $\varphi(|Z|)$ et par R' un nombre inférieur au module de la première racine (racine de plus petit module) de l'équation (1). Pour

$$r = |z| \leqq R',$$

on peut écrire

(4) $$1 - \frac{f(z)}{Z} = e^{\psi(z)};$$

la fonction $\psi(z)$ étant nulle à l'origine et holomorphe dans le cercle $|z| \leqq R'$. La partie réelle de cette fonction $\psi(z)$ est au plus égale à

$$\log\left(1 + \frac{M(r)}{|Z|}\right),$$

quantité moindre que

$$\log 2M(r) = V(r) + \log 2,$$

pourvu que $M(r)$ et $|Z|$ soient supérieurs à 1.

Posons

$$f(z) = a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$
$$\psi(z) = b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots;$$

les b_n sont fonctions de Z. Les inégalités bien connues de M. Hadamard ([1]) montrent que l'on a, quel que soit l'entier n et quel que soit $|Z| > 1$,

$$|b_n| r^n \leqq 4[V(r) + \log 2] < 5V(r),$$

pourvu que r soit supérieur à un nombre fixe r_0. Cette inégalité a lieu en particulier pour $r = R' > r_0$, on en tire une limite supérieure de $|b_n|$ et par un calcul immédiat on arrive à l'inégalité

(5) $$\sum_{N+1}^{\infty} |b_n| r^n < 5V(R') \left(\frac{r}{R'}\right)^N \frac{R'}{R' - r},$$

([1]) Borel, *Fonctions entières*, p. 4.

valable quel que soit N et sous les seules conditions $|Z| > 1$, $r_0 < r < R'$.

D'autre part, en identifiant les deux membres de l'égalité (4) pour z voisin de zéro, on obtient

$$-(b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots) = -\log\left(1 - \frac{f(z)}{Z}\right) = \sum \frac{1}{p}\left[\frac{f(z)}{Z}\right]^p$$

et l'on peut ordonner le dernier membre suivant les puissances de z. Si l'on désigne par A le plus grand des nombres $|a_n|$, le second membre de cette égalité est majoré lorsqu'on y remplace $\frac{1}{Z}f(z)$ par

$$\frac{+Ar}{(1-r)|Z|},$$

le premier membre est donc majoré par

$$-\log\left[1 - \frac{Ar}{(1-r)|Z|}\right] = -\log\left[1 - \left(1 + \frac{A}{|Z|}\right)r\right] + \log(1-r);$$

nous avons donc, quel que soit n,

$$n|b_n| \leqq \left(1 + \frac{A}{|Z|}\right)^n - 1 < 2^n \frac{A}{|Z|},$$

pourvu que $|Z|$ soit supérieur à A. On en déduit que, quel que soit N, pourvu que $|Z| > A_1$ et $r > 1$, on a

$$(6) \qquad \sum_1^N |b_n| r^n < \frac{A}{|Z|}(2r)^N \frac{2r}{2r-1} < \frac{2A}{|Z|}(2r)^N.$$

Des inégalités (5) et (6), nous tirons

$$(7) \qquad \log\left|1 - \frac{f(z)}{Z}\right| < \frac{2A}{|Z|}(2r)^N + 5V(R')\left(\frac{r}{R'}\right)^N \frac{R'}{R'-r},$$
$$(|z| = r, \qquad R' > r)$$

pourvu que r et $|Z|$ soient supérieurs à un nombre fixe et quel que soit l'entier N.

3. Nous prendrons pour Z un nombre dont le module est supérieur au nombre fixe dont il vient d'être question et nous supposerons

que r est défini par l'inégalité (3). Nous supposerons que r est inférieur au module du premier zéro de l'équation (1), l'inégalité (7) sera vérifiée; or son premier membre dans lequel on peut prendre

$$\left|\frac{f(z)}{Z}\right| = e^2$$

est alors supérieur à 1. Il sera impossible que le second membre soit moindre que 1.

Supposons que la fonction $V(x)$ satisfasse à la condition suivante : *il existe un nombre fixe* λ *supérieur à* 1 *pour lequel on a*

(8) $$\lim_{x=\infty} \frac{\log V(x^\lambda)}{V(x)} = 0.$$

Si nous prenons, dans le second membre de (7), $R' = r^\lambda$ et r assez grand $[r > r(\beta)]$, le logarithme du second terme sera moindre que

$$\beta V(r) - N(\lambda - 1) \log r + \log 6,$$

β étant un nombre arbitrairement petit, ce second terme sera moindre que $\frac{1}{2}$ si l'on prend pour N la partie entière augmentée d'une unité de

$$\frac{3\beta V(r)}{2(\lambda - 1)\log r},$$

et si l'on suppose r assez grand $[r > r'(\beta)]$. Or, N étant ainsi choisi, le logarithme du premier terme est moindre que

$$\frac{2\beta}{(\lambda-1)} V(r) - V(R) + \log 2A = V(r)\left(\frac{2\beta}{(\lambda-1)} - 1\right) + 2 + \log 2A,$$

il est loisible de supposer que β a été pris assez petit pour que le coefficient de $V(r)$ dans cette expression soit négatif, et alors le premier terme est lui aussi inférieur à $\frac{1}{2}$ pour $r > r''(\beta)$. Le second membre de l'inégalité (7) est donc moindre que 1 si r est assez grand et si l'on suppose $R' = r^\lambda$. Cette hypothèse est donc inadmissible, il y a une racine de l'équation (1) dont le module est moindre que r^λ, c'est-à-dire moindre que $(Rk)^\lambda$, k étant aussi

voisin de 1 que l'on veut pourvu que R soit assez grand. Il est d'ailleurs clair que, si l'inégalité (8) est réalisée par une valeur de λ, elle a encore lieu pour les valeurs moindres, et nous avons ce résultat :

II. *Le théorème I est vrai lorsque* $M(r)$ *satisfait à la condition de croissance* (8).

Cette condition de croissance (8) est vérifiée pour toutes les fonctions d'ordre fini puisque, pour ces fonctions, le rapport $\dfrac{\log V(x)}{\log x}$ est bornée, tandis que $\dfrac{V(x)}{\log x}$ croît indéfiniment avec x comme on l'a vu au n° 1. On retrouve ainsi la proposition de ma Note citée sans faire appel au théorème relatif à la décomposition en facteurs des fonctions d'ordre fini.

Mais la condition (8) peut aussi être vérifiée pour des fonctions d'ordre infini. Il importe cependant de remarquer qu'elle limite visiblement la croissance de $V(x)$, ce n'est pas seulement une condition de régularité. Les fonctions d'ordre infini qui vérifient la condition (8) ont beaucoup de propriétés communes avec les fonctions d'ordre fini, le logarithme de $M(r)$ est asymptotiquement égal au logarithme du terme maximum de la série de Taylor définissant $f(z)$, etc. En outre, cette condition est aisée à vérifier, par exemple elle est réalisée, quel que soit λ, s'il existe un nombre entier p supérieur ou égal à 2 et un nombre fini K tels que l'on ait

$$(9) \qquad \overline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log_p V(x)}{\log x} < K, \qquad \underline{\lim_{x=\infty}} \frac{\log_{p-1} V(x)}{\log x} > K.$$

Ces conditions (9) sont vérifiées pour l'ordre fini ($p = 1$) et aussi pour toutes les fonctions d'ordre infini rencontrées jusqu'ici d'une façon naturelle.

4. Il est aisé de voir que le théorème I est encore vrai lorsque $V(x)$ satisfait à des conditions de *croissance normale*. M. Borel a montré ([1]) qu'on peut écrire des inégalités auxquelles toute fonction croissante satisfait, sauf peut-être dans une suite d'in-

([1]) *Acta mathematica*, t. XX.

tervalles d'étendue totale négligeable. On peut dire que la croissance est normale lorsque les inégalités en question ont lieu sans restriction. On peut donner une forme différente aux inégalités suivant la nature des applications. Dans le cas actuel on voit qu'*il suffit que l'on ait*

$$\log V(x') \leq V(x)^{\gamma} \tag{10}$$

si

$$\log x' = [1 + V(x)^{-\delta}] \log x, \tag{10'}$$

γ *et* δ *étant des nombres positifs tels que* $\gamma + \delta$ *soit moindre que* 1 *pour que le théorème I soit vrai.*

En effet, r étant lié à R par la relation (3), on prendra pour R′ le nombre x' défini par l'inégalité (10) lorsqu'on y fait $x = r$, on aura

$$1 - \frac{r}{R'} > 1 - r^{-\nu}, \quad \nu = V(r)^{-\delta}. \tag{11}$$

Si $\nu \log r$ est supérieur à $\frac{1}{2}$, l'expression (11) est supérieure à $1 - \frac{1}{\sqrt{e}}$, et dans le cas contraire elle est au moins égale à $\frac{\nu \log r}{2}$. Dans les deux cas on aura, à partir d'une valeur de r,

$$\frac{R'}{R' - r} < V(r)^{\delta}$$

et le second terme du second membre de (7) aura un logarithme moindre que

$$V(r)^{\gamma} - N \log r \, V(r)^{-\delta} + \delta \log V(r),$$

ce qui montre encore qu'en prenant pour N un nombre tel que

$$N \log r = V(r)^{\gamma + \delta + \varepsilon} \qquad (\gamma + \delta + \varepsilon < 1, \ \varepsilon > 0);$$

ce second terme sera moindre que $\frac{1}{2}$. Il en est de même du premier d'après cette expression de N. Le théorème de M. Fatou est donc encore vrai si la condition (10) est réalisée à partir d'une valeur de r. Cette condition (10) a l'avantage de ne pas limiter la croissance de $V(x)$, c'est une condition de croissance normale, une

fonction quelconque la vérifie sauf peut-être dans des intervalles dans lesquels $\log x$ varie très peu (on le constate en employant la méthode de M. Borel). Mais elle est plus difficile à vérifier pour une fonction donnée que la condition (8), à moins qu'elle ne se vérifie même en prenant $\log x' = \lambda \log x$, cas dans lequel on retombe sur une condition de l'espèce (8). On voit en outre aisément qu'une fonction vérifiant la condition (8), et en particulier une fonction $\log M(x)$ relative à une fonction entière d'ordre fini, peut ne pas être à croissance normale vis-à-vis de la condition (10).

5. On peut donner une proposition plus précise que l'énoncé I pour les fonctions pour lesquelles $V(x)$ satisfait à la condition suivante :

Il existe un nombre λ supérieur à 1 tel que

$$\lim \frac{\log x \log V(\lambda x)}{V(x)} = 0; \tag{12}$$

en prenant $R' = \lambda r$, le second terme du second membre de (7) aura son logarithme inférieur à

$$\beta \frac{V(r)}{\log r} - N \log\lambda + \log \frac{5\lambda}{\lambda - 1},$$

β étant arbitrairement petit (et r assez grand), et l'on déduit de là une valeur de N rendant le second membre de l'inégalité (7) inférieur à 1. Par suite :

III. *Lorsque la condition* (12) *est satisfaite, l'équation* (1) *a une racine au moins dans la couronne*

$$\varphi(|Z|) \leqq |z| \leqq (1+\varepsilon)\varphi(|Z|) \tag{13}$$

si petit que soit ε pourvu que $|Z|$ soit assez grand.

La condition (12) est vérifiée pour toutes les fonctions d'ordre fini pour lesquelles le quotient de $V(x)$ par $(\log x)^2$ finit par dépasser tout nombre donné, elle l'est encore pour toutes les fonctions d'ordre infini pour lesquelles les conditions (9) du n° 3 sont satisfaites, elle l'est aussi pour les fonctions d'ordre nul que l'on rencontre naturellement.

L'inégalité (13) donne la précision que l'on obtient par la méthode de M. Fatou qui consiste à utiliser les propriétés des suites normales de fonctions. Le résultat que l'on obtient ainsi est en effet le suivant :

IV. *Le théorème III est vrai pour toute fonction admettant un point singulier isolé essentiel à l'infini, sauf peut-être pour des valeurs de Z qui peuvent être enfermées dans une suite de cercles C_n du plan des Z tels que c_n étant l'affixe du centre et γ_n le rayon de C_n, on ait*

$$\lim \frac{c_n}{c_{n+1}} = 0, \qquad \lim \frac{\gamma_n}{|c_n|} = 0.$$

Dans le cas des fonctions entières, cette proposition s'obtient directement par l'application du théorème de Schottky. Considérons les deux équations

$$f(z) - Z = 0, \qquad f(z) - Z' = 0$$

et supposons que l'on ait

$$|Z'| \geqq |Z|, \qquad \frac{1}{K} \leqq \left|\frac{Z'-Z}{Z}\right| \leqq K \qquad (K > 2).$$

Si l'on suppose que les deux équations précédentes n'ont pas de racines dans le cercle

$$(14) \qquad |z| \leqq (1+\varepsilon)\varphi(|Z|) = B,$$

la fonction

$$F(z) = \frac{f(z)-Z}{Z'-Z}$$

ne prendra pas les valeurs 0 et 1 dans ce cercle, $|F(0)|$ est compris entre $\frac{1}{K}$ et K et $|F(0) - 1|$ est supérieur à $\frac{1}{K}$. D'après le théorème de Schottky, on aura dans le cercle (14)

$$\log|F(z)| < \theta(K)\frac{B}{B-|z|},$$

$\theta(K)$ étant un nombre fini ne dépendant que de K. En particulier,

pour

$$|z| = \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right)\varphi(|Z|),$$

on devra avoir

$$|F(z)| < \theta_1(K, \varepsilon),$$

ce qui est en contradiction avec le théorème de M. Hadamard du n° 1. L'hypothèse faite est donc absurde; si $|Z|$ étant suffisamment grand, l'équation (1) n'a pas de racine dans le cercle (14), cette circonstance ne peut plus avoir lieu dans le domaine

$$\frac{1}{K} \leqq \left|\frac{Z' - Z}{Z}\right| \leqq K, \qquad |Z'| > |Z|.$$

Comme K peut être pris arbitrairement grand, la proposition IV est établie [1].

Cette proposition est plus complète que celle à laquelle conduirait la méthode élémentaire dans le cas le plus général; la méthode élémentaire permet bien d'affirmer que la proposition I est vraie pour toute fonction entière, mais à la condition d'exclure éventuellement les Z appartenant à certaines couronnes correspondant aux x pour lesquels la croissance de $V(x)$ n'est pas normale. L'épaisseur de ces couronnes peut être très grande.

---

[1] Cette démonstration ne diffère que dans les détails de celle que m'a indiquée M. Fatou.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DE DONDER (TH.). — *La Gravifique einsteinienne.* 1 vol. gr. in-4 de 198 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie. 1921. Prix : 20 fr.

Ce magnifique Ouvrage est une synthèse de la gravifique einsteinienne. Il procède du général au particulier, établissant, dès les premières pages, les équations générales d'Einstein auxquelles sont rattachés les divers phénomènes électromagnétiques massiques et matériels que la théorie a, dès l'abord, englobés.

Le substratum fondamental est l'espace-temps caractérisé par la forme différentielle quadratique

$$\delta s^2 = \sum\sum g_{\alpha\beta}\, \delta x_\alpha\, \delta x_\beta.$$

Un tel espace-temps admet l'invariant de courbure C, et c'est en extrêmant une intégrale

$$\int (a + b\,C + \Lambda)\, d\omega,$$

où a et b sont des constantes, cependant que Λ est une fonction caractéristique imposée par la nature du problème physique considéré, qu'on arrive aux dix équations d'Einstein auxquelles les dix fonctions $g_{\alpha\beta}$ du δs^2 précédent devront satisfaire. Pour que le problème soit *bien posé* (au sens de M. J. Hadamard), on assujettira les $g_{\alpha\beta}$ et leurs dérivées à des conditions aux limites, à des conditions initiales et à des *conditions de continuité.*

La solution des problèmes de la Physique mathématique se réduit ainsi à la recherche de ce δs^2. C'est là l'essentiel des théories d'Einstein, et c'est lumineusement simple. On peut regretter que cette simplicité de principe n'aille pas sans développements analytiques parfois fort compliqués, et cela entraîne des divergences dans les divers modes d'exposition.

On peut recourir à des calculs, tels que le calcul tensoriel, qui

sont d'une apparence relativement brève, mais auxquels il faut s'habituer et qui finalement exigent, pour aller jusqu'aux résultats numériques, qu'on revienne aux aspects mathématiques ordinaires. M. De Donder, en général, procède à la manière habituelle; il est aussi peu symboliste que possible. Les longs calculs sont rejetés, en notes, à la fin de l'Ouvrage dont ils n'interrompent point l'ordonnance et j'imagine que les plus ardents partisans du symbolisme ne seront point fâchés de voir que leurs procédés se trouvent vérifiés par de tels développements; remarquons aussi que le savant mathématicien et physicien belge n'introduit aucune restriction concernant les $g_{\alpha\beta}$ et qu'il conserve au discriminant g sa forme générale.

Le souci de la simplicité a d'ailleurs conduit l'auteur à faire usage de nouvelles variables

$$\gamma^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta}\sqrt{-g},$$

rencontrées par son élève H. Vanderlinden au cours de ses calculs; l'importance de ces variables avait déjà été remarquée par Lorentz; les $g^{\alpha\beta}$ sont les mineurs, divisés par g, du déterminant g des $g_{\alpha\beta}$.

Remarquons bien que si M. De Donder ne juge pas à propos d'isoler un certain calcul tensoriel, il n'en attache pas moins une importance de premier ordre à la notion de tenseur. Mais ici, cette notion se présente d'elle-même en extrêmant l'intégrale fondamentale rappelée ci-dessus.

En généralisant un groupe de *quatre identités* déduites par Hilbert, du Calcul des variations et de la Théorie des invariants, M. De Donder obtient aussi le théorème du *tenseur asymétrique* ou de la *force généralisée;* c'est l'extension complète du théorème des quantités de mouvement et de l'énergie.

Une propriété fondamentale des équations gravifiques d'Einstein est leur caractère invariant vis-à-vis de tout changement de variables. Cette invariance a de nombreuses conséquences; ainsi l'auteur profite du caractère arbitraire de la transformation pour mettre en relation avec les équations gravifiques une certaine équation aux dérivées partielles dont les caractéristiques sont des rayons gravifiques. Il s'agit, de manière plus précise, de bicaractéristiques, de longueur nulle, de J. Hadamard.

Dans le cas du champ massique proprement dit, les équations prennent la forme

$$2b\, G_{\alpha\beta}\sqrt{-g} = \mu\left(u_\alpha u_\beta - \frac{1}{2} g_{\alpha\beta}\right), \qquad u_\alpha = \sum_\beta u^\beta g_{\beta\alpha},$$

où les $G_{\alpha\beta}$ sont des composantes relatives à la courbure de l'espace-temps et les u^β des vitesses généralisées. La physionomie, d'abord indéterminée de A est ainsi précisée d'une manière particulièrement tangible. Les extrémales de l'espace-temps se précisent également sous des formes analogues à celles de la Mécanique hamiltonienne. De tels résultats se séparent aisément dans l'espace et le temps ordinaires, grâce à une covariance spéciale au champ massique. La relation einsteinienne qui unit la masse à l'énergie est ensuite étendue à son tour.

Si le champ gravifique est produit par un champ électromagnétique, nous tombons sur une autre particularisation tout aussi tangible de A, mais peut-être plus remarquable encore quant à la symétrie. Ici, A dépend des $g_{\alpha\beta}$ et de six fonctions $M_{\alpha\beta}$. Il y a là une théorie qui a son esthétique propre, qui est isolable, sur laquelle les efforts, très originaux, de M. De Donder ont donné des travaux publiés en Hollande pendant la guerre et non sans grande peine. Dans l'ordre historique, les propriétés gravifiques naissent par généralisation des propriétés électromagnétiques et les rayons gravifiques dont il était question tout à l'heure ont eu vraisemblablement les rayons lumineux pour modèles. Dans les deux cas, nous retrouvons des surfaces caractéristiques et des systèmes canoniques absolument analogues.

L'auteur étend ainsi, au champ gravifique, les théorèmes de Fermat et de Straubel.

Signalons aussi que le principe d'Hamilton peut donner indifféremment les équations gravifiques ou les équations électromagnétiques suivant les variables sur lesquelles portent les variations.

Quant aux covariances du champ électromagnétique, il y aurait beaucoup de choses à en dire; leur histoire notamment vaudrait d'être fixée. Ainsi une première invariance se manifeste dans ce que M. De Donder appelle la « forme de Bateman »

$$\underset{\alpha\beta}{S}\, M_{\alpha\beta}\, \delta x_\alpha\, \delta x_\beta.$$

Or ce sont là des formes différentielles particulièrement étu-

diées en France par MM. Goursat et Cartan. Intervenant dans des intégrales doubles, elles se rattachent aux invariants intégraux de l'illustre Henri Poincaré et elles donnent des formules du type stokien si bien qu'en partant de tels points on pourrait montrer que le rôle des géomètres français dans l'élaboration des théories einsteiniennes est loin d'être aussi inexistant qu'on le croit en Allemagne.

Le champ matériel résulte de la superposition d'un champ massique et d'un champ électromagnétique : la fonction Λ provient de la réunion de deux parties précédemment étudiées, d'où, au premier abord, une plus grande complication ; mais les choses redeviennent particulièrement simples quand la matière et l'électricité sont animées des mêmes mouvements, ce qui peut être une des raisons justifiant une théorie de la matière à substratum électrique.

D'ailleurs les formules classiques relatives aux électrons, si utiles dans la théorie des quanta, sont ici généralisées dans le champ matériel.

Les champs gravifiques à symétrie sphérique sont caractérisés par un δs^2 où figurent des coordonnées polaires spatiales. Le fait de s'arranger à annuler les coefficients d'un tel δs^2, sauf celui de δr^2, ou sauf celui de δt^2, met en évidence les variations d'étalons qui se produisent dans de tels champs ; ces variations sont alors très élémentairement saisissables. Le cas du champ extérieur à la sphère massique correspond à la force centrale newtonienne de la Mécanique classique ; mais il y a aussi un problème intérieur pouvant se compliquer d'une électrisation superficielle. On arrive ainsi à l'électron de Poincaré sans que les δs^2 soient essentiellement différents ; c'est l'analogie entre un système planétaire et un système intra-atomique.

Quant aux phénomènes gravifiques d'Einstein, qui n'a entendu parler du mouvement du périhélie de Mercure, de la déviation de la lumière stellaire au voisinage du Soleil et de l'influence du champ gravifique de celui-ci sur la position des raies spectrales. M. De Donder discute les théorèmes des forces vives et des aires au point de vue einsteinien et il effectue le passage à la limite qui permet de retrouver la loi de Newton, chose souvent négligée. Pour le déplacement des raies spectrales, on aboutit aux vérifications effectuées l'an dernier par MM. Pérot, Buisson, Fabry.

Et, de sa théorie générale, l'auteur déduit aisément le résultat d'Einstein concernant l'Univers stellaire : *espace et temps sont finis.* La constante a du début intervient dans cette grandiose question.

Un Chapitre des plus intéressants est écrit sur le théorème de Coriolis étendu au cas d'un observateur einsteinien. Alors que la Mécanique ordinaire est généralisée plutôt en la notion de champ qu'en la notion de force, il est cependant remarquable qu'il y ait ici une extension simple de la notion d'accélération. Et il y a bien un théorème de Coriolis dans l'espace-temps, lequel peut être scindé ensuite dans l'espace et le temps ordinaires.

L'espace-temps de Minkowski, avec son

$$\partial s^2 = -\partial x^2 - \partial y^2 - \partial z^2 - c^2 \partial t^2,$$

nous ramène enfin au champ électromagnétique de Maxwell-Lorentz et à la relativité restreinte. C'est un simple jeu de faire rentrer ces considérations dans les formules de la gravifique générale, telle qu'elle est conçue par M. De Donder.

La réflexion sur un miroir mobile met en évidence la pression d'origine électromagnétique. Les propriétés de covariance renseignent immédiatement sur la variabilité de la masse.

Et l'auteur nous donne encore une étude approfondie de l'électron de Poincaré plongé dans un champ de Minkowski.

Vingt-trois notes terminent l'Ouvrage. Certaines n'ont pour but que de désencombrer le texte de développements de pur calcul, mais d'autres sont des exposés de recherches des plus originales. Citons celles qui se rapportent au champ massique sphérique, au problème intérieur ou extérieur de Schwarzschild, à l'électron de Poincaré, aux dimensions et interprétations des symboles employés dans tout le cours de l'Ouvrage. Cette dernière note nous rappelle sans cesse à la réalité physique et il faudra s'y reporter bien avant d'y arriver dans l'ordre de la pagination.

L'Ouvrage de M. De Donder est, à la fois, Ouvrage d'initiation, de synthèse, de mise au point et d'érudition. Ceux qui voudront apporter quelques progrès à ces si captivantes théories électromagnétiques et gravifiques ne pourront guère se dispenser de s'en bien pénétrer.

A. Buhl (Toulouse).

ROY (Louis). — Cours de Mécanique rationnelle *à l'usage des élèves de l'Institut électrotechnique et de Mécanique appliquée et des candidats au Certificat de Mathématiques générales* (Cours de l'Institut électrotechnique et de Mécanique appliquée de l'Université de Toulouse). Gr. in-8°, vi-259 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1921.

Comme l'indique le titre de l'Ouvrage, le but que s'est proposé M. Roy est de mettre ses lecteurs à même d'aborder avec fruit l'étude de l'Électricité industrielle et de la Mécanique appliquée. En particulier, ce Livre servira d'introduction toute naturelle au Cours de *Statique graphique et Résistance des matériaux* du même Auteur, paru récemment et analysé ici même (¹).

Ce Volume s'adresse donc à des débutants, et plus spécialement à de futurs ingénieurs. C'est pourquoi M. Roy s'en tient à l'exposé des éléments essentiels de la Mécanique, en vue surtout des applications pratiques. Mais, pour être élémentaire, l'Ouvrage n'en est pas moins rigoureusement scientifique : c'est avec raison que l'Auteur a pensé qu'il ne devait pas éluder certaines questions purement théoriques et touchant aux principes : on les trouvera exposées avec toute la précision et la netteté désirables. Du reste, les principes et les théories générales sont toujours illustrés par quelques exemples simples, souvent poussés jusqu'aux calculs numériques.

Après avoir consacré à la Théorie générale des vecteurs un Chapitre préliminaire, et traité le problème de la réduction d'un système de vecteurs, tant au point de vue analytique qu'au point de vue géométrique, l'Auteur aborde la Mécanique proprement dite, qu'il divise en quatre parties, d'inégale importance, consacrées respectivement à la *Cinématique du point*, à la *Cinématique du corps solide*, à la *Dynamique du point* et à la *Dynamique des systèmes*.

Cinématique. — La définition des vecteurs *vitesse* et *accélération* d'un point, par rapport à un système de référence et de leurs composantes, est accompagnée de quelques applications de ces notions élémentaires à l'étude du mouvement d'un point.

(¹) Voir *Bulletin* de novembre 1921.

La Cinématique du corps solide débute par la définition des mouvements simples de translation, de rotation; on donne ensuite les théorèmes généraux de composition des vitesses et des accélérations. Le problème de la composition des vitesses, dues à un nombre quelconque de rotations et de translations, se trouve, en quelque sorte, résolu d'avance, grâce à l'étude générale des systèmes de vecteurs faite au Chapitre préliminaire : c'est ainsi qu'on arrive immédiatement à la notion du mouvement hélicoïdal instantané.

Le mouvement d'une figure plane dans son plan est une des applications les plus instructives et les plus intéressantes de la Cinématique; aussi un Chapitre lui est-il consacré : les propriétés essentielles du centre instantané de rotation y trouvent leur application à quelques exercices.

Dynamique du point. — Le prélude de toute étude de la Dynamique consiste dans l'énoncé des *postulats* de cette Science. L'Auteur prend le plus grand soin de les exprimer aussi clairement et simplement que possible; il définit d'une façon précise ce que l'on doit entendre par *trièdres fixes*, et donne la notion de *masse*, celle de *force*, et la véritable signification de l'équation fondamentale $F = m\gamma$. Il en déduit les équations différentielles générales du mouvement d'un point et indique dans quelles conditions le problème du mouvement se trouve déterminé sans ambiguïté par les conditions initiales.

Puis il étudie l'équilibre, et insiste à ce propos, conformément à son programme de précision, sur les conditions analytiques de régularité qui doivent être remplies par les forces pour que la réciproque des conditions d'équilibre soit vraie.

Le mouvement et l'équilibre relatifs sont l'objet d'une étude sommaire, illustrée de quelques exemples simples.

Des théorèmes généraux que l'on déduit des équations de mouvement, celui des « forces vives » nécessite l'introduction préalable de la notion de *travail :* la définition et l'expression analytique du travail d'une force quelconque sont suivies de l'étude du cas important où il y a fonction de forces. Un champ de forces constant, celui d'une force centrale fonction de la distance, celui du champ magnétique créé par un courant rectiligne, sont donnés

comme exemples de ce cas, auquel le théorème des forces vives fournit une intégrale du mouvement.

Après ces généralités, vient l'étude effective du mouvement d'un point matériel *libre*. Dans quelques cas simples, le problème s'intègre par quadratures. Le mouvement rectiligne d'un point soumis à une attraction centrale proportionnelle à la distance, ou en raison inverse du carré de la distance, la chute rectiligne d'un point pesant dans un milieu résistant, le mouvement curviligne d'un point pesant dans le vide, et celui d'un point soumis à une attraction (ou répulsion) proportionnelle à la distance en fournissent des exemples.

L'Auteur passe ensuite au cas d'un point matériel soumis à des *liaisons*, tel qu'un point assujetti à se mouvoir sur une surface ou sur une courbe : il prend dès l'abord le cas où il y a frottement, et donne les lois élémentaires approchées du frottement de glissement, tant au repos que dans le mouvement. Il traite l'équilibre et le mouvement d'un point sur une surface avec ou sans frottement : l'étude complète du mouvement rectiligne d'un point pesant sur un plan incliné, avec frottement, donne lieu à une discussion intéressante. Passant au cas d'un point assujetti à rester sur une courbe, il étudie, comme cas d'équilibre relatif, le régulateur circulaire et le régulateur parabolique. Ensuite le mouvement d'un point sur une courbe fixe est traité complètement lorsque la force ne dépend que de la position : c'est ce qui a lieu pour le cas d'un point pesant mobile sur une courbe fixe, dont le pendule simple circulaire constitue l'exemple classique. Le problème du pendule simple soumis à une résistance de milieu proportionnelle à la vitesse termine la Dynamique du point.

Dynamique des systèmes. — La Dynamique des systèmes débute par l'exposé des trois « théorèmes généraux », savoir les théorèmes des quantités de mouvement projetées, des moments des quantités de mouvement, et des forces vives. Les deux premiers offrent le précieux avantage d'éliminer les forces intérieures. Dans le troisième, au contraire, leur travail intervient effectivement, mais dans le cas où il y a fonction de forces, ce théorème fournit une intégrale du mouvement.

Un Chapitre traite ensuite des centres de gravité et moments d'inertie, et de leurs propriétés essentielles.

Puis on aborde la Statique du corps solide : si un solide *libre* est en équilibre, les forces qui lui sont appliquées constituent un système nul; mais la réciproque n'est vraie, et M. Roy ne manque pas d'y insister, comme dans le cas du point, que si les forces remplissent certaines conditions de régularité. Le cas d'un solide soumis à des *liaisons* est étudié d'abord directement, au moyen de la « méthode des réactions » qui consiste à rendre le solide libre, en introduisant les forces de liaisons comme inconnues auxiliaires : elle offre l'avantage, comme on le voit sur plusieurs exemples, de déterminer effectivement ces forces de liaisons, ce qui est souvent fort utile.

Mais la méthode des réactions n'est pas la seule, ni la plus directe pour l'étude de la Statique. Celle du *travail virtuel* est bien plus générale et s'applique à tous les systèmes à liaisons sans frottement. M. Roy a tenu à exposer cette méthode dans ce qu'elle a d'essentiel, et à en montrer les applications. Il ne démontre, ici, le théorème du travail virtuel que pour le cas des liaisons bilatérales et indépendantes du temps, qui est le plus usuel en Mécanique élémentaire; on sait, du reste, qu'il a récemment, dans un intéressant article (¹), mis au point la démonstration analytique rigoureuse pour le cas de liaisons quelconques, bilatérales ou unilatérales, dépendant ou non du temps.

Après l'étude de l'équilibre, on arrive à celle du mouvement des systèmes. Le cas d'un solide mobile autour d'un axe fixe est traité en détail : il est superflu d'insister sur son importance pratique, puisque c'est dans ce cas que rentrent toutes les parties tournantes des machines; le pendule composé, le cadre d'un galvanomètre en sont aussi des exemples. A propos du mouvement pendulaire, l'Auteur étudie l'effet, sur un oscillateur, d'un couple perturbateur périodique, ce qui l'amène à dire quelques mots de la résonance.

Une question fort importante, trop souvent passée sous silence

(¹) L. Roy, *Sur les équations générales de la Mécanique, le théorème de d'Alembert et celui du travail virtuel* (*Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, t. XII, 1920, p. 93-106).

dans les traités élémentaires, est celle des *percussions et chocs*. M. Roy n'a pas voulu laisser cette question de côté. Après avoir indiqué les théorèmes généraux, il traite l'exemple simple du choc direct de deux corps, au moyen duquel il définit les deux cas extrêmes des corps parfaitement mous et des corps parfaitement élastiques. Le galvanomètre balistique lui fournit un exemple de percussion sur un solide mobile autour d'un axe fixe.

Un dernier Chapitre est consacré à l'équilibre des fils. L'Auteur donne la construction de Varignon pour l'équilibre du polygone funiculaire : cette construction est, comme on sait, la base fondamentale de la Statique graphique. Passant à la limite il étudie l'équilibre d'une courbe funiculaire, et indique les équations générales d'équilibre d'un fil ; il en donne les deux exemples classiques, fil pesant homogène et parabole des ponts suspendus. Il termine par l'examen du fil tendu sur une surface, et en particulier suivant la section droite d'un cylindre (frein à corde).

Telles sont les questions traitées dans ce Cours. Je ne veux pas terminer ce résumé sans dire que l'Auteur a apporté dans sa rédaction le soin minutieux de la forme et la haute clarté d'exposition qui lui sont habituels. H. Vergne.

COLLECTION DES MAITRES DE LA PENSÉE SCIENTIFIQUE, publiée par M. Maurice Solovine. Paris, Gauthier-Villars : *Éléments de Géométrie*, par Alexis-Claude Clairaut ; 2 vol. in-16. 1920 ; – *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal*, par Lazare Carnot ; 2 vol. in-16. 1921.

On ne saurait trop insister sur les services qu'est appelée à rendre la Collection dirigée par M. Solovine en présentant au public, sous une forme maniable et élégante, quelques-unes des œuvres maîtresses de la Science du passé, devenues introuvables dans les librairies. La publication d'une collection de ce genre ne va pas, cependant, sans une petite difficulté. Tout naturellement, on éditera, de préférence, les ouvrages les plus accessibles au grand public et ceux dont les titres sont restés le plus connus. Seront-ce toujours ceux qui, comme l'annoncent les éditeurs,

« marquent les étapes successives de la construction lente et laborieuse de l'édifice scientifique »?

Cette question, précisément, peut être posée à propos de deux remarquables œuvres du XVIIIe siècle, récemment publiées par M. Solovine.

Clairaut fut un astonome distingué et l'un des grands géomètres du XVIIIe siècle. C'est grâce à ses travaux que fut définitivement introduite dans la Science l'étude générale des courbes gauches. Les grandes idées que Clairaut a mises en mouvement n'apparaissent pas, cependant, dans ses *Éléments de Géométrie*, bien que cet Ouvrage ait été jadis très populaire. Les *Éléments* sont une œuvre pédagogique. L'auteur se propose d'initier à la Géométrie les personnes rebelles à la logique en présentant les propriétés des figures sous une forme intuitive et concrète et en illustrant ses énoncés par des exemples empruntés à la vie pratique. Pareille tentative n'est pas une nouveauté, comme pourrait le faire croire la Notice de M. Solovine. Beaucoup d'Ouvrages du même type avaient en effet été publiés au XVIe et au XVIIe siècle, et l'on retrouve dans les *Éléments* bien des exemples empruntés par Clairaut à la tradition de ses devanciers. Sans doute le Traité de Clairaut est-il particulièrement clair et bien construit. Encore ne saurait-il donner une idée nette de la grande place qu'occupe son auteur dans la science mathématique; et l'on remarquera même que Clairaut y énonce, sur la déduction mathématique et le rôle de la logique, certaines opinions qui n'ont pas été suffisamment méditées.

Les *Réflexions sur la Métaphysique du Calcul infinitésimal* (1797) ont eu, en leur temps, un grand retentissement. Et, certes, si l'on se remémore la masse des écrits, aussi obscurs qu'inutiles, qu'a suscités au XVIIIe siècle la question de l'infini (*voir* notamment le récent Ouvrage de F. Cajori : *A history of the conceptions of limits and fluxions in Great Britain* 1919), on ne pourra manquer d'admirer la pensée précise, l'expression juste et concise, qui caractérisent l'Ouvrage de Carnot. Toutefois, il ne faudrait pas croire que cet Ouvrage ait eu une influence très marquée sur la pensée scientifique. Lazare Carnot a fait d'importants

travaux de Mécanique, et il a été, en Géométrie, un grand initiateur. Mais, en matière de Calcul infinitésimal, il n'est pas un homme de progrès. Nous constatons en effet qu'il n'a saisi ni la portée ni le sens profond des grands travaux de son contemporain Lagrange. Carnot en est resté à cette vieille idée que l'Algèbre et son prolongement, l'Analyse infinitésimale, ne sont que des instruments de calcul servant à former et à étudier des équations (*cf.* t. I, p. 17). Aussi la théorie des fonctions n'est-elle pour lui que l'*une* des méthodes imaginée pour suppléer à la méthode d'exhaustion des anciens et aux procédés de calcul de Leibniz. Et, la théorie des fonctions ainsi comprise, Carnot ne l'apprécie guère, parce qu'elle nous oblige, dit-il, à changer les notations et locutions auxquelles nous sommes habitués, ce qui est toujours un inconvénient (t. II, notamment p. 58 et 66). Ce défaut de perspicacité enlève quelque valeur à un ouvrage qui, par contre, nous renseigne admirablement sur l'état des méthodes de l'Analyse dans la seconde moitié du XVIIIe siècle.

PIERRE BOUTROUX.

MÉLANGES

L'ŒUVRE MATHÉMATIQUE DE GEORGES HUMBERT, QUELQUES MOTS SUR CAMILLE JORDAN,

PAR M. HENRI LEBESGUE [1].

Lorsqu'en 1912, Georges Humbert fut nommé professeur de mathématiques au Collège de France, ses travaux nombreux, variés et importants, qui lui avaient valu d'être élu membre de l'Académie des Sciences en 1901, avaient attiré sur lui, depuis

(1) Extrait de la leçon inaugurale de mathématiques donnée au Collège de France le 6 janvier 1922.

Humbert (Marie-Georges), né à Paris le 7 janvier 1859, est mort à Paris, le 22 janvier 1921. Jordan (Marie-Ennemond-Camille), né à Lyon le 5 janvier 1838, est mort à Paris, le 21 janvier 1922.

longtemps, l'attention des mathématiciens du monde entier. Après 1912, malgré une longue maladie, son activité scientifique ne s'est pas ralentie; dans les derniers mois de sa vie, il rédigeait encore un Mémoire qui ne fut publié qu'après sa mort, dans le premier fascicule du *Journal de Mathématiques* de 1921.

Georges Humbert a publié plus de 140 Notes et Mémoires, souvent étendus. Une courte séance comme celle-ci ne saurait suffire pour commenter une œuvre aussi vaste. Je sais que des analyses dignes de l'œuvre d'Humbert et des études sur sa vie sont en préparation et seront publiées d'ici peu au *Journal des Savants* et comme préface au *Recueil des travaux de Georges Humbert;* je veux rappeler ici simplement quelques-uns des traits les plus caractéristiques du talent de mon prédécesseur en tant que mathématicien et en tant que professeur.

Dans toute œuvre véritable se révèle une continuité de pensée qui permet de grouper tout naturellement les divers Mémoires autour de quelques idées directrices, de quelques préoccupations dominantes. Dans cette esquisse rapide, je me bornerai au groupement qui s'impose tout d'abord : recherches antérieures à 1898, relatives à l'étude des fonctions algébriques; recherches postérieures à 1898, relatives à la théorie et à l'utilisation des fonctions abéliennes singulières.

Excepté quatre ou cinq recherches qui relèvent de la géométrie pure et de la géométrie différentielle, les travaux de la première époque, qui sont consacrés à des études sur les courbes et les surfaces algébriques, sont faits toujours, et c'est ce qui les caractérise, à l'aide de ce qu'on appelle maintenant des *fonctions uniformisantes*. Humbert signale à plusieurs reprises qu'il avait été très frappé en constatant quel ordre, quelle clarté, quelle généralité avaient été obtenus dans l'étude des courbes de genre 1 à partir du moment où l'on avait exprimé les coordonnées d'un point quelconque de ces courbes à l'aide des fonctions elliptiques, et que c'est cette constatation qui l'a toujours guidé.

Par cette méthode, en effet, Clebsch et ses continuateurs avaient réussi à grouper et à étendre de nombreuses propositions géométriques, particulières et disparates, semblait-il, que l'on n'avait estimé jusque-là que pour leur seul caractère esthétique. D'ailleurs, au lieu d'admirer leur véritable beauté, on était plutôt

séduit par leur mystère; maintenant, nous admirons encore ces propositions, mais notre admiration est fondée sur nos connaissances et non plus sur notre ignorance.

Humbert s'est efforcé de réaliser un progrès analogue pour d'autres catégories de courbes, pour certaines catégories de surfaces; et il y a pleinement réussi. Mais pourquoi, diront certains, s'occuper de catégories spéciales de courbes, pourquoi ne pas étudier les courbes les plus générales? Poincaré n'a-t-il pas montré qu'elles étaient toutes uniformisables à l'aide des fonctions fuchsiennes? Parce que, malgré tout ce que nous a appris Poincaré, nous ne connaissons que quelques propriétés des fonctions fuchsiennes, d'où nous ne pouvons espérer tirer que peu de propriétés géométriques. C'est pourquoi Humbert n'a guère utilisé les fonctions fuchsiennes qu'on aurait pu penser tout d'abord devoir être son principal instrument de recherche. Il en a déduit cependant des résultats intéressants appartenant à cette géométrie énumérative étudiée par tant de mathématiciens depuis Abel, Jacobi et Riemann jusqu'à Halphen. Dans ces questions déjà si travaillées, grâce en particulier aux fonctions fuchsiennes, Georges Humbert obtient des résultats nouveaux; il lui arrive aussi de retrouver des résultats anciens que parfois il complète, parfois il rectifie.

Le plus souvent, Humbert utilise des fonctions uniformisantes plus particulières. Qu'on ne s'y trompe pas d'ailleurs, à cause de leur puissance et de leur généralité même, les transcendantes fuchsiennes ne sont immédiatement adaptées qu'à la recherche des propriétés générales des courbes. Or, le but géométrique que l'on poursuit n'est pas celui-ci, mais bien plutôt la recherche de propriétés particulières spéciales à des familles intéressantes de courbes.

L'outil véritable est constitué par les fonctions qui permettent l'uniformisation de ces courbes particulières; encore faut-il que ces fonctions nous soient bien connues. Mieux nous les connaissons, mieux nous pouvons étudier les courbes considérées; c'est ainsi que les unicursales sont plus complètement étudiées que les courbes de genre 1.

On comprend donc pourquoi Georges Humbert a fait porter ses efforts sur les variétés qui se peuvent uniformiser à l'aide de

diverses catégories de fonctions assez bien connues : fonctions elliptiques, fonctions abéliennes, fonctions hyperabéliennes de M. Picard. Je ne puis songer à entrer dans le détail des très nombreux résultats obtenus : les uns appartiennent à la géométrie énumérative, les autres, très élégants et qu'il faudrait tous citer, sont des conséquences ingénieuses du théorème d'Abel; d'autres enfin sont relatifs à des surfaces particulières, telles que la surface de Kummer aux multiples spécialisations. De tous ces beaux résultats, ce sont les derniers que j'apprécie encore le plus, car, de tous, ils me paraissent les plus utiles. En dehors de surfaces aussi banales que les quadriques, nous ne connaissons, en effet, presque aucune surface; j'estime que des exemples précis, bien observés, complètement étudiés comme ceux de Georges Humbert, sont indispensables pour éveiller notre intuition, pour aiguiller l'étude des surfaces qui, sans eux, risquerait de s'égarer dans des généralités sans application.

Pour citer au moins un résultat, je rappelle que la classification des courbes tracées sur une surface donnée est un problème très délicat et qu'il avait fallu toute la maîtrise d'Halphen pour traiter le cas où la surface est une quadrique. Humbert a donné la classification complète des courbes de la surface de Kummer; voici le théorème fondamental à cet égard : « L'équation de la courbe complète d'ordre $4p$ commune à une surface de Kummer K et à une surface algébrique de degré p s'obtient en égalant à zéro une fonction θ, normale, paire, d'ordre $2p$, à caractéristique nulle; et réciproquement.

Les courbes tracées sur la surface K sont toutes de degré pair et, le long d'une courbe d'ordre $2p$, on peut circonscrire à K une surface de degré p ne la coupant pas en dehors de la courbe. »

Les travaux dont j'ai parlé jusqu'ici montraient surtout, en Georges Humbert, le géomètre. Géomètre, Poncelet lui eût sans doute dénié ce titre, car Humbert a presque toujours eu recours à l'appareil analytique, il a peu fait de géométrie pure; de plus, ses énoncés ont très souvent un aspect algébrico-géométrique. Et pourtant, ce sont bien des qualités de géomètre qu'il fallait pour deviner sous la généralité des formules analytiques et pour réussir à extraire élégamment de ces formules les cas particuliers présentant ce double caractère d'utilité et de beauté que nous exi-

geons des énoncés de la Géométrie, la plus artistique des sciences mathématiques.

Dans ses premières recherches, Humbert était donc un géomètre; mais un géomètre singulièrement averti des choses de l'analyse, dont il connaissait les faits particuliers tout aussi bien que les théories générales.

Ces théories sont indispensables en Mathématiques, c'est vers elles qu'il faut tendre et toute théorie générale nouvelle est une superbe conquête; pourtant, réduites aux théories générales, les Mathématiques ne seraient qu'une belle forme vide de contenu. Elles mourraient vite, comme sont mortes, momentanément, plusieurs branches de notre science juste au moment où des vues générales semblaient devoir leur procurer une activité nouvelle; je citerai, par exemple, la théorie des formes, ou les fonctions elliptiques si ignorées depuis que Weierstrass en a si simplement exposé les théorèmes généraux. Les théories générales répondent aux questions qu'on s'était posées; malheureusement, elles y répondent trop facilement, sans exiger de nous presque aucun effort, et comme elles nous donnent la solution des problèmes avant que nous les ayions étudiés, elles émoussent notre curiosité et nous dispensent de la connaissance intime qui aurait conduit à des problèmes nouveaux. Même, elles rendent volontiers dédaigneux pour les recherches particulières d'où pourraient surgir ces problèmes nouveaux, parce que de telles études ne sauraient avoir la même élégance que la théorie générale.

Pourtant, Humbert a su écrire sur des questions particulières avec une suprême élégance; chez lui, ce n'est plus l'extrême généralité qui séduit, c'est la précision parfaite. En illustrant les théories générales d'applications précises, comme celles d'Humbert, on peut leur redonner la vie et les rendre génératrices de progrès nouveaux. C'est ainsi que Poincaré signalait l'intérêt, pour l'analyse pure, des études d'Humbert sur les surfaces hyperelliptiques, desquelles il disait qu'elles nous aident à nous représenter d'une manière plus concrète les propriétés des transcendantes abéliennes.

Avant qu'existe la théorie générale actuelle des fonctions analytiques, les étudiants apprenaient à connaître quelques fonctions particulières, fonction Γ, fonction sn, etc. Maintenant, cela est

naturel et inévitable, ces fonctions ne sont plus considérées qu'incidemment, comme occasions d'applications de la théorie générale. Encore n'obtient-on que les tout premiers résultats qui les concernent; l'étude détaillée, monographique, de ces fonctions est laissée aux soins de chacun; tous ne la font pas. Aussi, beaucoup d'analystes auraient reculé devant l'utilisation de ces fonctions particulières qu'Humbert a si bien su employer, chacune avec ses ressources propres.

J'imagine d'ailleurs que, au début, Humbert lui-même a été quelque peu embarrassé. Mais on apprend à se servir d'un outil en s'en servant; on découvre alors peu à peu toutes ses qualités, ses défauts s'il n'est pas tout à fait au point; on essaie de l'améliorer, et, si l'on en est digne, on trouve là l'occasion d'ajouter à l'Analyse un chapitre nouveau et important; c'est ce qu'a fait Georges Humbert.

L'Académie des Sciences avait proposé, comme sujet pour le prix Bordin de 1892, l'application de la théorie générale des fonctions abéliennes à la géométrie. Que le prix ait été décerné à Humbert, nul n'en fut étonné; même, je crois que le sujet du concours avait été choisi pour Georges Humbert, comme l'on dit. Mais ce à quoi personne ne s'attendait, c'est à voir Humbert, comme conséquence de ce concours de géométrie, devenir, de Géomètre, Analyste.

Presque tous les énoncés obtenus par Humbert dans son Mémoire couronné comportaient une exception : il fallait toujours écarter le cas où les trois nombres définissant les périodes des fonctions abéliennes que l'on considérait auraient été liés par une relation à coefficients entiers d'une certaine forme, par ce qu'on appelle, d'après Humbert, « une relation singulière ». D'où vient cette difficulté, qu'ont de particulier ces fonctions abéliennes singulières ? C'est la question que s'est posée Georges Humbert et à laquelle il a répondu par cette théorie des fonctions abéliennes singulières, édifiée à partir de 1898 et qui montre que beaucoup de questions relatives aux fonctions abéliennes, que l'on croyait entièrement traitées, ne l'étaient en réalité que très incomplètement.

Voici, par exemple, comment Hermite avait étudié le problème de la transformation qui consiste à trouver les systèmes de

périodes tels que toute fonction abélienne admettant ces périodes soit exprimable rationnellement à l'aide de fonctions abéliennes de périodes données. La traduction analytique de cet énoncé conduit à quatre relations entre les deux systèmes de périodes d'où, par élimination, une relation entre les trois nombres attachés aux périodes données. Hermite admit que les coefficients de cette relation doivent être nuls; cela est, en effet, nécessaire si les périodes données doivent pouvoir être prises au hasard, mais il n'en est plus de même si les périodes sont données d'une façon particulière. La relation rencontrée par Hermite peut alors être vérifiée par un système de eoefficients non tous nuls et, comme cette relation est de la forme des relations singulières d'Humbert, les fonctions dont la théorie était incomplète sont les fonctions abéliennes singulières d'Humbert.

Ces fonctions singulières sont d'ailleurs de diverses espèces, car les trois nombres définissant les périodes peuvent vérifier une ou deux ou trois relations singulières; il y avait donc trois catégories de fonctions abéliennes qu'on avait omis de considérer. Et ces fonctions, précisément parce qu'elles ne sont pas les plus générales, sont celles qui possèdent les propriétés les plus curieuses et qui, dans les applications, sont les plus importantes à connaître. Je ne puis entreprendre de suivre Georges Humbert, dans ses études sur la transformation, sur la multiplication complexe, sur l'existence des fonctions intermédiaires, etc., problèmes traités incomplètement ou même restés inabordés jusque-là; il me suffit d'avoir fait soupçonner l'importance de la lacune qu'Humbèrt a comblée grâce à ses dons d'analyste habile, attentif et persévérant.

Ses Mémoires sur ce sujet, tout en étant très complets, sont, comme tous ceux qu'il a écrits, faciles à lire, élégants, clairs et concis. Peut-être est-ce à cause de ce dernier caractère que des hommes distingués ont publié des travaux dans lesquels ils croyaient prolonger les résultats d'Humbert, alors qu'ils ne faisaient que les commenter. Rendant compte d'un de ces travaux, dans une des séances d'analyses de Mémoires que M. Hadamard a organisées au Collège de France, l'un des plus brillants élèves d'Humbert, M. Lefschetz, a pu conclure très justement à peu près en ces termes : « Ce travail fournit la traduction géométrique des résultats d'Humbert dans un mode de représentation qu'Humbert lui-

même avait indiqué en quelques mots. Il n'ajoute rien d'essentiellement nouveau à ce qu'Humbert nous a appris sur les fonctions abéliennes. »

Au cours de ses travaux d'Analyse, Humbert n'oublie pas qu'il est aussi géomètre, et comme à l'existence, pour le cas de deux variables, de fonctions abéliennes singulières, doivent correspondre pour les surfaces des propriétés qui n'ont pas d'analogues pour les courbes, il arrive à des énoncés inattendus comme ceux-ci, qui sont très importants : « Deux surfaces peuvent se correspondre point à point sans avoir les mêmes modules. » — « Une surface peut admettre un nombre infini de transformations en elle-même, sans admettre de transformations dépendant d'un paramètre. »

La théorie des fonctions abéliennes singulières soulève naturellement bien des questions arithmétiques. Les travaux des dernières années d'Humbert sont tous consacrés à la théorie des nombres; sur ce sujet, il a publié plus de vingt-cinq Notes et Mémoires. Dans ce domaine arithmétique, Humbert se meut à l'aise; là encore, il sait très heureusement marier l'analyse avec la géométrie; témoin cette belle représentation des entiers par des surfaces et des formes quadratiques binaires par des courbes; la représentation étant telle que la surface contient la courbe lorsque la forme peut représenter le nombre entier, et seulement dans ce cas.

Il convient encore de rappeler que, en 1916, Humbert a réussi à obtenir aussi une représentation géométrique pour les fractions continues, ce qui avait été vainement tenté par bien des géomètres et non des moindres. Humbert utilise cette division du plan en triangles curvilignes qui est associée à la fonction modulaire; les réduites d'une fraction sont des abscisses de sommets des triangles successivement traversés par une droite. Cette belle méthode rend intuitives les principales propriétés des fractions continues, en particulier la périodicité des fractions représentant une irrationnelle du second degré.

J'arrête ici cet aperçu trop sommaire; si insuffisant qu'il soit, j'espère qu'il vous aura montré clairement que les grands succès remportés dans ses recherches par Georges Humbert sont dus à sa connaissance profonde et minutieuse tout à la fois du domaine

des fonctions algébriques, à son habileté à manier les formes analytiques, à son amour du concret qui se manifeste et par ses constants retours à la géométrie et par le soin avec lequel il étudie des cas particuliers avant de s'élever à des faits plus généraux.

Vous me pardonneriez plus facilement de ne pas parler davantage du mathématicien si, maintenant, je vous entretenais de l'homme que nous regrettons tous et dont on aimerait à entendre rappeler les qualités et les vertus par quelqu'un de ceux qui l'ont intimement connu. Je n'étais malheureusement pas en relation avec Georges Humbert; j'eus, juste, l'occasion de lui faire une fois visite. Son accueil fut, non pas froid, mais réservé; c'était celui d'un homme qui ne recherche pas la popularité, qui ne prend pas avec le premier venu ces allures de familiarité et de cordialité sous lesquelles, le plus souvent, se masque une indifférence universelle. La courtoisie de Georges Humbert, qui n'était pas seulement la politesse de l'homme très bien élevé, mais qu'on sentait vite due à une bienveillance foncière, rectifia vite la première impression et la conversation s'anima. Surtout, d'ailleurs, du fait du brillant causeur qu'était Humbert. Brillant causeur qui ne tenait guère à briller, car, la glace rompue, il sut faire parler son visiteur, se bornant à quelques phrases où l'on sentait parfois une pointe d'humour. Et d'une visite dont la première minute m'avait un peu inquiété, je sortis enchanté et comprenant tout ce qui m'avait été dit du plaisir qu'on éprouvait dans la société de Georges Humbert.

L'intérêt qu'il portait aux questions les plus diverses, littéraires, scientifiques, artistiques ou sociales, l'étendue et la variété de ses connaissances, ses qualités d'homme du monde ont beaucoup contribué à le faire plus rapidement apprécier partout où il a été appelé : à l'Inspection des Mines comme à l'Académie des Sciences, à l'École Polytechnique comme ici, au Collège de France.

Ce n'est, hélas! pas un éloge banal de déclarer que personne n'a jamais entendu dire du mal de lui, qu'on ne lui connaissait aucun ennemi. Par contre, on lui connaissait des amis chauds, fidèles et sûrs. Qui a pu assister aux obsèques de Georges Humbert se rappelle le discours si profondément et douloureusement ému que M. Painlevé a prononcé au nom de ces amis. Des amitiés aussi élevées, qui n'ont pas pour origine une vieille camaraderie

et qui cependant unissent étroitement des hommes que toutes leurs convictions semblaient devoir séparer, sont la meilleure preuve de la haute valeur morale de Georges Humbert.

Cette valeur morale, ses belles qualités intellectuelles lui permirent de remplir brillamment toutes les missions qui lui furent confiées. Il faut rappeler en particulier combien Humbert fut apprécié comme Professeur. Ses leçons, toujours minutieusement préparées, parfaitement adaptées au but de l'enseignement, exactement proportionnées à la force de son auditoire, étaient faites dans une langue élégante, sobre et claire. A l'École Polytechnique, sa réputation comme professeur n'est pas près d'être oubliée. De tous, Humbert y fut très profondément regretté lorsque, nouvelle preuve de conscience, il crut devoir résigner ses fonctions parce qu'il craignait, à cause de sa santé, ne plus pouvoir les remplir aussi exactement.

Ici, dans cette chaire où j'ai le redoutable honneur de lui succéder, Humbert fut un professeur particulièrement apprécié, dont les leçons étaient impatiemment attendues d'un auditoire toujours fidèle. A mon avis, rien ne montre mieux les rares qualités d'Humbert que ses succès au Collège de France, car la tâche d'un professeur y est si difficile que, pour ma part, j'ai toujours été tenté de la déclarer impossible. On n'a pas le droit de n'y faire qu'un enseignement classique, fût-il excellent; il y faut un enseignement toujours en progrès, toujours renouvelé, toujours original; par le fond, si possible, tout au moins quant au groupement des matières et à la compréhension du sujet.

Je sais ce que mon programme a d'un peu outré et je comprends la raillerie d'un de mes Collègues me disant : « Supposez que chacun de nous s'asseye à sa table de travail en déclarant : je vais être original; cela ferait du joli ! » Pourtant, nous ne pouvons nous contenter de doubler l'enseignement de la Sorbonne; il nous faut, chaque année, faire des leçons sur un sujet élevé, — car l'enseignement universitaire des mathématiques est fort bien fait et va loin, car nos auditeurs ont terminé le cycle ordinaire des études et sont même parfois de jeunes savants déjà connus, — sous une forme nouvelle, — car nos élèves sont capables de lire eux-mêmes livres et Mémoires, — sur des sujets sans cesse variés, — car l'auditoire est peu nombreux et se renouvelle lentement. Il faudrait

donc dominer constamment des sujets nouveaux, sans jamais avoir eu le temps de les approfondir.

Comment Humbert a-t-il réussi à se rapprocher assez de cet idéal pour contenter toujours ses auditeurs ? La règle de conduite qu'il a adoptée est à la fois habile et modeste; elle a été, de plus, fort utile aux progrès des études mathématiques en France. Au lieu de compter, comme il en aurait eu le droit, sur l'originalité de son esprit et la rapidité de sa compréhension, il a préféré s'appuyer sur la solidité et la précision de ses connaissances pour tout ce qui touche au domaine algébrique. Dans ce domaine, il a su trouver des sujets de Cours précis et variés, et cela d'autant plus facilement qu'il a continué à travailler exclusivement dans ce domaine et qu'il était constamment au courant de tout ce qui se publiait le concernant. En faisant ce choix, Humbert ne risquait guère de voir son enseignement faire double emploi avec quelque autre; les sujets étudiés par Humbert sont, en effet, presque tous en marge des questions soulevées par les principaux courants de la pensée mathématique pendant les trente dernières années.

A cet égard, comparé aux autres mathématiciens et surtout aux autres mathématiciens français, Humbert faisait un peu figure de disciple attardé d'Hermite; et c'est précisément pourquoi son enseignement au Collège de France a été si profitable. Tandis que des succès récents entraînaient les jeunes mathématiciens vers d'autres problèmes, Humbert était là pour rappeler certains ordres de questions dont, sans lui, personne n'aurait plus parlé en France. Peu à peu il a formé des élèves et plus de dix Thèses soutenues à la Sorbonne se réclament expressément de lui. Bien des savants étrangers étaient venus l'entendre au Collège ; par son enseignement et par ses publications, il a eu aussi une grande influence sur le renouveau des études algébriques dans d'autres pays. Voici ce que l'un des chefs les plus incontestés de l'école des géomètres algébristes italiens, M. Castelnuovo, ajoutait, au début de 1921, en note d'un Mémoire sur les fonctions abéliennes singulières : « Je reçois notification de la mort de Georges Humbert, j'envoie un salut révérent à la mémoire de ce savant, dont les belles recherches sur les fonctions abéliennes ont inspiré, dans ces dix dernières années, tant de travaux de l'École italienne. »

Lorsque Humbert devint, en 1912, titulaire de la chaire de mathématiques, la preuve était déjà faite qu'il y rendrait les plus grands services, car, depuis 1904, il était au Collège le suppléant de son maître, M. Camille Jordan.

Puisque ma tâche consiste, aujourd'hui, à parler de la chaire de Mathématiques du Collège de France et de ceux qui l'ont occupée le plus brillamment, j'ai la joie de pouvoir rendre hommage à l'illustre doyen des mathématiciens français, à M. Camille Jordan.

L'ardeur de M. Jordan pour les Mathématiques ne s'est jamais démentie. En 1920, encore, il a tenu à contribuer au Congrès international des Mathématiques, qui s'est tenu à Strasbourg, non seulement par sa présence, mais en y exposant un Mémoire original. Aussi son œuvre est-elle des plus considérables. Sans avoir la prétention, qui serait ridicule, de l'analyser ici, je vais essayer d'en montrer un caractère qui me permet peut-être de me déclarer le disciple de M. Jordan.

Galois avait rattaché la résolution algébrique d'une équation à l'étude d'un groupe de substitutions; il avait réussi à former le groupe des équations résolubles de degré premier. M. Jordan, qui a tant contribué à faire enfin comprendre les travaux de Galois, a traité le même problème dans le cas infiniment plus difficile des équations de degré quelconque. Il nous a, par cela même, appris à reconnaître si une équation est ou non résoluble; il a montré que si la résolution d'une équation peut être simplifiée par la résolution antérieure d'une autre équation, les racines de celle-ci sont des fonctions rationnelles des racines de la première. Et encore que toutes les méthodes de résolution conduisent aux mêmes calculs, aboutissent aux mêmes difficultés.

Voici toute une série de problèmes dont la liaison avec certains de ceux étudiés par Humbert n'est pas trop lointaine; quelle différence cependant entre les méthodes de ces deux éminents mathématiciens. Humbert utilise partout et toujours la fonction analytique, algébrique même, qu'il réussit ingénieusement à faire intervenir dans bien des questions, même dans des questions arithmétiques; à cet égard, il s'apparente à Poincaré. M. Jordan, suivant la voie ouverte par Galois, traite de questions, relatives par leur énoncé même au calcul algébrique, sans le secours de

l'appareil analytique, à l'aide de raisonnements presque synthétiques. Dans ces raisonnements on procède toujours, si l'on veut dire, à une analyse; mais l'instrument qu'on y emploie est sans cesse variable, on le construit, on le modifie à chaque instant, et c'est en ce sens que les raisonnements sont synthétiques.

Ce caractère synthétique n'a, après tout, rien qui puisse surprendre, car les questions étudiées sont étroitement liées à l'Arithmétique, dans laquelle, comme en Géométrie pure, les raisonnements ont toujours été plus synthétiques qu'analytiques. Mais ce que je veux faire remarquer, c'est que M. Jordan continue à utiliser les raisonnements synthétiques hors de leurs domaines traditionnels; par exemple, pour des problèmes appartenant à ce que nous appelons l'*Analyse* : intégration et dérivation, d'où des études sur les ensembles; définition des aires des domaines plans et des longueurs des arcs de courbe, d'où la notion de fonction à variation bornée; par exemple encore pour des études d'*Analysis situs* : recherches sur la déformation des surfaces de Riemann, sur les polyèdres, sur les courbes planes fermées sans point multiple.

M. Jordan s'est plu à rappeler une phrase dans laquelle Poinsot parlait d' « une algèbre supérieure qui repose tout entière sur la théorie de l'ordre et des combinaisons », dans laquelle les nombres et les systèmes de nombres n'interviennent pas par leur grandeur, mais par leurs positions relatives, de sorte que cette algèbre est un peu de la géométrie de situation. M. Jordan a déclaré avoir constamment consacré ses efforts à cette branche de la Science signalée par Poinsot, « si négligée et si importante », dit-il. En fait, en ne s'astreignant pas, comme on le fait communément de façon plus ou moins consciente, à n'utiliser que l'outil analytique, il a pu aborder ou étudier bien des questions restées jusque-là presque inaperçues? C'est dans l'une des voies ouvertes par M. Jordan qu'ont marché depuis trente ans ceux qui essayent d'utiliser la notion de fonction non analytique.

Sans le précédent de M. Jordan, de quels crimes ne les aurait-on pas accusés? L'orage est maintenant presque apaisé, car les nouvelles recherches ont prouvé leur utilité pour l'étude des fonctions analytiques elles-mêmes; mais au commencement, comme il se trouve toujours quelqu'un pour essayer de transformer un beau résultat des anciens en un obstacle à jeter au travers de la

route par où des modernes prétendent s'élancer vers de nouvelles conquêtes, on nous a accusé de mépris pour les fonctions analytiques, d'amour morbide des singularités qui, disait-on, sont anormales puisque tout est analytique, et de bien d'autres choses encore. Mais nos travaux sont en continuité avec ceux de M. Jordan, comment persévérer dans ces reproches et les adresser à M. Jordan lui-même, alors qu'il venait d'édifier à la gloire des fonctions analytiques le splendide monument qu'est son cours de l'École Polytechnique, ouvrage dans lequel les mathématiciens du monde entier de ma génération ont appris l'analyse et qui, malgré d'excellents Traités plus récents, reste unique à bien des égards?

Les excursions faites par M. Jordan hors des domaines de recherches traditionnels avaient d'ailleurs fait réfléchir bien des mathématiciens; ceux-ci ont donné à la jeune école des encouragements précieux qui ont largement compensé les quelques reproches qu'elle a dû subir. Reproches bien injustes d'ailleurs, car, loin de mépriser le calcul, nous sommes persuadés que nos procédés synthétiques actuels céderont quelque jour la place à des procédés meilleurs, parce que plus analytiques; nous ne prétendons qu'à être les précurseurs et les annonciateurs peut-être d'un Viète ou d'un Newton qui introduira un symbolisme nouveau ou des notions nouvelles, peut-être d'un Descartes ou d'un Cauchy qui utilisera un symbolisme déjà connu et qui l'élargira pour des fins nouvelles, et nous soupirons après le nouvel algorithme qui, entre les mains d'hommes habiles comme l'était Humbert, donnera facilement et élégamment plus que ce que nous n'obtenons que péniblement et lourdement.

STABILITÉ DE L'ÉQUILIBRE SUR UNE LIAISON FINIE UNILATÉRALE,

PAR M. ÉT. DELASSUS.

---

1. Considérons un système matériel holonome S défini par les paramètres indépendants $q_1, \ldots, q_n$ et en équilibre dans la position

$$(S_0) \qquad q_1 = \ldots = q_n = 0,$$

au contact d'une liaison unilatérale A d'ordre p réalisée sous forme surabondante ou non. Il s'agit ici d'équilibre absolu de sorte que toutes les liaisons, aussi bien A que celles qui définissent S, sont indépendantes du temps.

Écartons très peu S de la position S_0, soit sur A, soit en dehors, mais de son côté libre, et lançons-le avec des vitesses suffisamment petites, il va se mouvoir indéfiniment; mais, en général, ce mouvement sera fort complexe et se décomposera en un nombre fini ou même infini de mouvements ordinaires, le passage de chacun d'eux au suivant se faisant par un échappement de certains contacts avec A ou par un choc rétablissant certains d'entre eux.

Tout naturellement, on dira que l'équilibre sur A est stable, si quelles que soient les valeurs initiales, suffisamment petites, des q et des q' le mouvement complexe pris par le système S est tel que les q restent indéfiniment très petits.

2. En supposant que les forces agissant sur S possèdent une fonction de forces $U(q)$, on peut montrer que le théorème de stabilité de Lagrange s'étend à cet équilibre unilatéral.

La démonstration de Dirichlet (il s'agit alors des liaisons forcées) s'appuie uniquement :

1° Sur l'hypothèse que la fonction U, nulle en S_0, est négative et non nulle pour toutes les positions voisines;

2° Sur le fait, résultant de l'intégrale des forces vives, que pendant toute la durée d'un mouvement quelconque sur la liaison, on a

$$U \geqq H,$$

H étant une constante inférieure ou égale à U_0 et pouvant être rendue aussi petite que l'on veut en prenant les valeurs initiales des q et des q' suffisamment petites.

Il nous suffit donc de montrer que ces deux bases de la démonstration peuvent s'étendre au cas de la liaison unilatérale.

Les valeurs des q qui correspondent aux positions de S dans le voisinage de S_0 forment un *continuum* $\mathfrak{C}$ défini par des inégalités compatibles qui n'empêchent pas les q de devenir aussi petits que l'on veut. Et l'hypothèse relative à U s'énoncera ici en disant que *la valeur zéro prise par* U *en* S_0 *est la plus grande des valeurs*

que peut prendre U *à l'intérieur de* $\mathcal{C}$, *cette valeur n'étant atteinte d'ailleurs que pour la seule position* S_0. La seule différence avec le cas de la liaison forcée est qu'on a affaire ici à un maximum arithmétique au lieu d'un maximum analytique.

Quant au second fait, il persiste sans changement. On part avec des valeurs T_0, U_0 de sorte que, pendant le premier mouvement, on a

$$T - U = -H_1, \qquad H_1 = U_0 - T_0 \leq U_0.$$

Au passage du premier mouvement au second, U ne subit pas de variation; il en est de même de T si ce passage se fait par échappement ou par choc parfaitement élastique; dans les autres cas, c'est-à-dire passage par choc imparfaitement élastique ou complètement inélastique, T diminue. Il résulte de là que le second mouvement se fait avec une intégrale des forces vives

$$T - U = -H_2, \qquad -H_2 \leq -H_1,$$

et de même le troisième avec

$$T - U = -H_3, \qquad -H_3 \leq -H_2,$$

et ainsi de suite, de sorte qu'à un instant quelconque d'un quelconque de nos mouvements successifs, on aura

$$T - U \leq -H_1;$$

donc

$$U \geq H_1.$$

La démonstration de Dirichlet s'applique donc et l'équilibre est bien stable au sens indiqué au début.

3. J'ai montré (¹) qu'un système holonome à liaisons dépendant du temps, n'ayant pas de fonction de forces, mais possédant l'intégrale des forces vives au sens le plus général indiqué par M. Painlevé, avait toujours une fonction génératrice Γ dont les portions Γ_2 et Γ_0 étaient indépendantes du temps, qui permettait d'écrire l'intégrale des forces vives sous la forme

$$\Gamma_2 - \Gamma_0 = h.$$

(¹) Delassus, *Leçons sur la dynamique des systèmes matériels.*

qui donnait les équilibres paramétriques par les équations

$$\frac{\partial \Gamma_0}{\partial q_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Gamma_0}{\partial q_n} = 0,$$

et, par extension du théorème de Lagrange, montrait leur stabilité quand Γ_0 était réellement maxima. Cette fonction Γ_0 fournissait ainsi la généralisation des propriétés de U relativement à l'équilibre et à sa stabilité pour le cas des liaisons forcées.

Prenons ce système matériel et soumettons-le à une liaison unilatérale A.

L'équilibre unilatéral exige d'abord l'équilibre sur la liaison forcée, ce qui nous conduit à l'équation

$$\delta \Gamma_0 = 0,$$

devant avoir lieu pour tous les *déplacements d'égalité*. Pour compléter il suffit d'y joindre les conditions de non-échappement qui, comme je l'ai montré, même pour des liaisons dépendant du temps (¹) se résument en

$$\mathfrak{T}_L \geq 0,$$

pour tous les déplacements virtuels permis par la liaison A, c'est-à-dire pour tous les déplacements d'inégalité. Mais le principe de Dalembert nous donne

$$\mathfrak{T}_L = -(\mathfrak{T}_I + \mathfrak{T}_D),$$

et le second membre, calculé au moyen de Γ en tenant compte de l'hypothèse de l'équilibre, se réduit à $-\delta\Gamma_0$. Nous arrivons ainsi à

$$\delta \Gamma_0 \leq 0,$$

devant avoir lieu pour tous les *déplacements d'inégalité*.

La fonction Γ_0 généralise donc parfaitement U au point de vue des conditions d'équilibre unilatéral.

Par contre, la généralisation cesse d'exister dans la question de stabilité. Pour le voir, considérons le cas simple où la liaison A est indépendante du temps, les seules liaisons dépendant du temps étant celles qui définissent le système S. Dans chacune des périodes du mouvement au voisinage de la position d'équilibre, on aura

(¹) DELASSUS, *Mémoire sur la théorie des liaisons finies unilatérales* (*Annales École Normale*, 1917).

l'intégrale des forces vives

$$\Gamma_2 - \Gamma_0 = \text{const.}$$

Considérons un passage d'un mouvement à un autre se faisant par choc parfaitement élastique. La quantité T, malgré les brusques variations subies par les q', restera inaltérée, mais cela ne nous apprend absolument rien sur Γ_2 qui n'est autre que la portion T_2 de T. Au passage, nous ne savons pas si la constante des forces vives va croître ou décroître, de sorte que nous ne pouvons pas établir pour Γ_0 l'inégalité analogue à celle que vérifiait U et que la démonstration de Dirichlet ne peut plus se faire.

4. Revenons au cas de toutes les liaisons indépendantes du temps avec une fonction de forces, pour nous demander si, parmi les conditions qui expriment l'équilibre et sa stabilité, il n'y aurait pas moyen de faire une réduction.

On voit immédiatement que l'équilibre stable unilatéral implique l'équilibre stable sur la liaison forcée.

Réciproquement, supposant que l'équilibre existe au point de vue unilatéral et que la stabilité existe sur la liaison forcée, peut-on en déduire la stabilité unilatérale?

Il en est certainement ainsi s'il n'existe aucun déplacement d'inégalité donnant

$$\delta U = 0.$$

et si, relativement au maximum de U sur la liaison forcée, on se trouve dans les conditions ordinaires les plus simples.

Par un changement de paramètres valable au voisinage de la position d'équilibre, la liaison unilatérale A d'ordre p peut toujours se mettre sous la forme

$$x_1 \geq 0, \quad \ldots \quad x_p \geq 0,$$
$$\Phi_1(x, y) \geq 0, \quad \ldots$$

les nouveaux paramètres étant $x_1, \ldots, x_p, y_1, y_2, \ldots$ et les fonctions Φ satisfaisant aux identités

$$\Phi(0, y) = 0,$$

de sorte que le développement en série de Maclaurin d'une quelconque d'entre elles ne contient aucun terme indépendant des x et

est de la forme

$$\Phi(x, y) = \varphi(x) + \dots;$$

$\varphi(x)$ étant linéaire et homogène; les termes suivants étant au moins du second degré.

On aura ensuite

$$U = U_1(x) + U_2(x, y) + \dots.$$

La fonction U_1 ne contient pas les y comme conséquence de l'équilibre sur A et la fonction $U_2(o, y)$ est maxima pour les y tous nuls par suite de la stabilité de cet équilibre.

En outre, l'hypothèse sur δU se traduit par le fait que la fonction $U_1(x)$ est négative et non nulle pour tout système de valeurs des x satisfaisant aux inégalités

$$x_1 \geqq o, \quad \dots, \quad x_p \geqq o,$$
$$\varphi_1(x) \geqq o, \quad \dots,$$

et n'est nulle que si les x sont simultanément nuls.

Faisons un nouveau changement de paramètres en gardant les y et posant

$$x_1 = z_1^2, \quad \dots, \quad x_p = z_p^2.$$

Les inégalités à vérifier se réduiront à

$$(1) \qquad \varphi(z^2) + \dots \geqq o, \quad \dots$$

et la fonction U à

$$U = U_1(z^2) + U_2(o, y) + \dots$$

en n'écrivant explicitement que les termes du second degré.

Si la liaison n'est pas surabondante, la démonstration est terminée, car les inégalités (1) n'existent pas. $U_1(z^2)$ et $U_2(o, y)$ sont deux quantités essentiellement négatives ; U_1, par hypothèse, n'est nulle que si tous les x sont nuls et U_2, que si tous les y sont nuls, donc $U_1 + U_2$ est négative et ne peut s'annuler que pour la position d'équilibre. Il y a maximum analytique de $U(z^2, y)$, donc maximum arithmétique de $U(x, y)$ pour les x positifs; la stabilité unilatérale est donc assurée.

Supposons maintenant la liaison surabondante. Nous considérerons un mouvement quelconque du point x, y partant de la position d'équilibre et s'effectuant entièrement à l'intérieur du con-

tinuum défini par les inégalités (1). Si, dans tous ces mouvements, la fonction $U(z^2, y)$ va en diminuant, tout au moins au début, la propriété sera démontrée.

Les z et y sont des fonctions de t s'annulant avec t et les valeurs initiales de leurs dérivées seront désignées par α et β satisfaisant à

$$\Sigma\alpha^2 + \Sigma\beta^2 = 1,$$

pour avoir sûrement un mouvement affectif.

Les fonctions $\Phi(z^2, y)$ et $U(z^2, y)$ commençant par des termes de second degré, on a, dans le mouvement considéré,

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{d^2\Phi}{dt^2}\right)_0 = \varphi(\alpha^2);$$

$$\left(\frac{dU}{dt}\right)_0 = 0, \qquad \left(\frac{d^2U}{dt^2}\right)_0 = U_1(\alpha^2) + U_2(0, \beta).$$

Puisqu'on marche à l'intérieur du continuum, les fonctions Φ partant de zéro doivent croître, de sorte qu'on a les inégalités

$$\varphi(\alpha^2) \quad 0.$$

qui entraînent, par hypothèse,

$$U_1(\alpha^2) < 0,$$

à moins que les α ne soient tous nuls. Quant à $U_2(0, \beta)$, c'est une quantité essentiellement négative et nulle seulement pour les β tous nuls.

Il en résulte que $\left(\frac{d^2U}{dt^2}\right)_0$ est une somme de deux termes négatifs qui ne sont pas nuls simultanément, donc est une quantité négative et non nulle pour tous les mouvements considérés. La propriété est donc complètement démontrée.

5. Pour terminer, faisons la remarque que le cas

$$p = n$$

n'est pas à considérer au point de vue liaison forcée parce que la liaison immobilise le système. Ce cas est au contraire à considérer au point de vue unilatéral. Il n'y a pas alors de déplacements

d'égalité et la condition d'équilibre est

$$\delta U \leq 0$$

pour tous les déplacements d'inégalité. Si aucun d'eux ne donne

$$\delta U = 0,$$

on pourra affirmer la stabilité; dans le cas contraire, il faudra recourir à une étude directe de U pour voir si l'équilibre donne un maximum arithmétique.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BOREL (Émile). — L'espace et le temps. In-16, 245 pages. Félix Alcan. Nouvelle collection scientifique, 1922.

La lecture de cet Ouvrage est à recommander tout particulièrement à tous ceux qui désirent se préparer à l'étude de la théorie de la relativité. Il comporte essentiellement une analyse méthodique des notions d'espace et de temps, pleine de remarques nombreuses susceptibles de faire utilement réfléchir le lecteur sur les bases de la Géométrie et de la Mécanique.

Une Introduction de 44 pages donne d'abord un tableau d'ensemble des problèmes envisagés. L'auteur observe que la grande vague de curiosité soulevée par les théories de la relativité est plus facile à canaliser qu'à arrêter, et qu'il vaut mieux préparer le public éclairé à réfléchir sur les notions fondamentales mises en discussion que de l'abandonner sans défense à l'influence malsaine de vulgarisations médiocres et hâtives : Cette Introduction constitue un premier stade dans l'adaptation progressive, et une préparation à l'étude des sept Chapitres qui constituent l'Ouvrage proprement dit.

Le premier Chapitre montre, à propos du problème fondamental de la géodésie, la complexité des mesures nécessaires pour améliorer les approximations réalisées dans nos déterminations de la figure de la Terre. Ces difficultés ainsi rencontrées dans des mesures de grandeurs qui nous sont directement accessibles préparent à bien comprendre la complexité encore plus grande des déterminations de position et de durée dans les régions lointaines accessibles aux seules observations optiques des astronomes : elles sont étudiées dans le deuxième Chapitre.

Le Chapitre III est consacré à la géométrie abstraite. Bien que ce sujet soit étranger à celui qu'étudie l'Ouvrage, c'est-à-dire à la géométrie physique, ou science expérimentale des propriétés de l'espace occupé par les solides, les notions qu'il introduit sont

utiles pour la compréhension de la relativité générale. On peut ajouter même que réfléchir sur ces notions est indispensable pour bien situer les problèmes de la géométrie physique : aux enchaînements déductifs établis par la géométrie analytique, on peut faire correspondre des schémas géométriques divers tels que les géométries d'Euclide et de Riemann. Les cartes géographiques planes de la surface sphérique terrestre constituent un exemple, particulièrement intéressant pour la suite, de schémas géométriques.

Le quatrième Chapitre montre quelle prudence est de rigueur avant de prétendre faire appel à l'intuition pour étendre à l'infiniment petit et à l'infiniment grand les propriétés géométriques établies par l'observation à l'échelle humaine. La notion de continuité et de divisibilité à l'infini conduit à des conséquences paradoxales lorsqu'on cherche à se donner une représentation géométrique de certains résultats arithmétiques évidents. D'autre part, l'étude topologique de surfaces relativement simples comme la sphère ou le tore et des périodicités diverses que présentent les lignes tracées sur elles, donne à penser qu'il n'est peut être pas plus raisonnable d'étendre à l'infini, dans notre Univers, les propriétés pratiquement euclidiennes de la portion d'espace accessible à nos mesures, que de confondre l'ensemble d'une de ces surfaces avec son plan tangent en un point.

Le Chapitre V étudie la propagation de la lumière, qu'il est impossible d'éliminer des définitions physiques de l'espace et du temps.

Enfin les Chapitres VI et VII sont consacrés à des exposés succincts de la Théorie de la relativité restreinte, et de la Théorie de la relativité générale. Préparées par les réflexions que suggèrent les Chapitres précédents, et présentées sous une forme qui fait méthodiquement appel à la raison au lieu de chercher à lui faire illusion, ces 50 pages sont susceptibles de donner des idées beaucoup plus nettes et plus vraies sur les théories de la relativité, que maints ouvrages de vulgarisation dont l'étendue l'emporte sur la profondeur.

Trois intéressantes Notes ont été adjointes en Annexe à l'Ouvrage. L'une précise la cinématique de la relativité restreinte; la seconde énonce la classification des hypothèses fondamentales de la physique et de la géométrie, sur laquelle l'auteur a attiré

l'attention dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences;* enfin la troisième reproduit un article publié en 1909 par M. Borel, dans la *Rivista di Scienza*, sur le continu mathématique et le continu physique. Jean VILLEY.

MIE (GUSTAVE). — LA THÉORIE EINSTEINIENNE DE LA GRAVITATION, traduction française. 19cm × 12cm, 118 pages. Paris. J. Hermann, 1922.

Cette brochure reproduit des articles de vulgarisation destinés, dans l'intention de l'auteur, à un public étendu. Elle n'en apporte cependant pas moins, sur les bases et sur la signification de la Théorie de la gravitation, bon nombre de points de vue originaux et fort intéressants qu'on saura gré aux traducteurs d'avoir fait connaître au public français.

La notion du continuum espace-temps est donnée sous une forme objective assez frappante.

L'auteur part de la notion physique de force. Si l'on cherche à définir un repère fixe, on ne saura mieux faire que de le réaliser au moyen d'un point matériel soustrait à toute force extérieure (ou du moins sur lequel on équilibrera les forces extérieures, de telle façon que la résultante d'ensemble soit nulle); on obtient ainsi des points matériels animés les uns par rapport aux autres de translations uniformes [1], et parmi lesquels le choix est arbitraire pour définir un *lieu constant.*

La ligne décrite par un point matériel ainsi soumis à une force nulle s'appellera une *droite de temps.* On observe que la définition de la simultanéité, et par conséquent aussi le repérage des temps, dépendent du choix de celui des points libres qui définira le lieu constant et l'axe des temps.

---

[1] L'auteur signale que cette définition semble permettre le choix, comme repère de lieu constant, d'un petit corps matériel en rotation sur lui-même (par rapport aux directions fixes des axes galiléens), comme une toupie qui, soumise à une force extérieure nulle, continue à tourner indéfiniment. Pour éliminer cette solution inadmissible, il observe que l'équilibre de la toupie tournante exige l'intervention de forces de cohésion indispensables pour retenir, malgré l'inertie centrifuge, les points matériels dont elle est constituée (et dont le groupement en un solide géométrique repérable est nécessaire pour que la notion de rotation ait un sens).

Des vues très suggestives sur les notions d'éther et de matière conduisent ensuite à cette conclusion que les liaisons entre elles doivent être tout à fait intimes, et même que la matière ne doit être autre chose que les nœuds de perturbations d'une réalité unique qui est l'éther : la notion courante de *vide* est simplement synonyme d'*uniforme* ou d'*homogène*, propriétés qui suppriment la possibilité de perceptions physiques.

Un des arguments les plus intéressants invoqués dans ce sens est le suivant : les actions de gravitation ne comportent pas deux espèces opposées de liaisons matière-éther comme les liaisons électriques. Le champ de déformation de l'éther entre deux masses gravifiques doit être analogue au champ électrostatique entre deux charges électriques *de même signe*, dont l'énergie potentielle est croissante à mesure que diminue la distance entre celles-ci. Or l'attraction gravifique donne une augmentation d'énergie cinétique des deux masses, simultanée à cette augmentation d'énergie potentielle du champ interposé : L'énergie ainsi apparue dans deux termes de même signe ne pourra alors être empruntée qu'*aux masses elles-mêmes;* d'où l'idée que ces masses ne sont que des maxima, non immuables en intensité, des perturbations de l'éther.

Cette unité de l'éther et de la matière rend possible l'existence d'un principe universel, tel que le principe de relativité, qui prétend s'appliquer à l'une et à l'autre.

L'auteur attire ensuite l'attention sur le caractère essentiel de la théorie einsteinienne de la gravitation, qui est de remplacer le potentiel scalaire par un potentiel tensoriel comportant, en un lieu donné, des modifications d'unité variables avec la direction et des altérations des mesures de temps et de longueur dans des rapports différents. Ceci appliqué à la période et à la longueur d'onde de vibrations lumineuses entraîne une altération de leur vitesse de propagation, et, comme conséquence, une réfraction des rayons lumineux dans un champ de gravitation. C'est cette réfraction (liée au potentiel tensoriel) qui permet de retrouver dans le boulet de Jules Verne, c'est-à-dire par rapport à des axes de directions fixes liés à un point matériel libre (dans le champ de gravitation), la même loi de propagation rectiligne de la lumière que dans un espace sans gravitation par rapport à des axes de

Galilée, c'est-à-dire par rapport à des axes de directions fixes liés à un point matériel libre (dans l'espace sans gravitation). Le principe de relativité généralisée n'est autre chose que le principe de transformabilité générale des lois de la nature.

Comme conclusion, l'auteur développe cette idée, sur laquelle il insiste, que la possibilité de décrire les phénomènes indifféremment avec n'importe quel système de référence d'espace-temps (grâce à l'invariance des lois de la nature) entraîne que tous ces systèmes sont *utilisables*, mais non pas qu'ils soient *équivalents* comme on l'énonce souvent sous une forme qui prête à une interprétation à son avis illégitime. La forme des lois de la nature n'est pas le seul critérium qui permette à notre raison de décider si telle représentation de l'Univers est acceptable ou non : il ne suffit pas que les lois fondamentales des phénomènes physiques nous apparaissent avec une forme simple et claire, il faut encore que les choses elles-mêmes soient décrites en termes simples et clairs. Ce point de vue est illustré par l'exemple suivant : Si une règle a été construite très soigneusement, quand on énonce que son arête est bien rectiligne et sans défauts, pour tout homme raisonnable cela a un sens bien défini et répond à quelque chose de réel, bien qu'il soit possible d'utiliser des systèmes de référence dans lesquels l'arête serait sinueuse et déformable sous l'action de champs de gravitation très intenses et très hétérogènes (lesquels se chargeraient d'ailleurs de faire suivre à un rayon lumineux toutes ces sinuosités, pour les dérober à notre perception).

Les traducteurs ont annexé à cette brochure une courte Note sur un Mémoire fort intéressant publié par Mie en 1920, dans les *Annalen der Physik* :

Partant de la remarque générale qu'un continuum quelconque à n dimensions peut être considéré comme une surface dans un espace euclidien à $\frac{n(n+1)}{2}$ dimensions, on peut assimiler l'espace-temps le plus général à une surface dans un espace euclidien à 10 dimensions : c'est la surface d'Hilbert. A grande distance de toute masse, l'Univers devenant euclidien, cette surface est asymptote à un plan à quatre dimensions (de l'espace euclidien à 10 dimensions).

Mie postule que la représentation rationnelle que nous nous

faisons de l'Univers est la projection orthogonale de la surface d'Hilbert sur son plan de Minkowski asymptote. De là, il déduit, *sans fonction arbitraire*, la formule célèbre de Schwartzschild qui définit l'Univers perturbé autour d'une masse sphérique unique.

Jean VILLEY.

MAC MAHON (le Major P.-A.), NEW MATHEMATICAL PASTIMES. 1 vol. de 114 pages. Cambridge, University Press; 1921.

Il ne saurait convenir à des mathématiciens de profession de dédaigner ce qu'on appelle les « récréations mathématiques ». Quelque futile que puisse paraître l'objet de certains problèmes, le seul fait que leur solution fait appel à un sens mathématique aiguisé suffit à leur conférer un véritable intérêt au point de vue de la science générale. Il serait, d'ailleurs, assez difficile de définir rigoureusement le domaine où reste confinée la récréation mathématique. Un problème est dit « récréatif » si son objet pique particulièrement notre curiosité et s'il nous apparaît, suivant l'heureuse expression du vieux Mesiriac, comme « plaisant et délectable », si notamment sa solution s'offre à nous comme une sorte de jeu.

Cette classe particulière de problèmes a tenté la plume de bien des auteurs. Dans la bibliographie qui clôt son petit volume, le Major Mac Mahon donne une liste d'Ouvrages de cette sorte qui, lorsqu'on y joint le sien propre, comprend quarante numéros, à partir de celui de Bachet de Mesiriac, qui date de 1612.

Les arrangements et combinaisons sont particulièrement féconds en questions de cet ordre; aussi est-ce surtout du côté de l'analyse combinatoire que s'est étendu le champ de ces mathématiques récréatives. Le Major Mac Mahon, qui est un des grands maîtres de ce genre d'analyse à notre époque, s'est donc trouvé tout naturellement amené à faire à son tour une incursion dans ce domaine; ce sont les résultats de cette incursion qui ont donné lieu à ses *Pastimes*.

Il y a lieu d'insister sur ce point : alors que la plupart des recueils de récréations mathématiques, publiés jusqu'ici, ont été composés à l'aide de questions de provenance très diverse, glanées à droite et à gauche, les passe-temps du Major Mac Mahon sont

exclusivement de son crû; grand amateur de citations poétiques, comme on va voir, notre auteur aurait pu donner pour épigraphe à son opuscule le vers célèbre :

Mon verre n'est pas grand, mais je bois dans mon verre.

Dans une première partie, l'auteur étudie les assemblages qui peuvent être constitués au moyen de certaines pièces polygonales, de même forme et de mêmes dimensions, dont la surface est régulièrement divisée en triangles peints de diverses couleurs en nombre limité, de manière qu'un même groupe ne comprenne pas deux pièces identiques. La constitution de ces assemblages, remplissant des conditions données, conduit à une grande variété de récréations; elle aboutit à la construction de figures curieuses, telles qu'en fait naître le kaléidoscope, où s'accuse une sorte de rythme graphique qui, pour la vue, ne manque pas d'attrait.

La deuxième partie s'applique à d'autres assemblages formés de pièces distinguées les unes des autres non plus par la disposition de leurs parties colorées, mais par leur forme, ces formes diverses dérivant toutes d'une même forme géométrique simple — celle d'un triangle équilatéral, par exemple — par substitution aux côtés rectilignes qui la limitent de certaines lignes brisées obéissant à des conditions particulières. Il ne laisse pas d'être amusant de constater comment, par assemblage de ces pièces toutes différentes entre elles, peuvent être engendrées certaines figures de forme géométrique simple. La reconstitution de l'hexagone régulier au moyen de vingt-quatre pièces toutes différentes les unes des autres, que fait connaître la figure reproduite sur la couverture du Volume, est bien caractéristique à cet égard. Cette reconstitution, lorsque les vingt-quatre pièces ont été séparées les unes des autres et mêlées ensemble, peut être regardée comme un jeu de *puzzle* d'une difficulté toute spéciale.

Mais c'est surtout dans la troisième partie que s'affirme l'intérêt géométrique du sujet traité. L'auteur y étudie le dessin des motifs répétés (*repeating-patterns*) en vue surtout des ouvrages décoratifs; mathématiquement, il s'agit ici du problème qui consiste à recouvrir une surface plane au moyen de figures douées de symétrie, toutes identiques entre elles, imbriquées les unes dans les autres de façon à former une sorte d'enchaînement offrant une double

périodicité graphique. Les solutions de ce problème, imaginées par le Major Mac Mahon, outre l'intérêt géométrique qu'elles présentent, apportent de nouvelles et précieuses ressources à l'art décoratif et, particulièrement, à celui de la mosaïque.

On voit par là que le petit Livre du Major Mac Mahon est fort loin d'être banal.

Ajoutons que l'auteur y a multiplié les citations littéraires propres à souligner les divers points de vue de son sujet, avec une abondance et une variété qui ne seront point faites pour rebuter le public des mathématiciens, très généralement sensible au charme des belles-lettres. Ces citations, empruntées pour la plupart, cela va sans dire, à des auteurs anglais, sont parfois aussi de source française, italienne ou latine. Elles attestent chez l'auteur une érudition non moins solide qu'étendue, en même temps qu'un goût très sûr. Pour tous ceux — et ils sont légion parmi les fervents des mathématiques — chez qui la culture scientifique n'a pas fait de tort à la culture littéraire, elles ajoutent un attrait de plus à cet élégant petit Volume si digne déjà, par lui-même, d'éveiller la curiosité des lecteurs avertis.

Maurice d'Ocagne.

TWEEDIE (Charles). — James Stirling. A Sketch of his Life and Works alongs with his Scientific Correspondence. Oxford, At the Clarendon Press, 1922, in-8°, p. xii-213.

Le génie mathématique a-t-il quelque rapport avec les qualités qui font un habile homme d'affaires ? Et l'instruction mathématique donne-t-elle une préparation convenable pour ceux qui ont l'intention de se vouer aux transactions industrielles ou commerciales ?

Ces difficiles questions, auxquelles on n'a donné que des réponses inspirées soit par un amour excessif et aveugle pour les sciences exactes, soit par une antipathie non raisonnable pour la recherche mathématique, ne peuvent évidemment s'aborder avec espérance de succès qu'en ayant sous les yeux un nombre considérable de données historiques ou biographiques tout à fait sûres. C'est pour cela (et aussi pour l'excellente raison qu'il s'agit d'un ouvrage remarquable) que je crois bon de consacrer quelques lignes à l'analyse du volume que vient de publier le savant professeur de

mathématiques pures de l'Université d'Edinburgh, sous le titre que j'ai écrit ci-dessus.

L'Écossais dont il s'agit est un personnage dont le nom est connu de quiconque s'est adonné aux recherches de haute analyse. Il naquit en 1692 d'une famille noble, dont les origines remontent au moins au XIIe siècle. La grande renommée dont l'Université d'Oxford jouissait dès le temps de sa jeunesse poussa sa famille à l'envoyer (1711) au Collège Balliol de cette ville et il répondit si bien à l'attente de ses parents qu'en 1715 il fut en mesure de résoudre le célèbre « problème des trajectoires orthogonales » proposé comme défi par Leibniz aux compatriotes de Newton.

Deux ans après il publia l'opuscule, si favorablement connu, dont le titre complet est : *Lineœ tertii ordinis neutonianœ, sive illustratio tractatus D. Neutoni de enumeratio linearum tertii ordinis;* et la circonstance que Newton lui-même prit part à la souscription qui rendit possible la publication de cet ouvrage nous donne la preuve que des relations cordiales s'étaient déjà établies entre le jeune savant écossais et le glorieux auteur des *Principia* et que celui-ci considérait avoir trouvé en Stirling un interprète fidèle de sa pensée.

Cette publication assura à son auteur une notoriété telle que Tron, ambassadeur de la République de Venise à la cour d'Angleterre, le mena avec lui à Venise avec l'assurance qu'il trouverait une chaire à l'Université de Padoue, toujours ouverte aux étrangers de mérite. Nous sommes documentés sur le séjour de Stirling en Italie en 1719 par les lettres à sa famille (dans laquelle il fut appelé dès lors du petit nom de « le Vénétien ») ; mais rien n'explique pourquoi les espérances du jeune homme et de son puissant protecteur ont été complètement déçues. Ce qui est certain est que nous trouvons Stirling de nouveau à Londres en 1724, luttant en brave avec des difficultés matérielles. C'est à cette époque qu'il entreprit des recherches de haute analyse qui lui assurèrent la gloire de voir attaché son nom à des formules et des séries remarquables [1], dont deux siècles de travaux ne firent qu'accroître

---

[1] Je cite la formule $n! = n^n \sqrt{2n\pi}\, e^{-\left(n+\frac{\Theta}{2n}\right)}$ $(0 < \Theta < 1)$, applicable lorsque n est un nombre très grand, et les séries ayant pour terme général $(-1)^{n-1} \frac{B_n}{n(n-1)} \frac{1}{x^{2n-1}}$ (ou B_n sont les nombres de Bernoulli), qui appartiennent à la classe des séries asymptotiques de Poincaré.

la valeur : on les rencontre dans l'Ouvrage *Methodus differentialis, sive tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum*, paru en 1730.

Malgré cette excellente publication et l'estime dont il jouissait dans les cercles savants de la capitale (dès 1726 il avait été élu, il ne put trouver une place officielle qui lui assurât l'existence; à bout de ressources, en 1735, il revint en Écosse comme directeur (« manager ») des mines de Leadhills, jusqu'alors passives. Homme de talent, d'énergie, de conscience, il se voua complètement à sa nouvelle tâche, mais bien qu'ayant toujours le cœur à sa chère science, en peu de temps, il réussit à assurer des revenus considérables à la Société dont il était l'âme et le cerveau, et en même temps à procurer une existence confortable aux ouvriers qu'il dirigeait. Il occupa cette place jusqu'à sa mort, qui survint en 1770, à Edinburgh, où il était allé pour soigner sa santé.

Relégué dans un petit village en montagne, isolé du mouvement scientifique, Stirling, dès 1754, avait cru devoir résigner sa place de membre de la *Royal Society*, persuadé qu'il était de ne plus pouvoir contribuer aux travaux de la grande société anglaise; mais le monde des analystes l'avait toujours en haute estime; on en a la preuve dans la nomination de Stirling à l'Académie de Berlin, due sans doute à l'influence d'Euler.

Tout cela, avec plusieurs autres détails, se lit dans le volume de M. Tweedie, car il contient, en dehors de la première biographie digne de ce nom de Stirling, une analyse complète de ses travaux mathématiques et bon nombre de lettres échangées entre lui et plusieurs personnages éminents de son époque (par exemple Mac Laurin, Cramer, N. Bernoulli, Bradley, Klingenstierna, Euler, etc.). Deux fac-similés très réussis, de lettres de Stirling et de Mac Laurin, augmentent le prix de ce beau volume, que nous ne saurions trop recommander aux lecteurs du *Bulletin*.

GINO LORIA.

MÉLANGES.

SUR LE CHOIX DU RADIAN COMME UNITÉ D'ANGLE;

Par M. AURIC.

De nombreuses publications récentes proposent, avec des motifs très judicieusement développés, de prendre comme unité d'angle le *radian* (arc dont la longueur est égale au rayon, soit environ $57^{\circ}18'$).

Il est incontestable que l'adoption de cette unité aurait de réels avantages, car il suffirait d'*exprimer* la valeur d'un angle au centre pour avoir immédiatement et par une simple multiplication par le rayon la *longueur* de l'arc correspondant; il en résulterait une simplification considérable dans tous les calculs de ce genre.

Toutefois les promoteurs de cette réforme oublient que si le radian possède, au point de vue théorique et pratique, une importance indéniable, il en est de même pour la circonférence tout entière et ses premières subdivisions (demi et quart) dont l'emploi est fondamental dans les formules et les tables trigonométriques.

La question revient donc à la recherche d'une commune mesure entre la circonférence et son diamètre, c'est-à-dire à l'établissement d'une valeur rationnelle se rapprochant le plus possible du nombre π.

Or, à ce point de vue, il convient de rappeler que le rapport bien connu d'A. Metius $\frac{355}{113}$ possède une approximation véritablement remarquable, puisqu'il donne sept chiffres significatifs exacts (3,1415929... au lieu de 3,1415926...), tandis que la réduite suivante $\frac{104348}{33215}$, déjà calculée par Lagrange, dont les termes sont beaucoup plus grands, ne donne que neuf chiffres signifi-

catifs exacts : en général, le rapport de Métius sera suffisamment approché pour la plupart des applications numériques.

Dans ces conditions, si l'on partage le quadrant (90° ou 100^{gr}) en 355 parties égales et la circonférence en 1420, le radian en possédera très approximativement 226 ; la nouvelle unité qu'on pourrait appeler le *gone* serait très voisine du quart du degré et ses subdivisions seraient, bien entendu, obtenues en appliquant les règles du système décimal.

Pour avoir la longueur d'un arc de cercle exprimé en *gones*, il suffirait de multiplier par le rayon et de diviser par le nombre fixe 226 ; l'établissement de nouvelles tables fondées sur cette nouvelle division de la circonférence ne présenterait aucune difficulté.

SUR LES FONCTIONS ENTIÈRES DE GENRE FINI

PAR M. PAUL MONTEL.

1. M. Hadamard a démontré, dans la théorie des fonctions entières de genre fini, le théorème fondamental suivant : si une fonction entière $f(x)$ est d'ordre apparent ρ, elle peut se mettre sous la forme

$$f(x) = e^{Q(x)}G(x),$$

$G(x)$ désignant un produit canonique d'ordre ρ et $Q(x)$ un polynome de degré p au plus, p étant le plus grand entier contenu dans ρ [1].

La partie délicate de la démonstration est celle qui a pour but d'établir que l'exposant $Q(x)$ est un polynome entier de degré inférieur ou égal à p. On a essayé de tourner la difficulté en considérant la fonction $f(x)$ comme limite de polynomes : en 1914,

[1] J. HADAMARD, *Sur les propriétés des fonctions entières et en particulier d'une fonction considérée par Riemann* (*Journal de Mathématiques*, 4e série, t. IX, 1893, p. 171 et 215).

M. Lindwart [1] a donné une démonstration du théorème de M. Hadamard qui repose sur une idée de Laguerre; j'ai donné, en 1916, une démonstration s'appuyant sur les propriétés des familles de polynomes d'ordre donné [2]; enfin, tout récemment, M. Polyà vient de publier une démonstration qui diffère des précédentes dans certaines parties [3].

Je voudrais rappeler ici ma démonstration en indiquant quelques simplifications et quelques conséquences nouvelles. Désignons par

$$P(x) = 1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_n x^n$$

un polynome entier dont les racines sont $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, chacune d'elles répétée autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité, et $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ les modules de ces racines, et soit

$$\sigma_\rho = \frac{1}{\rho_1^\rho} + \frac{1}{\rho_2^\rho} + \ldots + \frac{1}{\rho_n^\rho},$$

ρ étant un nombre positif quelconque; désignons encore par

$$f(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

une fonction entière dont les zéros sont $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ de modules $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$, et soit

$$s_\rho = \frac{1}{r_1^\rho} + \frac{1}{r_2^\rho} + \ldots + \frac{1}{r_n^\rho} + \ldots,$$

en supposant convergente la série du second membre. Toute fonction entière étant de la forme $Ax^h f(x)$, il est clair que l'on peut se limiter à celles qui sont égales à 1 pour $x = 0$. Enfin, appelons p le plus grand entier contenu dans ρ.

Voici maintenant la marche de la démonstration; nous établirons les propositions suivantes :

---

(1) E. Lindwart, *Ueber eine Methode von Laguerre zur Bestimmung des Geschlechts einer ganzen Funktion* (*Dissertation*, Göttingen, 1914).

(2) P. Montel, *Sur les familles normales de fonctions analytiques* (*Annales de l'École Normale*, 3e série, t. XXXIII, 1916).

(3) G. Polyà, *Neuer Beweis für die Produktdarstellung der ganzen transcendenten Funktionen endlicher Ordnung* (*Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften*, janvier 1921).

1° Les polynomes pour lesquels les p premiers coefficients $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ et les sommes $\sigma_{\rho+\varepsilon}$ sont bornés forment une famille normale. Nous dirons que c'est une famille de polynomes d'ordre réel ρ ou, plus simplement, d'ordre ρ. Toute suite infinie de polynomes de cette famille est génératrice d'une fonction limite qui est une fonction entière de genre p.

2° Les polynomes pour lesquels

$$|P(x)| < e^{Hr^{\rho+\varepsilon}}$$

pour $|x| \leqq r$, quel que soit ε pour r assez grand, H désignant une constante fixe, forment une famille normale d'ordre apparent ρ : c'est aussi une famille d'ordre réel ρ.

3° Toute fonction entière d'ordre apparent ρ est limite d'une suite de polynomes d'ordre réel ρ.

2. Considérons donc une famille de polynomes

$$P(x) = 1 + \gamma_1 x + \gamma_2 x^2 + \ldots + \gamma_n x^n = \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right),$$

pour lesquels les sommes σ_ρ des puissances ρ des inverses des modules des racines sont inférieures à une limite fixe S et soit $p \leqq \rho < p+1$. Posons

$$\varphi(x) = \prod_{i=1}^{i=n}\left(1 - \frac{x}{\alpha_i}\right) e^{\frac{x}{\alpha_i} + \frac{x^2}{2\alpha_i^2} + \ldots + \frac{x^p}{p\alpha_i^p}} = e^{Q(x)} P(x),$$

$$Q(x) = x\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{\alpha_i} + \frac{x^2}{2}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{\alpha_i^2} + \ldots + \frac{x^p}{p}\sum_{i=1}^{i=n}\frac{1}{\alpha_i^p}.$$

Je dis que les fonctions $\varphi(x)$ sont bornées dans leur ensemble dans tout domaine fini; d'une manière précise, que l'on a, dans le cercle $|x| \leqq r$,

$$|\varphi(x)| < e^{Hr^\rho},$$

H désignant une constante fixe.

On sait, en effet, que tout facteur primaire $E(u)$ vérifie l'inégalité

$$\left|(1-u)e^{u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p}}\right| < e^{k|u|^\rho},$$

quel que soit u lorsque ρ est compris entre p et $p+1$; on a donc

$$\left|\left(1-\frac{x}{\alpha_i}\right)e^{\frac{x}{\alpha_i}+\frac{x^2}{2\alpha_i^2}+\ldots+\frac{x^p}{p\alpha_i^p}}\right| < e^{\frac{kr^\rho}{r_i^\rho}}$$

et, par suite,

$$|\varphi(x)| < e^{kSr^\rho} = e^{Hr^\rho}.$$

Il résulte de l'inégalité précédente que les fonctions $\varphi(x)$ forment une famille normale dans tout le plan, c'est-à-dire que toute suite infinie de ces fonctions donne naissance à une suite partielle qui converge uniformément dans tout domaine fini vers une fonction entière. En effet, les fonctions $\varphi(x)$ étant bornées dans le cercle $|x| \leqq 1$, on peut en extraire une suite

$$\varphi_1^{(1)}(x),\ \varphi_1^{(2)}(x),\ \ldots,\ \varphi_1^{(n)}(x),\ \ldots$$

qui converge uniformément dans ce cercle vers une fonction holomorphe $\Phi(x)$; les fonctions de cette suite, étant bornées dans le cercle $|x| \leqq 2$, on peut en extraire une suite partielle

$$\varphi_1^{(1)}(x),\ \varphi_2^{(2)}(x),\ \ldots,\ \varphi_2^{(n)}(x),\ \ldots$$

convergeant uniformément dans ce cercle vers la même fonction $\Phi(x)$, etc.; la suite

$$\varphi_1^{(1)}(x),\ \varphi_2^{(2)}(x),\ \ldots,\ \varphi_k^{(k)}(x),\ \ldots,\ \varphi_k^{(n)}(x),\ \ldots$$

converge uniformément dans le cercle $|x| \leqq k$ vers la fonction $\Phi(x)$. Si l'on considère maintenant la suite

$$\varphi_1^{(1)}(x),\ \varphi_2^{2}(x),\ \ldots,\ \varphi_n^{(n)}(x),\ \ldots$$

qui est formée d'éléments appartenant tous à chacune des suites précédentes, on voit qu'elle converge uniformément dans un cercle quelconque de centre origine vers la fonction $\Phi(x)$; par suite, cette fonction est une fonction entière.

Examinons maintenant les polynomes $Q(x)$; leurs coefficients sont les sommes des puissances $1, 2, \ldots, p$ des inverses des racines du polynome $P(x)$, à des facteurs numériques près. Ces sommes sont des polynomes entiers par rapport aux coefficients $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_p$ de ce polynome. Donc, si ces coefficients sont bornés, il en sera de même des sommes et, par suite, des coefficients des poly-

nomes $Q(x)$; par conséquent, on pourra extraire de la suite des polynomes $Q_n^{(n')}(x)$ une suite nouvelle

$$Q_1(x),\ Q_2(x),\ \ldots,\ Q_n(x),\ \ldots$$

convergeant uniformément dans tout domaine fini vers un polynome de degré p que nous appellerons $Q(x)$. Alors, la suite des polynomes

$$P_1(x),\ P_2(x),\ \ldots,\ P_n(x),\ \ldots,\quad P_n = e^{-Q_n}\varphi_n$$

converge vers une fonction entière, puisque l'on a

$$\lim_{n=\infty} e^{-Q_n}\varphi_n = e^{-Q(x)}\Phi(x) = f(x).$$

En résumé : *les polynomes* $P(x)$ *pour lesquels les sommes* σ_ρ *et les p premiers coefficients sont bornés forment une famille normale dans tout le plan.*

Il y a un cas où l'on peut affirmer que les p premiers coefficients des polynomes sont bornés : c'est celui où l'on sait que les polynomes $P(x)$ convergent uniformément dans une petite région contenant l'origine, car ces coefficients sont, à des facteurs numériques près, les valeurs pour $x = 0$ des dérivées successives des polynomes $P(x)$; comme ces dérivées ont pour limites les valeurs des dérivées correspondantes de la fonction limite $f(x)$, elles sont nécessairement bornées.

Remarquons encore que rien ne serait changé dans nos raisonnements si l'on supposait que les sommes $\sigma_{\rho+\varepsilon}$ sont bornées quelque petit que soit ε, les sommes σ_ρ pouvant être bornées ou non. Dans tous les cas, nous dirons que les polynomes forment une famille d'ordre réel ρ ou simplement d'ordre ρ.

Nous allons maintenant établir que la fonction limite $f(x)$ est une fonction entière de genre p. Comme on a

$$f(x) = e^{Q(x)}\Phi(x),$$

$Q(x)$ étant un polynome de degré p, il suffit évidemment de montrer que $\Phi(x)$ est une fonction de genre p.

Soient a_i un zéro de $\Phi(x)$ ou de $f(x)$ et m son ordre de multiplicité; traçons un cercle C de centre a_i et de rayon assez petit pour qu'il n'y ait pas d'autre zéro de $f(x)$ à l'intérieur ni sur la

circonférence. L'intégrale $\int_{(C)} \frac{f'(z)\,dz}{f(z)}$ est égale à m; or, cette intégrale est la limite de l'intégrale $\int_{C} \frac{P'_n(z)\,dz}{P_n(z)}$, donc cette dernière est égale à m lorsque n est assez grand; en d'autres termes, à partir d'une certaine valeur de n, le polynome $P_n(x)$ a exactement m zéros dans le voisinage de a_i, quelque petit que soit le rayon du cercle (C); il y a m zéros des polynomes de la suite qui ont pour limite a_i.

La somme

$$\frac{1}{r_1^\rho} + \frac{1}{r_2^\rho} + \ldots + \frac{1}{r_q^\rho},$$

dans laquelle q est un entier fixe, est la limite de la somme

$$\frac{1}{\rho_1^\rho} + \frac{1}{\rho_2^\rho} + \ldots + \frac{1}{\rho_q^\rho},$$

et, comme cette dernière est inférieure à S, la première ne dépasse pas S. Ce résultat étant vrai quel que soit q, on voit que

$$s_\rho = \frac{1}{r_1^\rho} + \frac{1}{r_2^\rho} + \ldots + \frac{1}{r_n^\rho} + \ldots \leqq S.$$

La fonction $f(x)$ est donc d'ordre réel ρ.

Il en est de même de la fonction $\Phi(x)$, qui a les mêmes zéros; nous allons montrer que cette dernière fonction est égale au produit canonique

$$G(x) = \prod_{i=1}^{i=\infty} \left(1 - \frac{x}{a_i}\right) e^{\frac{x}{a_i} + \frac{x^2}{2a_i^2} + \ldots + \frac{x^p}{pa_i^p}}.$$

Le facteur primaire

$$E(u) = (1-u)e^{u + \frac{u^2}{2} + \ldots + \frac{u^p}{p}}$$

satisfait à l'inégalité (¹)

$$|E(u) - 1| < 2|u|^{p+1} \qquad \text{pour} \qquad |u| < \frac{1}{2},$$

d'où

$$E(u) = 1 + 2\theta |u|^{p+1} \qquad (|\theta| < 1).$$

(¹) *Voir* E. Borel, *Leçons sur les fonctions entières*, p. 13; Paris, Gauthier-Villars.

Nous avons

$$\Phi(x) = \lim_{n=\infty} \varphi_n(x) = \lim_{n=\infty} \prod_{i=1}^{i=n} \left(1 - \frac{x}{\alpha_i}\right) e^{\frac{x}{\alpha_i} + \ldots + \frac{x^p}{p\alpha_i^p}};$$

supposons que x soit à l'intérieur du cercle $|x| < r$ et traçons un cercle concentrique de rayon $r' > 2r$. A l'intérieur de ce dernier cercle, il y a un certain nombre n_0 de racines de $G(x)$; prenons n assez grand pour que chaque fonction $\varphi_n(x)$ ait un zéro dans le voisinage d'un zéro de $G(x)$. Chaque fonction $\varphi_n(x)$ a donc n_0 zéros exactement dans le cercle de rayon r'. Posons

$$\varphi_n = \psi_n \chi_n,$$

avec

$$\psi_n = \prod_{i=1}^{i=n_0} E\left(\frac{x}{\alpha_i}\right), \qquad \chi_n = \prod_{i=n_0+1}^{i=n} E\left(\frac{x}{\alpha_i}\right) \qquad (n > n_0).$$

On a

$$\chi_n - 1 = \left(1 + 2\theta_1 \frac{r^{p+1}}{\rho_{n_0+1}^{p+1}}\right)\left(1 + 2\theta_2 \frac{r^{p+1}}{\rho_{n_0+2}^{p+1}}\right) \cdots \left(1 + 2\theta_{n-n_0} \frac{r^{p+1}}{\rho_n^{p+1}}\right) - 1$$

$$(|\theta_i| < 1),$$

$$|\chi_n - 1| < \left(1 + \frac{2r^{p+1}}{\rho_{n_0+1}^{p+1}}\right)\left(1 + \frac{2r^{p+1}}{\rho_{n_0+2}^{p+1}}\right) \cdots \left(1 + \frac{2r^{p+1}}{\rho_n^{p+1}}\right) - 1$$

$$< e^{2r^{p+1}\left(\frac{1}{\rho_{n_0+1}^{p+1}} + \ldots + \frac{1}{\rho_n^{p+1}}\right)} - 1 < e^{\frac{2Sr^{p+1}}{r'^{p+1-\varrho}}} - 1.$$

On peut donc prendre r' assez grand pour que le dernier membre de l'inégalité soit inférieur au nombre arbitraire ε; on aura alors

$$|\chi_n - 1| < \varepsilon,$$

et de même, en posant

$$G(x) = \psi\chi,$$

avec

$$\psi = \prod_{i=1}^{i=n_0} E\left(\frac{x}{a_i}\right), \qquad \chi = \prod_{i=n_0+1}^{i=\infty} E\left(\frac{x}{a_i}\right),$$

on aura pour la même raison

$$|\chi - 1| < \varepsilon.$$

r' étant fixé, le nombre n_0 est déterminé; la fonction ψ_n ayant pour limite ψ lorsque n croît indéfiniment, on peut prendre n

assez grand, $n > N$, pour que

$$|\psi_n - \psi| < \varepsilon.$$

Soit A une limite supérieure du module de ψ dans le cercle $|x| < r$; on aura, pour $n > N$, et x contenu dans ce cercle,

$$|\psi_n| < A + \varepsilon < A + 1$$

en supposant $\varepsilon < 1$. D'autre part,

$$G(x) - \varphi_n(x) = \psi\chi - \psi_n\chi_n = (\psi - \psi_n) + \psi(\chi - 1) - \psi_n(\chi_n - 1),$$

donc

$$|G(x) - \varphi_n(x)| < 2\varepsilon(A + 1)$$

et $\varphi_n(x)$ a bien pour limite $G(x)$ lorsque n croît indéfiniment. Le nombre r étant arbitraire, notre proposition est complètement établie. La fonction $f(x)$ est donc bien de genre p (1).

On peut donner une indication de plus lorsque $\rho = p$. Posons, en effet,

$$G(x) = e^{S'x^p}\, G_1(x),$$

avec

$$S' = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{i=\infty}\frac{1}{a_i^p}, \qquad G_1(x) = \prod_{i=1}^{i=\infty}\left(1 - \frac{x}{a_i}\right)e^{\frac{x}{a_i}+\ldots+\frac{x^{p-1}}{(p-1)a_i^{p-1}}};$$

on a alors

$$f(x) = e^{-Q(x)}\, G(x) = e^{S'x^p - Q(x)}\, G_1(x) = e^{Q_1(x)}\, G_1(x).$$

Donc, la fonction $f(x)$ est alors le produit d'un produit canonique de genre $p - 1$ par une exponentielle de genre p.

3. Considérons maintenant une famille de polynomes $P(x)$ vérifiant l'inégalité

$$|P(x)| < e^{Hr^\rho},$$

dans laquelle H est une constante indépendante du polynome de la famille. Ces polynomes forment une famille normale, puisqu'ils sont bornés dans leur ensemble dans tout domaine fini; il suffit, pour le voir, de reprendre la démonstration qui a été donnée au

(1) La démonstration que j'ai donnée en 1916 présentait une lacune que M. Valiron m'a obligeamment signalée.

début du numéro précédent. Je me propose d'établir que ces polynomes sont d'ordre réel ρ et que, par conséquent, toute fonction limite de tels polynomes est une fonction de genre p.

Nous supposerons pour cela que la suite des nombres $P(o)$ n'a pas pour unique limite zéro ; alors, nous pouvons choisir une infinité de polynomes $P(x)$ pour lesquels la suite des valeurs $P(o)$ a une limite non nulle et il suffit de raisonner sur les polynomes $\frac{P(x)}{P(o)}$ pour être ramené au cas où les polynomes prennent à l'origine la valeur un. Soit alors

$$P(x) = \left(1 - \frac{x}{\alpha_1}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{\alpha_k}\right)\left(1 - \frac{x}{\alpha_{k+1}}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{\alpha_n}\right)$$

un polynome de la suite choisie que nous pouvons supposer convergente pour toute valeur de x. Nous allons appliquer le théorème de M. Schou. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ les racines de ce polynome dont le module est inférieur ou égal à r et considérons la valeur maximum du module du polynome $Q(x)$ formé par les $h - k$ derniers facteurs dans le cercle $|x| \leqq 3r$; cette valeur maximum est atteinte en un point de la circonférence de rayon $3r$: les k premiers facteurs ont chacun un module supérieur ou égal à 2, leur produit a un module supérieur ou égal à 2^k: le polynome $Q(x)$ a un module maximum supérieur à $Q(o) = 1$. En ce point, le polynome $P(x)$ a un module supérieur à 2^k, donc

$$2^k < e^{H(3r)^\rho},$$

d'où

$$k < \frac{3^\rho H}{\log 2} r^\rho = hr^\rho.$$

Soient $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i, \ldots, \rho_n$ les modules des racines de $P(x)$ rangés par valeurs non décroissantes : on a évidemment

$$i < h\rho_i^\rho, \qquad \frac{1}{\rho_i} < \left(\frac{h}{i}\right)^{\frac{1}{\rho}}$$

et, par suite,

$$\sigma_{\rho+\varepsilon} = \frac{1}{\rho_1^{\rho+\varepsilon}} + \frac{1}{\rho_2^{\rho+\varepsilon}} + \ldots + \frac{1}{\rho_n^{\rho+\varepsilon}} < \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{h}{i}\right)^{\frac{\rho+\varepsilon}{\rho}} < S(\varepsilon),$$

$S(\varepsilon)$ désignant la somme de la série convergente $\sum_{i=1}^{i=\infty}\left(\frac{h}{i}\right)^{\frac{\rho+\varepsilon}{\rho}}$. Les polynomes $P(x)$ sont donc d'ordre réel ρ et leurs fonctions limites sont, par conséquent, des fonctions entières de genre p.

Le résultat eût été le même si les polynomes vérifiaient l'inégalité

$$|P(x)| < e^{Hr^{\rho+\varepsilon}},$$

quelque petit que soit ε; il suffirait, dans les calculs précédents, de remplacer ρ par $\rho + \frac{\varepsilon}{2}$. Si l'on convient d'appeler polynomes d'ordre apparent ρ ceux qui vérifient cette dernière inégalité, on voit que des polynomes d'ordre apparent ρ, pour lesquels $P(0)$ a un module supérieur à un nombre fixe, sont aussi d'ordre réel ρ.

Enfin, on peut aussi supposer que l'inégalité précédente n'est vérifiée qu'à partir d'une certaine valeur r_0 de r, la même pour tous les polynomes; en effet, les polynomes sont bornés dans le cercle $|x| \leqq r_0$, le nombre de leurs racines contenues dans ce cercle ne dépasse pas une limite supérieure n_0, puisqu'ils forment une famille normale dans le cercle considéré. D'autre part, le module de chaque racine reste supérieur à un nombre fixe puisqu'il en est ainsi pour $|P(0)|$, donc ces n_0 racines apportent aux sommes $\sigma_{\rho+\varepsilon}$ une contribution inférieure à un nombre fixe et les conclusions précédentes ne sont pas modifiées.

4. Il est maintenant bien facile de démontrer qu'une fonction entière d'ordre apparent ρ est de genre p. Cette fonction entière est de la forme $Ax^h f(x)$ avec

$$f(x) = 1 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n + \ldots$$

et la fonction entière $f(x)$ est aussi d'ordre apparent ρ : il suffit d'établir la proposition pour cette dernière. Posons

$$P_n(x) = 1 + c_1 x + \ldots + c_n x^n;$$

si $|x| < r$,

$$|P_n(x)| < 1 + |c_1| r + \ldots + |c_n| r^n.$$

Or, la fonction $f(x)$ étant d'ordre apparent ρ, on a, pour toute

valeur de x dont le module ne dépasse pas $2r$,

$$|f(x)| < e^{H(2r)^{\rho+\varepsilon}}, \qquad |c_n| < \frac{e^{H(2r)^{\rho+\varepsilon}}}{(2r)^n}$$

et, par suite,

$$|P_n(x)| < e^{H(2r)^{\rho+\varepsilon}}\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right] < 2e^{H(2r)^{\rho+\varepsilon}} < e^{H'r^{\rho+\varepsilon'}}.$$

Les polynomes $P_n(x)$ sont donc d'ordre apparent ρ et, par conséquent, la fonction $f(x)$, limite de ces polynomes, est une fonction entière de genre p : il en est de même de la fonction donnée $Ax^h f(x)$.

Les polynomes $P_n(x)$ introduits ici s'appellent les *polynomes sections* de la fonction $f(x)$: la notion de famille normale de polynomes d'ordre ρ permet de démontrer aisément et de généraliser diverses propositions, concernant ces polynomes sections, obtenues par M. Petrovitch, mais je renverrai pour ce point à mon Mémoire cité.

5. En considérant une fonction entière comme limite d'une suite de polynomes, on peut obtenir aisément les théorèmes de Laguerre sur les fonctions de genre fini, qui n'ont qu'un nombre fini de zéros imaginaires, ainsi que certaines généralisations récentes de M. Jensen. On pénètre d'ailleurs mieux le sens de ces propositions et la manière dont elles se relient aux théorèmes analogues concernant les polynomes.

Considérons, en effet, une fonction entière de genre p à coefficients réels

$$f(x) = 1 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots,$$

et supposons que tous les zéros de $f(x)$ soient réels. On peut écrire

$$f(x) = e^{Q(x)}G(x) = \lim_{n=\infty} e^{Q_n(x)}P_n(x),$$

avec

$$P_n(x) = \left(1-\frac{x}{a_1}\right)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{a_n}\right),$$

$a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ désignant les zéros réels de $f(x)$, $Q(x)$ et $Q_n(x)$ désignant des polynomes de degré p. Prenons l'entier λ_n

assez grand pour que l'on ait, dans le cercle $|x| < n$,

$$\left| 1 - e^{-Q_n}\left(1 + \frac{Q_n}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n} \right| < \frac{1}{n};$$

on aura alors

$$f(x) = \lim_{n=\infty} P_n\left(1 + \frac{Q_n}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n} = \lim_{n=\infty} R_n(x).$$

Le polynome $R_n(x)$ est de degré $n + \lambda_n p$; ses racines sont les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et les p racines de l'équation

$$1 + \frac{Q_n}{\lambda_n} = 0.$$

Ces dernières racines ont un module supérieur à n, sinon on aurait, pour une valeur de x de module inférieur à n,

$$|1 - e^{\lambda_n} \times 0| < \frac{1}{n},$$

ce qui est impossible. Les racines de cette dernière équation ont donc pour seul point limite le point à l'infini lorsque n croît indéfiniment.

Calculons la dérivée de $f(x)$:

$$f'(x) = \lim_{n=\infty} R'_n(x);$$

$R'_n(x)$ est de degré $n + \lambda_n p - 1$; ce polynome a pour racines : 1° les $n - 1$ racines, réelles dont l'existence est démontrée par le théorème de Rolle; 2° les p zéros de $1 + \frac{Q_n}{\lambda_n}$ avec le degré de multiplicité $\lambda_n - 1$; il en reste

$$(n-1) + p\lambda_n - [p(\lambda_n - 1) + (n-1)] = p,$$

et ces p racines peuvent être réelles ou imaginaires. Or, les zéros de $1 + \frac{Q_n}{\lambda_n}$ ont pour seul point limite le point à l'infini; les autres racines ont pour limites les zéros de $f'(x)$: nous voyons donc que $f'(x)$ a au plus p racines imaginaires, et $p - 1$ si p est impair. Le raisonnement demeure le même si l'on suppose que $f(x)$ a $2q$ racines imaginaires, alors $f'(x)$ a au plus $2q + p$ racines imaginaires : c'est le théorème de Laguerre.

On peut ajouter que $f'(x)$ est de genre p : en effet, supposons, par exemple, que $f(x)$ ait ses racines réelles et posons

$$R'_n = \left(1 + \frac{Q_n}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n - 1} S_n(x).$$

L'équation $S_n(x) = 0$ admet les $n - 1$ racines réelles prévues par le théorème de Rolle et un nombre limité de racines imaginaires ou réelles qui ont pour limites des racines de $f'(x)$ ou l'infini. Il en résulte que les polynomes $S_n(x)$ sont d'ordre ρ comme les polynomes $P_n(x)$: en effet, la somme

$$\frac{1}{\rho_1^{\rho+\varepsilon}} + \frac{1}{\rho_2^{\rho+\varepsilon}} + \ldots + \frac{1}{\rho_m^{\rho+\varepsilon}}$$

relative aux racines réelles non nulles de modules $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_m$ $(m \leq n - 1)$ est inférieure à

$$\frac{1}{r_1^{\rho+\varepsilon}} + \frac{1}{r_2^{\rho+\varepsilon}} + \ldots + \frac{1}{r_n^{\rho+\varepsilon}} < \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{r_n^{\rho+\varepsilon}}$$

et cette somme est bornée ; d'autre part, les autres racines de $S_n(x)$, qui sont en nombre limité, ont des modules dont les inverses sont nécessairement bornés. Le polynome $S_n(x)$ est donc d'ordre ρ. Il en résulte que l'on peut trouver des polynomes $T_n(x)$ tels que $e^{T_n(x)} S_n(x)$ ait pour limite une fonction entière de genre p ; donc, comme

$$e^{Q_n} S_n(x) = e^{Q_n - T_n} e^{T_n} S_n$$

a une limite, il en est de même de $e^{Q_n - T_n}$ et, par suite, de $Q_n - T_n$, qui a pour limite un polynome de degré p. Par conséquent, $f'(x)$ est de genre p et il en est de même de $f''(x)$ et de toutes les dérivées de $f(x)$.

On peut, en suivant la même voie, étendre aux fonctions entières de genre fini le théorème de Poulain, comme l'a fait M. Jensen [1]. On sait que si le polynome $P(x)$ a $2q$ racines imaginaires au plus, et si le polynome

$$A_0 + A_1 x + \ldots + A_k x^k = 0$$

---

[1] Jensen, *Recherches sur la théorie des équations* (*Acta mathematica*, t. 36, 1912-1913, p. 181).

a toutes ses racines réelles, l'équation

$$A_0 P + A_1 P' + \ldots + A_k P^{(k)} = 0$$

n'a pas plus de $2q$ racines imaginaires. Soit maintenant $f(x)$ une fonction entière de genre p qui a au plus $2q$ racines imaginaires, je dis que l'équation

$$g(x) = A_0 f(x) + A_1 f'(x) + \ldots + A_k f^{(k)}(x) = 0$$

a au plus $2q + pk$ racines imaginaires.

La fonction $g(x)$ est, en effet, la limite du polynome

$$g_n(x) = A_0 R_n + A_1 R'_n + \ldots + A_k R_n^{(k)},$$

qui est de degré $n + p\lambda_n$; comme le polynome R_n est de la forme $\left(1 + \frac{Q_n}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n} P_n$, il en résulte que $g_n(x)$ contient $\left(1 + \frac{Q_n}{\lambda_n}\right)^{\lambda_n - k}$ en facteur et ce facteur nous fournit $p(\lambda_n - k)$ racines de $g_n(x)$ qui ont pour limite l'infini. En outre, comme $R_n(x)$ a au moins $n - 2q$ racines réelles, il en est de même de $g_n(x)$: il reste alors

$$n + p\lambda_n - [p(\lambda_n - k) + n - 2q] = 2q + pk$$

racines qui peuvent être réelles ou imaginaires. Comme les polynomes $g_n(x)$ ont pour limite la fonction $g(x)$, on en conclut que cette fonction n'a pas plus de $2q + pk$ racines imaginaires. Le théorème de Laguerre est un cas particulier de cette proposition.

LA LOI ÉLECTRODYNAMIQUE DE RIEMANN, LE PÉRIHÉLIE DE MERCURE ET LA DÉVIATION DES RAYONS LUMINEUX;

PAR M. GASTON BERTRAND.

---

1. *La loi de Riemann.* — D'après Riemann, une masse $m(x, y, z)$ exerce sur une masse $m'(x', y', z')$ une action dont les composantes

sont

$$X = -\frac{fmm'}{r^2}\frac{x'-x}{r} - \frac{fmm'}{2c^2}\frac{d}{dt}\left[\frac{2}{r}\left(\frac{dx'}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)\right]$$
$$-\frac{fmm'}{2c^2}\frac{1}{r^2}\frac{x'-x}{r}\left[\left(\frac{dx'}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}-\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dt}-\frac{dz}{dt}\right)^2\right]$$

et les deux analogues en Y et Z.

f est un coefficient et c représente la vitesse de la lumière.

Soient donc le Soleil $m(x, y, z)$ et la Planète $m'(x', y', z')$; on a pour leur mouvement absolu les équations

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{fm'}{r^2}\frac{x-x'}{r} - \frac{fm'}{2c^2}\frac{d}{dt}\left[\frac{2}{r}\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)\right]$$
$$-\frac{fm'}{2c^2}\frac{1}{r^2}\frac{x-x'}{r}\left[\left(\frac{dx}{dt}-\frac{dx'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}-\frac{dy'}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}-\frac{dz'}{dt}\right)^2\right],$$

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = -\frac{fm}{r^2}\frac{x'-x}{r} - \frac{fm}{2c^2}\frac{d}{dt}\left[\frac{2}{r}\left(\frac{dx'}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)\right]$$
$$-\frac{fm}{2c^2}\frac{1}{r^2}\frac{x'-x}{r}\left[\left(\frac{dx'}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}-\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dt}-\frac{dz}{dt}\right)^2\right];$$

d'où, en retranchant la première de la seconde, l'équation du mouvement relatif de la planète :

$$\frac{d^2x'}{dt^2}-\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{f(m+m')}{r^2}\frac{x'-x}{r} - \frac{f(m+m')}{2c^2}\frac{d}{dt}\left[\frac{2}{r}\left(\frac{dx'}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)\right]$$
$$-\frac{f(m+m')}{2c^2}\frac{1}{r^2}\frac{x'-x}{r}$$
$$\times\left[\left(\frac{dx'}{dt}-\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy'}{dt}-\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dt}-\frac{dz}{dt}\right)^2\right].$$

Autrement dit, les équations du mouvement relatif d'une masse $m(x, y, z)$, attirée par une autre masse, sont

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{fMx}{r^3} - \frac{fM}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\right) - \frac{fM}{2c^2}\frac{xv^2}{r^3}$$

et les deux analogues en y et z.

2. *Loi de Riemann modifiée.* — Cette loi, comme on le sait, ne conduit pas à la formule d'Einstein pour le périhélie de Mercure.

On peut la rendre plus souple en introduisant un coefficient indéterminé α dans les second et troisième termes. On a ainsi les trois équations :

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{f\mathrm{M}x}{r^3} - \frac{\alpha f\mathrm{M}}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\right) - \frac{\alpha f\mathrm{M}}{2c^2}\frac{x v^2}{r^3},\\
\frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{f\mathrm{M}y}{r^3} - \frac{\alpha f\mathrm{M}}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dy}{dt}\right) - \frac{\alpha f\mathrm{M}}{2c^2}\frac{y v^2}{r^3},\\
\frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{f\mathrm{M}z}{r^3} - \frac{\alpha f\mathrm{M}}{c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dz}{dt}\right) - \frac{\alpha f\mathrm{M}}{2c^2}\frac{z v^2}{r^3}.
\end{aligned}\right.$$

Équation des aires :

$$x\frac{d^2 y}{dt^2} - y\frac{d^2 x}{dt^2} = -\frac{\alpha f\mathrm{M}}{c^2}\left[x\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dy}{dt}\right) - y\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\right)\right]$$

$$= -\frac{\alpha f\mathrm{M}}{c^2}\left[\frac{1}{r}\left(x\frac{d^2 y}{dt^2} - y\frac{d^2 x}{dt^2}\right) + \frac{d\frac{1}{r}}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\right],$$

$$\left(x\frac{d^2 y}{dt^2} - y\frac{d^2 x}{dt^2}\right)\left(1 + \frac{\alpha f\mathrm{M}}{c^2 r}\right) = -\frac{\alpha f\mathrm{M}}{c^2}\frac{d\frac{1}{r}}{dt}\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right),$$

$$\frac{x\frac{d^2 y}{dt^2} - y\frac{d^2 x}{dt^2}}{x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}} + \frac{\frac{\alpha f\mathrm{M}}{c^2}\frac{d\frac{1}{r}}{dt}}{1 + \frac{\alpha f\mathrm{M}}{c^2 r}} = 0;$$

d'où les trois équations des aires :

$$\left\{\begin{aligned}
\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right)\left(1 + \frac{\alpha f\mathrm{M}}{c^2 r}\right) &= \Gamma,\\
\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right)\left(1 + \frac{\alpha f\mathrm{M}}{c^2 r}\right) &= \Gamma',\\
\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right)\left(1 + \frac{\alpha f\mathrm{M}}{c^2 r}\right) &= \Gamma'';
\end{aligned}\right.$$

ce qui donne

$$\Gamma z + \Gamma' x + \Gamma'' y = 0.$$

Quelles que soient les conditions initiales, le mouvement est plan et l'on peut faire $z = 0$.

Équation des forces vives :

$$\frac{d^2x}{dt^2}\frac{dx}{dt}+\frac{d^2y}{dt^2}\frac{dy}{dt}=-\frac{f\mathrm{M}}{r^3}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)-\frac{\alpha f\mathrm{M}}{2c^2}\frac{v^2}{r^3}\left(x\frac{dx}{dt}+y\frac{dy}{dt}\right)$$
$$-\frac{\alpha f\mathrm{M}}{c^2}\left[\frac{dx}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{dt}\right)+\frac{dy}{dt}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\frac{dy}{dt}\right)\right],$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)=-\frac{f\mathrm{M}}{r^2}\frac{dr}{dt}-\frac{\alpha f\mathrm{M}}{2c^2}\frac{v^2}{r^2}\frac{dr}{dt}-\frac{\alpha f\mathrm{M}}{c^2}v^2\frac{d\frac{1}{r}}{dt}-\frac{\alpha f\mathrm{M}}{c^2 r}\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$
$$=f\mathrm{M}\frac{d\frac{1}{r}}{dt}-\frac{\alpha f\mathrm{M}}{2c^2}v^2\frac{d\frac{1}{r}}{dt}-\frac{\alpha f\mathrm{M}}{2c^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dt}(v^2)$$
$$=f\mathrm{M}\frac{d\frac{1}{r}}{dt}-\frac{\alpha f\mathrm{M}}{2c^2}\frac{d}{dt}\left(\frac{v^2}{r}\right),$$
$$\frac{v^2}{2}=\frac{f\mathrm{M}}{r}-\frac{\alpha f\mathrm{M}}{2c^2}\frac{v^2}{r}+\frac{h}{2};$$

d'où l'équation des forces vives

$$v^2\left(1+\frac{\alpha f\mathrm{M}}{c^2 r}\right)=\frac{2f\mathrm{M}}{r}+h.$$

3. *Étude de la trajectoire.* — Je pose

$$f\mathrm{M}=\lambda,\qquad \frac{\alpha f\mathrm{M}}{c^2}=\mu,\qquad \frac{1}{r}=u.$$

Les deux intégrales précédentes s'écrivent

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{\Gamma}{1+\mu u},$$
$$\frac{dr^2}{dt^2}+r^2\frac{d\theta^2}{dt^2}=\frac{2\lambda u+h}{1+\mu u},$$
$$\Gamma^2\left(\frac{du^2}{d\theta^2}+u^2\right)=(2\lambda u+h)(1+\mu u)=2\lambda\mu u^2+(2\lambda+\mu h)u+h,$$
$$\frac{du^2}{d\theta^2}=-\left(1-\frac{2\lambda\mu}{\Gamma^2}\right)u^2+\frac{2\lambda+\mu h}{\Gamma^2}u+\frac{h}{\Gamma^2}.$$

Pour une trajectoire voisine d'une trajectoire elliptique, on a

$$1-\frac{2\lambda\mu}{\Gamma^2}>0, \qquad h<0,$$

$$\frac{1}{1-\frac{2\lambda\mu}{\Gamma^2}}\frac{du^2}{d\theta^2}=-u^2+\frac{2\lambda+\mu h}{\Gamma^2-2\lambda\mu}u+\frac{h}{\Gamma^2-2\lambda\mu},$$

$$\frac{1}{1-\frac{2\lambda\mu}{\Gamma^2}}\frac{du^2}{d\theta^2}=-\left(u-\frac{2\lambda+\mu h}{2\Gamma^2-4\lambda\mu}\right)^2+\frac{4\lambda^2-4\lambda\mu h+\mu^2h^2+4h\Gamma^2}{(2\Gamma^2-4\lambda\mu)^2};$$

d'où l'équation de la trajectoire

$$\frac{1}{r}=\frac{2\lambda+\mu h}{2\Gamma^2-4\lambda\mu}+\frac{\sqrt{4\lambda^2-4\lambda\mu h+\mu^2h^2+4h\Gamma^2}}{2\Gamma^2-4\lambda\mu}\cos(\theta-\theta_0)\sqrt{1-\frac{2\lambda\mu}{\Gamma^2}}.$$

4. *Rotation du périhélie.* — Le rayon vecteur est minimum quand

$$\cos\sqrt{1-\frac{2\lambda\mu}{\Gamma^2}}(\theta-\theta_0)=1,$$

$$\sqrt{1-\frac{2\lambda\mu}{\Gamma^2}}(\theta_n-\theta_0)=2n\pi,$$

$$\theta_n=\theta_0+\frac{2n\pi}{\sqrt{1-\frac{2\lambda\mu}{\Gamma^2}}},$$

$$\theta_{n+1}=\theta_0+\frac{2\pi(n+1)}{\sqrt{1-\frac{2\lambda\mu}{\Gamma^2}}};$$

ce qui donne, pour la rotation du périhélie,

$$\delta\Omega=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\frac{2\lambda\mu}{\Gamma^2}}}-2\pi.$$

La trajectoire étant infiniment voisine d'une ellipse, la quantité $\frac{\lambda\mu}{\Gamma^2}$ est infiniment petite et l'on a

$$\delta\Omega=2\pi\frac{\lambda\mu}{\Gamma^2},$$

c'est-à-dire

$$\delta\Omega=2\pi\alpha\frac{f^2M^2}{c^2\Gamma^2}.$$

Le mouvement a lieu sensiblement suivant les lois de Képler, ce qui donne

$$fM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2};$$

$$\Gamma^2 T^2 = 4\pi^2 a^4 (1 - e^2),$$

T, durée de la révolution; a, demi-grand axe; e, excentricité.

D'où la formule cherchée

$$\delta\Omega = 8\alpha \frac{\pi^3 a^2}{c^2 T^2 (1 - e^2)}.$$

5. *Trajectoire des rayons lumineux.* — Je considère le rayon lumineux comme une particule électrisée partant de l'infini avec la vitesse c et venant passer à la distance minimum R du centre du Soleil.

On a alors les deux équations

$$\left\{ \begin{aligned} r^2 \frac{d\theta}{dt} &= \frac{\Gamma r}{r + \mu}, \\ v^2 &= \frac{c^2 r + 2\lambda}{r + \mu}. \end{aligned} \right.$$

Soit v_0 la vitesse de la particule au périhélie :

$$R v_0 = \frac{\Gamma R}{R + \mu},$$

$$v_0^2 = \frac{c^2 R + 2\lambda}{R + \mu};$$

ce qui donne

$$\Gamma^2 = (c^2 R + 2\lambda)(R + \mu).$$

L'équation de la trajectoire est la même qu'au n° 3 :

$$\frac{1}{r} = \frac{2\lambda + \mu c^2}{2\Gamma^2 - 4\lambda\mu} + \frac{\sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda\mu c^2 + \mu^2 c^4 + 4c^2\Gamma^2}}{2\Gamma^2 - 4\lambda\mu} \cos\sqrt{1 - \frac{2\lambda\mu}{\Gamma^2}}\,(\theta - \theta_0).$$

En effet,

$$1 - \frac{2\lambda\mu}{\Gamma^2} = 1 - \frac{2\lambda\mu}{(c^2 R + 2\lambda)(R + \mu)} = 1 - \frac{\dfrac{2\alpha f^2 M^2}{c^4}}{\left(R + \dfrac{2fM}{c^2}\right)\left(R + \dfrac{\alpha fM}{c^2}\right)}.$$

Or, $\frac{fM}{c^2}$ est approximativement égal à $1^{\text{km}},500$ et pour un rayon rasant la surface du Soleil

$$R = 695\,500^{\text{km}}.$$

Donc le facteur de $(\theta - \theta_0)$ est extrêmement voisin de l'unité.

D'autre part, on a

$$2\Gamma^2 - 4\lambda\mu = 2R(c^2R + 2\lambda + c^2\mu),$$

$$\sqrt{4\lambda^2 - 4\lambda\mu c^2 + \mu^2c^4 + 4c^2\Gamma^2} = 2c^2R + 2\lambda + c^2\mu.$$

Et l'équation de la trajectoire d'un rayon lumineux est

$$\frac{1}{r} = \frac{2\lambda + c^2\mu}{2R(c^2R + 2\lambda + c^2\mu)} + \frac{2c^2R + 2\lambda + c^2\mu}{2R(c^2R + 2\lambda + c^2\mu)}\cos\sqrt{1 - \frac{2\lambda\mu}{\Gamma^2}}(\theta - \theta_0)$$

ou encore

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{fM}{c^2}(2+\alpha)}{2R\left[R + \frac{fM}{c^2}(2+\alpha)\right]} + \frac{2R + \frac{fM}{c^2}(2+\alpha)}{2R\left[R + \frac{fM}{c^2}(2+\alpha)\right]}\cos\sqrt{1 - \frac{2\lambda\mu}{\Gamma^2}}(\theta - \theta_0),$$

ce qui montre que le rapport du premier coefficient au second est de l'ordre de $\frac{fM}{c^2R}$.

6. *Déviation d'un rayon lumineux.* — Soit la courbe

$$\frac{1}{r} = A + B\cos K\theta,$$

$\frac{A}{B}$ et $1 - K$ étant très petits. Une direction asymptotique est déterminée par l'équation

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - K\theta_1\right) = -\frac{A}{B},$$

$$K\theta_1 = \frac{\pi}{2} + \frac{A}{B},$$

et l'on a pour la direction symétrique

$$K\theta_2 = -\frac{\pi}{2} - \frac{A}{B},$$

$$\theta_1 - \theta_2 = \frac{1}{K}\left(\pi + 2\frac{A}{B}\right).$$

Or, on a vu que $\frac{A}{B}$ est du premier ordre en $\frac{fM}{c^2 R}$ et $1 - K$ du second ordre. On a donc par la déviation cherchée

$$\delta = 2\frac{A}{B},$$

$$\delta = \frac{\frac{fM}{c^2}(2+\alpha)}{R + \frac{fM}{2c^2}(2+\alpha)}$$

ou tout simplement

$$\delta = \frac{fM(2+\alpha)}{c^2 R}.$$

7. *Résumé.* — Formules d'Einstein :

$$\delta\Omega = \frac{24\pi^3 a^2}{c^2 T^2(1-e^2)}, \qquad \delta = 4\frac{fM}{c^2 R}.$$

Loi de Riemann modifiée :

$$\delta\Omega = \frac{8\alpha\pi^3 a^2}{c^2 T^2(1-e^2)}, \qquad \delta = (2+\alpha)\frac{fM}{c^2 R}.$$

Loi de Newton ($\alpha = 0$) :

$$\delta\Omega = 0, \qquad \delta = 2\frac{fM}{c^2 R}.$$

8. *Conclusion.* — I. Si l'on adopte 42″,9 pour la rotation séculaire du périhélie de Mercure, il faut prendre $\alpha = 3$, et la déviation d'un rayon lumineux est

$$\delta = \frac{5fM}{c^2 R},$$

c'est-à-dire pour un rayon rasant la surface du Soleil 2″,2 au lieu de 1″,75 déduite de la formule d'Einstein.

II. Si l'on adopte les calculs de Grossmann qui donnent 38″ tout au plus pour Mercure, le nombre α qui *caractérise le champ électrique solaire* est égal à 2,6 environ; ce qui donne pour δ

$$\delta = 2'',0.$$

Il faudra donc des mesures d'une extrême précision pour choisir entre Einstein et Riemann.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DICKSON (LEONARD EUGENE), Correspondant de l'Institut de France, professor of mathematics in the University of Chicago. — FIRST COURSE IN THE THEORY OF EQUATIONS (New-York, John Wiley and Sons; 1922).

Cette excellente introduction à la théorie des équations algébriques est élémentaire et, en même temps, on reconnaît immédiatement qu'elle a été écrite par un algébriste éminent et qu'elle a été rédigée avec soin, contenant de nombreux exercices, bien choisis, qui exerceront parfaitement un étudiant attentif.

Après quelques définitions et remarques simples, l'auteur pose, comme un principe tiré de l'expérience, le théorème fondamental de l'Algèbre (p. 17), et c'est logique, car le théorème relatif aux m racines d'un polynome de degré m est un théorème d'Analyse.

Puis, l'auteur donne deux règles (p. 21 et 22) pour trouver des limites supérieures des racines réelles des équations à coefficients réels. La première régle est souvent attribuée à Lagrange. Notons que la démonstration repose simplement sur ce fait que le quotient de $x^m - 1$ par $x - 1$ est la progression $1 + x + x^2 + \ldots + x^{m-1}$.

Ensuite, M. Dickson résout les équations de degré 3 et 4, il donne le théorème de Rolle, et nous arrivons alors aux théorèmes classiques (Chap. VI).

D'abord la « Règle de Descartes » : le nombre des racines positives d'une équation à coefficients réels est au plus égal au nombre des variations. S'il existe une différence, c'est un nombre *pair*. M. Dickson expose la démonstration du professeur D.-R. Curtiss.

Nous apprenons maintenant à former les « suites de Sturm ». Soit $f(x)$ le polynome, soit $f_1(x)$ sa dérivée. On fait des opérations analogues à celles qui donnent le plus grand commun diviseur

$$f = q_1 f_1 - f_2, \qquad f_1 = q_2 f_2 - f_3, \qquad \ldots, \qquad f_{n-2} = q_{n-1} f_{n-1} - f_n,$$

f_n est une constante non nulle. Dans le cas contraire, il y aurait une racine multiple, hypothèse exclue provisoirement. Les nombres

a et b n'étant pas des racines, le nombre des racines comprises entre a et b est égal à l'excès du nombre des variations de la suite $f(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_{n-1}(x)$, f_n, pour $x=a$ sur ce même nombre pour $x=b$.

Plus loin (p. 82), le cas des racines multiples est examiné; le théorème subsiste, toute racine multiple étant comptée une seule fois.

La théorie de Sturm est d'autant plus intéressante que Sturm a établi des théorèmes fondamentaux sur la séparation des racines des solutions des équations différentielles ([1]).

Le « théorème de Budan » (que nous attribuons à Fourier) est plus vague, théoriquement, que celui de Sturm, mais il est souvent d'un emploi plus commode; on forme la suite des dérivées

$$f(x), \; f^1(x), \; \ldots, \; f^n = \text{const.}$$

le nombre des racines de l'équation, comprises entre a et b, est au plus égal au nombre des variations perdues par la suite, quand on fait successivement $x=a$ et $x=b$. S'il existe une différence, c'est un nombre pair.

Si, en outre, a et b étaient des racines, on ne les compterait pas. Et une racine multiple équivaut à p racines simples.

Nous retrouvons (p. 85) la Règle de Descartes, comme corollaire du théorème de Budan.

Le Chapitre VII est consacré au *calcul numérique* des racines. M. Dickson nous donne la bonne vieille méthode de Horner. Si une racine est comprise entre 2 et 3, on pose $x=2+p$ et l'on trouve une équation en p, que l'on réduit à ses deux derniers termes :

$$Ap + B = 0.$$

On a ainsi une valeur approchée de p, soit p' cette valeur. On pose $p = p' + h$ et l'on continue. Les calculs peuvent être disposés d'une manière très commode.

L'auteur n'a pas voulu omettre la méthode classique de Newton. Les méthodes ne manquent pas; la meilleure est celle que l'on manie mieux!

Nous trouvons, dans le Chapitre VIII, les équations linéaires et les déterminants. Comme d'habitude, M. Dickson donne, par un

([1]) *Voir*, par exemple, dans la Collection Borel, les *Leçons* de Maxime Bôcher sur les *Méthodes de Sturm*.

cas particulier, l'intuition de la théorie générale. Rien n'est plus agréable, pour le lecteur; l'art d'un maître consiste à trouver le cas particulier qui contient *toute* la richesse essentielle de l'idée à mettre en valeur.

Je remarque que la théorie du produit des déterminants, tirée des développements de Laplace, n'est pas la plus simple, pour un débutant; mais cette question, comme toutes les autres, est admirablement présentée.

La théorie des fonctions rationnelles symétriques fait l'objet du Chapitre IX, qui contient ces deux théorèmes :

1° Soit P un polynome symétrique par rapport aux racines de l'équation $f(x) = 0$, P s'exprime par un polynome, à coefficients entiers, par rapport aux coefficients de P et de f.

2° Soit P une fonction rationnelle des racines $a_1, a_2, \ldots, a_n$ de l'équation $f = 0$; P étant symétrique par rapport aux racines a_1, $a_2, \ldots, a_{n-1}$; P s'exprime par une fonction rationnelle, à coefficients entiers, de a_n et des coefficients de P et de $f(x)$.

On doit remarquer qu'une fonction rationnelle symétrique se ramène au quotient de deux polynomes symétriques.

Le résultant de deux équations algébriques est donné, théoriquement, par des fonctions symétriques.

Si, comme Bezout ou Sylvester, on fait, intuitivement, des opérations simples sur les deux équations, pour exprimer qu'elles ont une racine commune, on trouve, immédiatement, un certain déterminant; est-ce bien le résultant? Les calculs n'ont-ils pas introduit des facteur parasites?

J'admire l'habileté (p. 145) avec laquelle M. Dickson répond à cette question. Il passe du déterminant de Sylvester à un autre, contenant un paramètre z; il retourne ce déterminant, de sorte que le facteur $[f(\beta) - z]$ apparaît, f étant un des polynomes donnés, β étant une racine de l'autre polynome.

En jouant ainsi avec les équations et les déterminants, on devient algébriste!

L'Ouvrage se termine par le théorème fondamental de l'Algèbre, qui demande la connaissance, au moins intuitive, des éléments de l'Analyse du *continu*.

Si un bon « taupin » veut étudier ce livre, il deviendra habile et savant, et il apprendra un peu la langue de nos grands Alliés, Anglais et Américains, qui demeurent nos grands amis.

Les étudiants doivent tirer grand parti de ce Livre et les professeur le liront avec beaucoup de plaisir.

Robert d'Adhémar.

MÉLANGES.

SUR LA DÉMONSTRATION DES LOIS DE LA MÉCANIQUE D'APRÈS LA THÉORIE D'EINSTEIN;

Par M. H. MINEUR.

Considérons avec M. Einstein l'univers comme une multiplicité à quatre dimensions dans laquelle la matière se trouve répartie. Nous nous placerons dans le cas le plus général, nous supposerons que la matière qui remplit l'univers est un fluide compressible ou non dont la densité en certaines régions peut être nulle. Soient x^1, x^2, x^3, x^4 les coordonnées d'un point de cette multiplicité, soient

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k$$

le carré de « l'intervalle » des deux points x^i, $x^i + dx^i$, et R_{ihkl} le tenseur de Riemann-Christoffel; nous désignerons par R_{ihklm} la dérivée covariante de ce tenseur, l'indice m étant l'indice de dérivation, nous poserons

$$R_{ik\alpha\cdot}^{\ \ \ \ \beta} = g^{\mu\beta} R_{ik\alpha\mu}$$

et

$$R^i_{\cdot k\alpha\cdot}{}^{\beta} = g^{i\nu} R_{\nu k\alpha\cdot}^{\ \ \ \ \beta}$$

en ayant soin, lorsque nous changerons un indice covariant en un indice contrevariant par l'opération précédente, de laisser cet indice à la même distance de la lettre R. Désignons par R^i_k le tenseur contracté :

$$R^i_k = R^i_{\cdot k\alpha\cdot}{}^{\alpha}$$

et par R l'invariant $R = R^i_i$.

La dérivée covariante de R^i_k est

$$R^i_{ks} = R^i_{\cdot k\alpha\cdot s}{}^{\alpha}$$

et celle de R est

$$R_s = R^i_{\cdot i\alpha\cdot s}{}^{\alpha}$$

Soient μ_0 la densité au repos de la matière en un point de l'univers, $a^i = \frac{dx^i}{ds}$ la vitesse d'univers de la matière en ce point. Le tenseur

$$T^{ik} = \mu_0 a^i a^k$$

est appelé *tenseur* d'énergie et de quantité de mouvement.

La loi d'Einstein s'exprime par les équations

$$R^i_k - \frac{1}{2} g^i_k R = -8\pi T^i_k$$

qui sont en somme les équations de l'Hydrodynamique dans cette théorie.

Si l'on se donne la répartition de la matière et la vitesse des particules matérielles sur une multiplicité à trois dimensions M située dans l'univers et le ds^2 de cette multiplicité, ces équations d'Einstein définissent les coefficients g_{ik} et le mouvement de la matière dans tout l'univers; il faudra cependant que le ds^2 de M vérifie certaines conditions, par exemple s'il n'y a pas de matière présente, l'univers sera euclidien et le ds^2 de M devra être tel qu'on puisse placer M dans une multiplicité euclidienne à quatre dimensions. Si la multiplicité à trois dimensions considérée M est une section de l'univers à temps constant pour un certain observateur, le résultat que nous venons d'énoncer est équivalent au résultat de l'ancienne Mécanique, d'après lequel le mouvement d'un ensemble de particules matérielles, s'attirant en vertu de la loi de Newton, est déterminé si l'on se donne les positions et les vitesses de ces particules à un instant initial. Pour la loi d'Einstein, la démonstration de ce résultat est encore à trouver; la question se complique de ce fait qu'il faut donner une définition précise du système de coordonnées auquel on rapportera la solution trouvée; la valeur des g_{ik} dépend, en effet, de ce système de coordonnées, et ne sera définie que si ce système l'est aussi; la méthode la plus naturelle consisterait à utiliser, pour définir le système de coordonnées, le ds^2 de l'univers et la matière présente, par exemple à employer un système de coordonnées dans lequel les courbes x_1 variables sont des géodésiques orthogonales à M et la coordonnée x_1 l'arc de ces lignes; on voit que le système de coordonnées lui-même intervient alors comme inconnue dans le problème.

Nous supposerons que, dans l'univers que nous considérons, la matière soit reliée aux g_{ik} par les équations d'Einstein précédem-

ment écrites et nous donnerons une démonstration que nous croyons nouvelle du théorème suivant :

« La divergence de $R_i^k - \frac{1}{2} g_i^k R$, c'est-à-dire la quantité $R_{ik}^k - \frac{1}{2} g_i^k R_k$, est nulle. »

Nous en déduirons les quatre équations

$$T_{ik}^k = 0\,;$$

elles expriment que chaque particule matérielle décrit une géodésique de l'univers ; nous en déduirons une autre qui, par sa forme, rappelle l'équation de continuité en Hydrodynamique, dans le cas où l'on a affaire à une particule isolée, cette équation exprime que la masse au repos de la particule reste constante ; la masse n'étant qu'une forme de l'énergie, l'équation dont nous venons de parler exprimera la conservation de l'énergie.

I. $$R_{ik}^k - \frac{1}{2} g_i^k R_k = 0.$$

Cette identité fait intervenir les dérivées covariantes du tenseur de Riemann-Christoffel, voici comment nous introduirons ces éléments :

Soient A^i un vecteur, $A^i_{.hk}$ sa dérivée covariante seconde ; on a l'identité bien connue

$$A^i_{.hk} - A^i_{.kh} = R^i_{.hk\alpha} A^\alpha\,;$$

prenons la dérivée covariante des deux membres de cette identité par rapport à l'indice l :

$$A^i_{.hkl} - A^i_{.khl} = R^i_{.hk\alpha l} A^\alpha + R^i_{.hk\alpha} A^\alpha_{.l}.$$

Le tenseur dérivé du tenseur de Riemann-Christoffel intervient dans cette identité. Dans le premier membre nous avons la différence de deux dérivées covariantes troisièmes du tenseur A^i, mais pour ces deux dérivées le dernier indice de dérivation est le même ; cherchons donc l'expression de la différence analogue

$$A^i_{.hkl} - A^i_{.hlk}.$$

Le calcul se fait facilement en partant des expressions des dérivées constantes d'un tenseur $\binom{1}{1}$ et d'un tenseur $\binom{1}{2}$, on trouve :

$$A^i_{.hkl} - A^i_{.hlk} = R^i_{.kl\alpha} A^\alpha_{.h} + R_{hkl.}^{\alpha} A^i_{.\alpha}.$$

Ceci posé, écrivons successivement :

$$A^{i}_{.hkl} - A^{i}_{.hlk} = R^{i}_{.kl\alpha} A^{\alpha}_{.h} + R_{hkl}{}^{\alpha}_{.} A^{i}_{.\alpha},$$
$$A^{i}_{.hlk} - A^{i}_{.lhk} = R^{i}_{.hl\alpha k} A^{\alpha} + R^{i}_{.hl\alpha} A^{\alpha}_{.k},$$
$$A^{i}_{.lhk} - A^{i}_{.lkh} = R^{i}_{.hk\alpha} A^{\alpha}_{.l} + R_{lhk}{}^{\alpha}_{.} A^{i}_{.\alpha},$$
$$A^{i}_{.lkh} - A^{i}_{.klh} = R^{i}_{.lk\alpha h} A^{\alpha} + R^{i}_{.lk\alpha} A^{\alpha}_{.h},$$
$$A^{i}_{.klh} - A^{i}_{.khl} = R^{i}_{.lh\alpha} A^{\alpha}_{.k} + R^{klh}{}_{\alpha} A^{i}_{.\alpha},$$
$$A^{i}_{.khl} - A^{i}_{.hkl} = R^{i}_{.kh\alpha l} A^{\alpha} + R^{i}_{.kh\alpha} A^{\alpha}_{.l}.$$

Ajoutons ces équations membre à membre, la somme des premiers membres est nulle, nous aurons donc une identité contenant les dérivées covariantes du tenseur de Riemann-Christoffel. Comme

$$R^{i}_{.kl\alpha} = - R^{i}_{.lk\alpha},$$

la somme des seconds membres se réduit à six termes :

$$[R_{ihl}{}^{\alpha}_{.k} + R_{ilk}{}^{\alpha}_{.h} + R_{ikh}{}^{\alpha}_{.l}] A_{\alpha} + [R_{lhk}{}^{\alpha}_{.} + R_{hkl}{}^{\alpha}_{.} + R_{klh}{}^{\alpha}_{.}] A_{i\alpha} = 0.$$

Il faut introduire le tenseur contracté $R_{ih\alpha}{}^{\alpha}_{.}$ et sa dérivée covariante ; dans l'identité précédente, le quatrième indice est déjà muet par exemple dans le troisième terme $R_{ikh}{}^{\alpha}{}_{l} A_{\alpha}$, pour obtenir $R_{ik\alpha}{}^{\alpha}_{.l}$ nous emploierons l'artifice suivant :

Considérons n vecteurs $A_{\alpha}^{(1)}$, $A_{\alpha}^{(2)}$, ..., $A_{\alpha}^{(n)}$ (nous nous plaçons dans le cas général d'une multiplicité à n dimensions), choisissons pour $A_{\alpha}^{(j)}$ le vecteur dont les coordonnées sont :

$$A_{\alpha}^{(j)} = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \neq j,$$
$$A_{j}^{(j)} = 1.$$

Écrivons, pour le vecteur $A_{\alpha}^{(j)}$, l'identité trouvée et faisons dans cette identité $j = h$; le terme $R_{ikh}{}^{\alpha}{}_{l} A_{\alpha}^{(h)}$, par exemple, sera nul lorsque α sera différent de h, et égal à $R_{ikh}{}^{h}_{.l}$ lorsque α sera égal à h, l'identité nouvelle sera donc, en faisant passer l'indice i en haut.

$$R^{i}_{.hl}{}^{h}_{.k} + R^{i}_{.lk}{}^{h}_{.h} + R^{i}_{.kh}{}^{h}_{.l} + [R_{lhk}{}^{\alpha}_{.} + R_{hkl}{}^{\alpha}_{.} + R_{klh}{}^{\alpha}_{.}] A^{.h\,i}_{.\alpha} = 0.$$

Faisons enfin dans cette identité $i = k$. On a

$$R^{k}_{.lk}{}^{h}_{.h} = - R^{h}_{.lk}{}^{k}_{.h} = - R^{h}_{lh}.$$
$$R^{k}_{.hl}{}^{h}_{.k} = - R^{k}_{.lh}{}^{h}_{.k} = - R^{k}_{lk},$$
$$R^{k}_{.kh}{}^{h}_{.l} = R_{l}.$$

Les trois premiers termes ont donc pour somme

$$R_l - 2R^k_{lk}.$$

Il est facile de voir que la somme des trois derniers est nulle, cette somme s'écrit

$$[R_{lhi\alpha} + R_{hil\alpha} + R_{ilh\alpha}]\,A^{(h)i\alpha}_{\;\cdot\cdot}.$$

Mais

$$A^{(h)}{}_{i\alpha} = -\left\{ {i\alpha \atop h} \right\} = A^{(h)}{}_{\alpha i},$$

ou

$$A^{(h)i\alpha} = A^{(h)\alpha i}, \qquad R_{lhi\alpha} = - R_{lih\alpha};$$

la somme considérée s'écrit donc

$$\frac{1}{2} A^{(h)i\alpha}[R_{hil\alpha} + R_{h\alpha li} - R_{lih\alpha} - R_{l\alpha hi} + R_{ilh\alpha} + R_{\alpha lhi}],$$

elle est nulle, en vertu des identités

$$R_{hil\alpha} = R_{l\alpha hi}, \qquad R_{h\alpha li} = R_{lih\alpha}, \qquad R_{ilh\alpha} = R_{\alpha lhi};$$

donc

$$R^i_{li} - \frac{1}{2} R_l = 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

II. Si, en chaque point de l'univers, la loi d'Einstein

$$R^i_k - \frac{1}{2} g^i_k R = -8\pi T^i_k$$

est vérifiée, nous déduisons de l'identité précédente que

$$T^{ik}_{\;\cdot\cdot k} = 0.$$

Rappelons que

$$T^{ik} = \mu_0 a^i a^k,$$

a^i désignant la vitesse d'univers $\frac{dx^i}{ds}$ de la matière, rappelons également que l'équation des lignes géodésiques est

$$a^k a^i_k = 0.$$

Écrivons que $T^{ik}_{\;\cdot\cdot k} = 0$:

$$\frac{\partial \mu_0}{\partial x^k} a^i a^k + \mu_0 a^i_k a^k + a^i a^k_k = 0.$$

Posons

$$A = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial \mu_0}{\partial x^k} a^k + a^k_k = \frac{1}{\mu_0} \frac{d\mu_0}{ds} + a^k_k,$$

l'équation obtenue est

$$a^i_k a^k + a^i A = 0$$

Mais nous avons

$$a^i = \frac{dx^i}{ds},$$

donc

$$g_{ik} a^i a^k = 1;$$

dérivons cette identité par rapport à s :

$$g_{ik}(a^i_s a^k + a^i a^k_s) = 0,$$

multiplions-la par a^s et remplaçons $a^s a^i_s$, $a^s a^k_s$ respectivement par $-Aa^i$ et $-Aa^k$, il vient

$$g_{ik} a^i a^k A = 0$$

ou

$$A = 0;$$

donc

$$a^i_k a^k = 0.$$

La matière décrit les géodésiques de l'univers.

L'équation $A = 0$ s'écrit

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{d\mu_0}{ds} + a^k_k = 0,$$

elle a la même forme que l'équation de continuité en Hydrodynamique. Nous allons donner son interprétation physique :

De l'ensemble des particules matérielles, isolons, par la pensée, un ensemble infiniment petit E.

La quantité a^k_k est un invariant; pour trouver sa signification physique, considérons un événement ε qui coïncide à un instant donné avec l'ensemble infiniment petit considéré E, prenons dans l'espace euclidien tangent à l'univers d'Einstein en ε des axes cartésiens *entraînés avec la vitesse de* E en ε; en d'autres termes, rapportons E à un système d'observateurs en repos par rapport à E et pour lesquels l'univers est euclidien dans le voisinage de E; soient x, y, z, t les coordonnées d'un point voisin de (ε) rapportés à ces axes cartésiens; soient $u = \frac{dx}{dt}$, $v = \frac{dy}{dt}$, $w = \frac{dz}{dt}$ les composantes de la vitesse d'un point de E, $U = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$ la grandeur de cette vitesse, U est nul en ε et infiniment petit pour E. On a ici

$$ds^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

$$a^1 = \frac{dx}{ds}, \qquad a^2 = \frac{dy}{ds}, \qquad a^3 = \frac{dz}{ds}, \qquad a^4 = \frac{dt}{ds}$$

ou

$$a^1 = \frac{u}{\sqrt{1-U^2}}, \qquad a^2 = \frac{v}{\sqrt{1-U^2}}, \qquad a^3 = \frac{w}{\sqrt{1-U^2}}, \qquad a^4 = \frac{t}{\sqrt{1-U^2}};$$

donc

$$a_k^k = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{dt}{ds} + \frac{2U}{\sqrt{1-U^2}}\left[u\left(u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} + w\frac{\partial w}{\partial x}\right) + \ldots\right].$$

Or, si l'on désigne par V le *volume de* E *mesuré par des observateurs en repos par rapport à* E, on a, d'après la formule classique de l'Hydrodynamique,

$$\frac{1}{V}\frac{dV}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}.$$

Cette formule est valable dans le cas où nous nous trouvons puisque u, v, w sont infiniment petits et qu'aux petites vitesses la cinématique de Minkowski se confond avec l'ancienne cinématique; comme, d'autre part, U est infiniment petit et que

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\frac{dt}{ds}$$

est fini, on a

$$a_k^k = \frac{1}{V}\frac{dV}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{1}{V}\frac{dV}{ds} = \frac{d\log V}{ds},$$

et la formule $a_k^k + \dfrac{d\log\mu_0}{ds} = 0$ s'écrit

$$\frac{d}{ds}\log\mu_0 V = 0 \qquad \text{ou} \qquad \mu_0 V = \text{const.},$$

μ_0 et V étant respectivement la densité et le volume de l'ensemble E mesurés par des observateurs entraînés avec E, $\mu_0 V$ est la masse au repos de E; donc :

La masse au repos d'un ensemble infiniment petit de particules matérielles est constante.

Il faut considérer un ensemble infiniment petit de particules, car pour un ensemble fini de particules matérielles, l'observateur fixe par rapport à cet ensemble ne peut plus être défini; cependant on peut désigner par masse au repos d'un tel ensemble la somme des masses au repos des éléments infiniment petits qui le composent

et l'on voit que la masse au repos d'un ensemble quelconque de particules matérielles est constante.

La masse n'étant qu'une forme de l'énergie, le principe exprimé par l'équation

$$\frac{1}{\mu_0}\frac{d\mu_0}{ds} + a_k^k = 0$$

est à la fois le principe de conservation de la matière et le principe de la conservation de l'énergie.

LES CHAINES ARTICULÉES FERMÉES ET DÉFORMABLES A QUATRE MEMBRES [1];

Par M. Et. DELASSUS.

I.

1. Considérons une chaîne articulée ouverte $S_0, S_1, \ldots, S_{n+1}$, à $n+1$ membres et n articulations simples qui seront des vis ou, comme cas particuliers; des rotoïdes ou des glissières rectilignes.

Le jeu de chacune des articulations se traduit par un paramètre ε et, S_0 étant fixé, la position de S_n dépend de $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$.

Supposons que la chaîne soit à réduction, c'est-à-dire que le solide S_n ne dépende, en réalité, que de moins de n paramètres; si nous fixons S_n dans une quelconque des positions qu'il peut prendre par déformation de la chaîne ouverte, nous écrivons entre les ε autant de relations qu'il y a de paramètres dont dépend S_n, donc moins de n relations forcément compatibles, de sorte que les ε ne sont pas déterminés et la chaîne peut se déformer tout en laissant S_n immobilisé, c'est-à-dire soudé à S_0.

On a ainsi une chaîne fermée déformable $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$, qui, ouverte sur S_0, donne une chaîne à réduction. Nous dirons que cette fermeture sur S_0 est une *fermeture ordinaire*.

Supposons que la chaîne ouverte ne soit pas à réduction. En

---

[1] Pour les définitions, notations et résultats relatifs aux chaînes ouvertes, se reporter aux deux Mémoires suivants : Ét. Delassus, *Sur les systèmes articulés gauches*, 1re Partie (*Annales de l'École Normale*, 1900); 2e Partie (*Ibid.*, 1902), auxquels le Mémoire actuel fait suite.

fixant S_n dans une quelconque de ses positions on établira ainsi n relations entre les ε, relations qui seront certainement compatibles mais qui, en général, seront distinctes; elles obligeront les ε à rester sur les valeurs qui ont fourni la position choisie de S_n, la chaîne fermée obtenue sera indéformable. Mais il peut arriver que, parmi les positions que peut prendre S_n par déformation de la chaîne ouverte, il existe des positions singulières pour lesquelles ces n équations cessent d'être distinctes et se réduisent à $n-1$. En fixant S_n dans une telle position on aura une chaîne fermée déformable; nous dirons que nous avons là une *fermeture singulière*.

Prenons un quadrilatère articulé plan, c'est-à-dire la chaîne fermée à quatre rotoïdes parallèles; quel que soit le membre sur lequel on l'ouvre on a une chaîne à réduction, de sorte que la chaîne fermée n'a que des fermetures ordinaires.

Prenons une chaîne fermée à six membres avec trois rotoïdes consécutifs parallèles et les trois suivants également parallèles entre eux.

Soient R_1, R_2, ..., R_6 ces rotoïdes. Ouvrons la chaîne entre R_3 et R_4 nous obtiendrons une chaîne ouverte à réduction, de sorte qu'il y avait là fermeture ordinaire. Ouvrons la chaîne entre R_1 et R_2, nous obtiendrons une chaîne sans réduction, donc une fermeture singulière, puisque la chaîne fermée est déformable comme conséquence de la fermeture ordinaire indiquée en premier lieu.

Toute chaîne possédant une fermeture ordinaire peut être obtenue par chaîne ouverte à réduction et, comme nous connaissons toutes ces chaînes ouvertes, nous devons considérer comme connues toutes les chaînes fermées déformables ayant au moins une fermeture ordinaire; le seul problème qui reste à traiter dans cet ordre d'idées est la recherche générale des *chaînes fermées singulières*, c'est-à-dire des chaînes fermées déformables dont toutes les fermetures sont singulières.

2. Une chaîne à quatre membres et quatre glissières rectilignes a toutes ses fermetures ordinaires, donc est à rejeter.

Considérons l'image sphérique σ_1, σ_2, σ_3, σ_4 d'une chaîne fermée S_1, S_2, S_3, S_4 à quatre membres. Si une articulation S_1. S_2 est une glissière rectiligne, les deux corps σ_1, σ_2 sont soudés l'un

à l'autre. Si donc la chaîne S avait trois glissières rectilignes, les quatre membres de la chaîne sphérique seraient soudés et la quatrième articulation ne jouerait pas, de sorte que S ne serait pas effectivement une chaîne à quatre membres.

Si S n'a que deux glissières, l'image sphérique est à deux membres et deux rotoïdes qui ne peuvent jouer que s'ils sont confondus, de sorte que S a deux vis parallèles, ce qui donne deux genres suivant qu'elles sont consécutives ou qu'elles alternent avec les glissières.

Si S n'a qu'une glissière, l'image sphérique est un trièdre, donc indéformable, à moins que deux des rotoïdes soient confondus, mais alors le troisième ne jouerait pas, ou encore, à moins que les trois rotoïdes soient confondus, ce qui conduit la chaîne à trois vis parallèles.

Si S n'a pas de glissières, l'image sphérique peut être à quatre rotoïdes distincts, elle est bien déformable; si deux de ses rotoïdes sont confondus, les deux autres ne peuvent jouer, à moins d'être également confondus; si trois des rotoïdes étaient confondus, le quatrième ne pourrait jouer, à moins que d'être confondu avec eux, de sorte que la chaîne S est à quatre vis sans parallélisme ou bien à deux groupes de vis consécutives parallèles, ou bien encore à quatre vis parallèles.

La considération de l'image sphérique de la chaîne nous ramène donc à six genres assez généraux de chaînes fermées déformables. C'est parmi ces chaînes que nous devrons rechercher les chaînes singulières et, pour cela, il va nous falloir faire une étude séparée de chacun des six genres.

II.

CHAINES A QUATRE VIS PARALLÈLES.

3. Sur un plan perpendiculaire à la direction des quatre vis nous pouvons former une image plane qui sera un quadrilatère articulé plan.

Sur chaque diagonale marquons l'extrémité telle que la somme des côtés qui y aboutissent soit inférieure à la somme analogue pour l'autre extrémité; les deux sommets ainsi obtenus sont consécutifs et limiteront, pour le quadrilatère, un côté que nous appellerons b; de sorte que nous aurons entre les quatre côtés les

inégalités

$$b + a \leqq c + d,$$
$$b + c \leqq a + d$$

et la certitude que, dans la déformation continue, il arrivera forcément un moment où b et a seront en prolongement et un autre moment où b et c seront en prolongement. Ces deux formes particulières seront, pour abréger, désignées par (ba) et (bc).

Prenons les notations classiques de l'étude du quadrilatère articulé, nous aurons

$$(1) \qquad \begin{cases} a\cos\alpha + b\cos\beta + c\cos\gamma = d, \\ a\sin\alpha + b\sin\beta + c\sin\gamma = 0 \end{cases}$$

et, pour que la chaîne de l'espace soit déformable, il faut que la variation d'altitude produite par le jeu des quatre vis soit nulle, ce qui donne une condition

$$h_1\alpha + h_2(\beta - \alpha) + h_3(\gamma - \beta) - h_4\gamma = \text{const.}$$

de la forme

$$(2) \qquad \lambda\alpha + \mu\beta + \nu\gamma = \text{const.}$$

avec

$$\lambda = h_1 - h_2, \qquad \mu = h_2 - h_3, \qquad \nu = h_3 - h_4.$$

Nous écarterons de suite la solution fournie par λ, μ, ν nuls, c'est-à-dire le cas de

$$h_1 = h_2 = h_3 = h_4;$$

car, en ouvrant la chaîne sur le quatrième corps et désignant par δ son angle d'orientation, son altitude serait

$$h\alpha + h(\beta - \alpha) + h(\gamma - \beta) + h(\delta - \gamma),$$

c'est-à-dire

$$h\delta,$$

elle serait donc fonction uniquement de son orientation et le dernier corps ne dépendrait que de trois paramètres. La chaîne serait ordinaire.

Si des équations (1) différentiées nous tirons $d\alpha$, $d\beta$, $d\gamma$ et portons dans (2) également différentiée, nous trouvons

$$(3) \qquad \frac{\lambda}{a}\sin(\beta - \gamma) + \frac{\mu}{b}\sin(\gamma - \alpha) + \frac{\nu}{c}\sin(\alpha - \beta) = 0.$$

Plaçons-nous dans la position (ba) en supposant

$$b + a \neq c + d$$

on aura

$$\alpha = \beta, \qquad \sin(\gamma - \beta) = 0,$$

donc l'équation (3) exigera

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{\mu}{b}.$$

De même, la considération de la position (bc) montrerait que, si l'on a

$$b + c = a + d,$$

il faut

$$\frac{\mu}{b} = \frac{\nu}{c}.$$

Nous avons ainsi trois hypothèses à examiner :

4. Première hypothèse :

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{\mu}{b} = \frac{\nu}{c}.$$

Comme λ, μ, ν ne peuvent être nuls, l'égalité (3) se réduit et se met sous la forme

$$\sin\frac{\alpha - \beta}{2} \sin\frac{\beta - \gamma}{2} \sin\frac{\gamma - \alpha}{2} = 0,$$

et comme un quelconque des facteurs étant nul indiquerait un angle du quadrilatère qui resterait constant, l'hypothèse considérée est à rejeter.

5. Deuxième hypothèse :

$$\frac{\lambda}{a} = \frac{\mu}{b}, \qquad b + c = a + d.$$

En supprimant le facteur $\sin\frac{\alpha - \beta}{2}$ qui ne peut être nul constamment, l'équation (3) se réduit à

$$\frac{\lambda}{a} \cos\left(\gamma - \frac{\alpha + \beta}{2}\right) - \frac{\nu}{c} \cos\frac{\alpha - \beta}{2} = 0.$$

Si l'on y remplace $\cos\gamma$ et $\sin\gamma$ par leurs valeurs tirées de (1) elle devient

$$\frac{\lambda d}{ac} \cos\frac{\alpha + \beta}{2} - K \cos\frac{\alpha - \beta}{2} = 0,$$

K étant une certaine constante.

D'autre part, l'élimination de γ entre les deux équations fonda-

mentales (1), en tenant compte de la condition

$$c = a + d - b,$$

donne

$$ab - d(a - b) - ad\cos\alpha - bd\cos\beta + ab\cos(\alpha - \beta) = 0.$$

Si l'on pose

$$u = \frac{\alpha + \beta}{2}, \qquad v = \frac{\alpha - \beta}{2},$$

ces deux équations et l'équation (2) deviennent

$$\cos u = \rho\cos v, \qquad \rho = \frac{acK}{\lambda d},$$

$$(a + b)\cos u\cos v - (a - b)\sin u\sin v - \frac{2ab}{d}\cos^2 v + a - b = 0,$$

$$(\lambda + \mu)u + (\lambda - \mu)v + \nu\gamma = \text{const.}$$

Il est facile d'éliminer u entre les deux premières et d'écrire que l'équation en $\cos v$ obtenue est une identité. On trouve ainsi

$$a = b, \qquad \rho = \frac{a}{d}$$

et il en résulte immédiatement

$$c = d,$$

de sorte que le quadrilatère plan articulé est un rhomboïde.

D'ailleurs, en introduisant ces hypothèses dans les équations (1), celles-ci s'expriment immédiatement en u, v et γ et, par élimination immédiate de v, donnent

$$\operatorname{tang} u = -\cot\frac{\gamma}{2},$$

d'où

$$u - \frac{\gamma}{2} = \text{const.} = \frac{\pi}{2}.$$

C'est la relation linéaire existant entre u, v et γ; elle montre que

$$\lambda - \mu = 0, \qquad \lambda + \mu = -2\nu,$$

c'est-à-dire

$$\lambda = \mu = -\nu,$$

ou encore

$$h_2 = h_4 = \frac{h_1 + h_3}{2}.$$

Nous arrivons ainsi à une chaîne fermée déformable qui est certainement singulière, car si, l'ouvrant sur un quelconque de ses membres, puis la refermant sur une quelconque de ses posi-

tions de chaîne ouverte, la disposition en rhomboïde ne sera plus conservée et la chaîne sera indéformable.

Nous obtenons donc *la chaîne formée par quatre vis parallèles disposées en rhomboïde, les pas des deux vis aux extrémités de la diagonale-axe étant égaux avec, pour valeur commune, la moyenne arithmétique des pas des deux autres vis.*

6. Troisième hypothèse :

$$\begin{matrix} b+a=c+d \\ b+c=a+d \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} a=c, \\ b=d. \end{matrix}$$

En posant

$$u=\frac{\alpha+\gamma}{2}, \qquad v=\frac{\alpha-\gamma}{2}, \qquad w=\frac{\beta}{2}$$

les équations (1) et (2) deviennent

$$a \cos u \cos v = \quad b \sin^2 w,$$
$$a \sin u \cos v = - b \sin w \cos w,$$
$$(\lambda+\mu) u+(\lambda-\nu) v+2 \mu w=\text{const.}$$

Les deux premières sont vérifiées en prenant

$$\begin{matrix} \cos v=0 \\ \sin w=0 \end{matrix} \quad \text{ou} \quad \begin{matrix} v=\text{const.}=\frac{\pi}{2}, \\ w=\text{const.}=0 \end{matrix}$$

et la troisième devant en être une conséquence, il faudra

$$\lambda+\nu=0,$$

c'est-à-dire

$$h_1+h_3=h_2+h_4.$$

Nous obtenons ainsi la *chaîne aux quatre vis parallèles en parallélogramme, la moyenne des pas aux deux bouts d'une diagonale étant la même que pour l'autre diagonale.*

Si les deux premières équations ne sont pas vérifiées comme il vient d'être indiqué, elles donnent

$$\tang u=-\cot w, \qquad u-w=\text{const.}=\frac{\pi}{2}$$

et alors il reste

$$a \cos v+b \sin w=0.$$

De la relation linéaire unique trouvée entre uvw résulte

$$\lambda - \nu = 0, \qquad \lambda + \nu = -2\mu,$$

c'est-à-dire

$$h_1 = h_3, \qquad h_2 = h_4.$$

Nous obtenons ainsi la *chaîne à quatre vis parallèles en contre-parallélogramme avec égalité des pas des vis dans une même diagonale*, chaîne qui est sûrement singulière, car si on l'ouvre, la disposition en contre-parallélogramme n'est pas conservée.

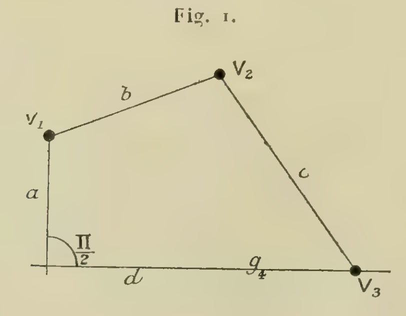
Il est curieux de faire observer que, sauf le cas banal de la chaîne ordinaire à quatre vis parallèles et de pas égaux, la condition imposée aux pas pour la déformabilité sous forme parallélogramme est incompatible avec celle qui est imposée pour la déformabilité sous forme de contre-parallélogramme, de sorte que si l'on a la forme parallélogramme, le système ne pourra jamais prendre la forme contre-parallélogramme et inversement.

III.

CHAINES A TROIS VIS PARALLÈLES ET UNE GLISSIÈRE.

7. Formons encore l'image plane perpendiculaire à la direction des trois vis. Si la glissière est parallèle aux vis, deux des quatre membres de cette image plane seront soudés et elle se réduira à un triangle articulé, donc indéformable. Nous sommes amenés forcément à

Fig. 1.



supposer que la glissière forme un angle θ non nul avec les vis; l'image plane sera formée de quatre plaques ABCD réunies par des charnières, sauf A et D, qui sont réunies par une glissière.

Cette image plane est un quadrilatère variable dans lequel trois côtés a, b, c sont constants ainsi que l'angle α, qu'on peut supposer égal à $\frac{\pi}{2}$; quant au quatrième côté d, il est variable et c'est lui qui mesure, à une constante près, le glissement horizontal.

Les formules fondamentales de déformation du quadrilatère seront ici

$$b\cos\beta + c\cos\gamma = d,$$
$$a + b\sin\beta + c\sin\gamma = 0$$

avec l'équation d'altitude

$$h_1\beta + h_2(\gamma - \beta) - h_3\gamma + 2\pi d\cot\theta = \text{const.}$$

Éliminons d et écrivons qu'il existe des valeurs non nulles de $d\beta$ et $d\gamma$ vérifiant les deux équations différentiées; en posant

$$\sin\beta = x, \qquad \sin\gamma = y, \qquad \frac{h_1 - h_2}{2\pi b}\cot\theta = \lambda, \qquad \frac{h_2 - h_3}{2\pi c}\cot\theta = \mu,$$

on obtiendra

$$(1 - x^2)(\mu - y)^2 = (1 - y^2)(\lambda - x)^2,$$

qui devra être vérifiée comme conséquence de

$$a + bx + cy = 0.$$

Or, la courbe n'a de points réels que dans la région

$$(1 - x^2)(1 - y^2) > 0$$

et les seules droites entièrement comprises dans cette région sont

$$x + y = 0,$$
$$x - y = 0,$$

il faut donc avoir

$$a = 0, \qquad b = \pm c, \qquad \mu \mp \lambda = 0;$$

la relation entre β et γ devient, dans ces conditions,

$$\sin\beta \pm \sin\gamma = 0$$

ou

$$\sin\frac{\beta \pm \gamma}{2}\cos\frac{\beta \mp \gamma}{2} = 0,$$

de sorte que l'un des deux angles $\beta - \gamma$ ou $\beta + \gamma$ serait constant, ce qui indiquerait que l'articulation V_2 ou l'articulation V_3 ne jouerait pas dans la déformation.

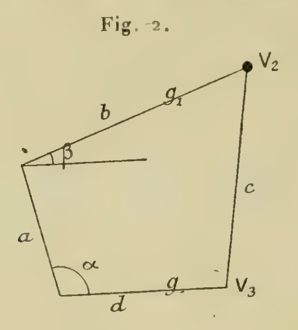
Il n'existe donc pas de chaînes singulières déformables à trois vis parallèles et une glissière.

IV.

CHAINES A DEUX VIS PARALLÈLES ET DEUX GLISSIÈRES.

8. Considérons d'abord le cas où les deux vis sont consécutives et formons encore l'image plane; on aura la figure ci-dessous dans laquelle les côtés c et a seront des constantes ainsi que les angles

Fig. 2.



α et β, tandis que les côtés b et d seront variables et, à des constantes près, indiqueront les glissements horizontaux. Les variables γ, b, d seront liées par les formules du quadrilatère

$$a \cos\alpha + b \cos\beta + c \cos\gamma = d,$$
$$a \sin\alpha + b \sin\beta + c \sin\gamma = 0$$

et l'on aura l'équation d'altitude

$$b \cot\theta_1 + d \cot\theta_4 + \frac{h_2 - h_3}{2\pi}\gamma = \text{const.}$$

Tirant b et d des deux premières, la troisième devient de la forme

$$A \cos\gamma + B \sin\gamma + \frac{h_2 - h_3}{2\pi}\gamma = \text{const.}$$

et, devant être une identité en γ, exige

$$A = B = h_2 - h_3 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\cot\theta_1 = \cot\theta_4 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \theta_1 = \theta_4 = \frac{\pi}{2}.$$

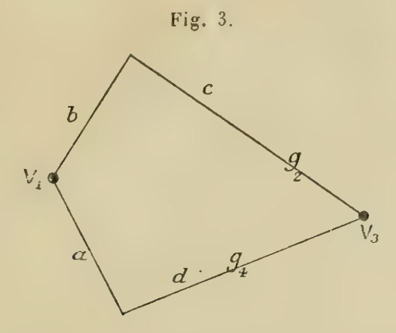
En définitive, les deux pas doivent être égaux et les deux glissières perpendiculaires aux deux vis.

Si nous ouvrons la chaîne n'importe où et si nous la fermons dans une position quelconque, les conditions précédentes conti-

nueront à être réalisées, donc on a une fermeture ordinaire et nous en concluons qu'il n'existe pas de chaîne singulière de l'espèce considérée.

9. Examinons maintenant le cas de l'alternance des vis et glissières.

Fig. 3.



L'image plane est un quadrilatère dans lequel a, b, α et $\gamma - \beta$ sont des constantes ; les variables sont c, d, qui indiquent les translations horizontales, et l'angle γ dont β se déduit.

Les relations fondamentales du quadrilatère seront ici

$$-b \sin\gamma + c \cos\gamma = d,$$
$$a + b \cos\gamma + c \sin\gamma = 0$$

et l'équation d'altitude

$$\frac{h_1 \beta - h_3 \gamma}{2\pi} + c \cot\theta_2 + d \cot\theta_4 = \text{const.}$$

Remplaçons β, c, d par leurs valeurs en γ, il viendra

$$\frac{h_1 - h_3}{2\pi}\gamma - \frac{a + b\cos\gamma}{\sin\gamma}\cot\theta_2 - \frac{b + a\cos\gamma}{\sin\gamma}\cot\theta_4 = \text{const.},$$

qui doit être vérifiée quel que soit γ. En remplaçant γ par $\gamma + 2\pi$ on voit qu'on doit avoir

$$h_1 = h_3$$

et elle se réduit à

$$(a + b\cos\gamma)\cot\theta_2 + (b + a\cos\gamma)\cot\theta_4 = \mathrm{K}\sin\gamma,$$

qui exige

$$b\cot\theta_2 + a\cot\theta_4 = 0,$$
$$a\cot\theta_2 + b\cot\theta_4 = 0;$$

donc, si a et b sont inégaux,

$$\cot\theta_2 = \cot\theta_4 = 0, \qquad \theta_2 = \theta_4 = \frac{\pi}{2}.$$

Les conditions trouvées se conservent dans la déformation de la chaîne ouverte sur n'importe quel membre, de sorte que la chaîne obtenue est ordinaire.

Supposons donc

$$a = b,$$

il restera l'unique condition

$$\cot\theta_2 + \cot\theta_4 = 0, \qquad \theta_2 = \pi - \theta_4.$$

Le quadrilatère a ainsi la forme rhomboïde birectangle, et les deux glissières prises dans les sens qui se projettent suivant le sens de parcours du contour du quadrilatère doivent faire des angles supplémentaires avec la direction des vis.

En définitive, nous obtenons *la chaîne dont les pas des deux vis parallèles sont égaux, les directions des deux glissières étant symétriques par rapport au plan des deux vis* et cette chaîne est bien singulière, car la disposition qui permet la déformabilité est détruite par l'ouverture sur un quelconque des membres.

V.

CHAINES A DEUX GROUPES DE VIS PARALLÈLES.

10. Les deux groupes étant V_1V_2, V_3V_4, nous fixerons le corps V_1V_4, de sorte qu'en considérant les coordonnées X, Y, Z, L, M, N des axes D des vis, les coordonnées de D_1 et D_4 seront des constantes satisfaisant, d'ailleurs, aux conditions

$$L_1X_1 + M_1Y_1 + N_1Z_1 = 0,$$
$$L_4X_4 + M_4Y_4 + N_4Z_4 = 0.$$

Les coordonnées des droites variables D_2D_3 seront X_1, Y_1, Z_1, L_2, M_2, N_2, X_4 ; Y_4, Z_4, L_3, M_3, N_3 satisfaisant d'abord aux conditions

$$(4)\qquad \begin{cases} L_2X_1 + M_2Y_1 + N_2Z_1 = 0, \\ L_3X_4 + M_3Y_4 + N_3Z_4 = 0. \end{cases}$$

Les deux directions D_1, D_4 étant fixes, pour exprimer que la distance des deux parallèles D_1, D_2 a une valeur donnée, il suffit d'écrire que la différence géométrique des moments à l'origine a

une valeur donnée ; il en est de même pour D_4, D_3, d'où

$$(5)\quad \begin{cases} (L_2 - L_1)^2 + (M_2 - M_1)^2 + (N_2 - N_1)^2 = \text{const.}, \\ (L_3 - L_4)^2 + (M_3 - M_4)^2 + (N_3 - N_4)^2 = \text{const.} \end{cases}$$

Les deux droites D_2, D_3 ayant leurs directions fixes on exprimera que leur plus courte distance a une valeur donnée en écrivant que le moment relatif de ces deux droites est donné :

$$(6)\quad L_2 X_4 + M_2 Y_4 + N_2 Z_4 + L_3 X_1 + M_3 Y_1 + N_3 Z_1 = \text{const.}$$

Enfin, pour la déformabilité, en appelant h_1, h_2, h_3, h_4 les pas des vis, on doit pouvoir imaginer sur D_1, D_2, D_3, D_4 des déplacements hélicoïdaux infiniment petits de pas respectifs h_1, h_2, h_3, h_4 se composant en un déplacement nul, d'où les six conditions

$$\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_1 + \lambda_3 X_4 + \lambda_4 X_4 = 0,$$
$$\lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_1 + \lambda_3 Y_4 + \lambda_4 Y_4 = 0,$$
$$\lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_1 + \lambda_3 Z_4 + \lambda_4 Z_4 = 0,$$
$$\lambda_1(L_1 + h_1 X_1) + \lambda_2(L_2 + h_2 X_1) + \lambda_3(L_3 + h_3 X_4) + \lambda_4(L_4 + h_4 X_4) = 0,$$
$$\lambda_1(M_1 + h_1 Y_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$
$$\lambda_1(N_1 + h_1 Z_1) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0.$$

Les trois premières donnent immédiatement

$$\lambda_2 = -\lambda_1, \qquad \lambda_3 = -\lambda_4$$

et l'élimination immédiate de λ_1, λ_4 dans les trois dernières donne

$$(7)\quad \frac{L_4 - L_3 + (h_4 - h_3)X_4}{L_1 - L_2 + (h_1 - h_2)X_1} = \frac{M_4 - M_3 + (h_4 - h_3)Y_4}{M_1 - M_2 + (h_1 - h_2)Y_1} = \frac{N_4 - N_3 + (h_4 - h_3)Z_4}{N_1 - N_2 + (h_1 - h_2)Z_1}.$$

Les six quantités L_2, M_2, N_2, L_3, M_3, N_3, s'il y a déformabilité de la chaîne, ne peuvent être toutes des constantes et elles doivent vérifier les sept équations (4), (5), (6), (7). *A priori*, il semble se manifester là une impossibilité, car ces sept équations à six inconnues doivent les fixer sur des valeurs constantes. Mais il est nécessaire d'étudier de plus près ces équations pour voir si elles sont bien distinctes, sans quoi la conclusion serait fausse.

Pour cela posons

$$L_4 - L_3 = p_3, \qquad M_4 - M_3 = q_3, \qquad N_4 - N_3 = r_3,$$
$$L_1 - L_2 = p_2, \qquad M_1 - M_2 = q_2, \qquad N_1 - N_2 = r_2,$$
$$h_4 - h_3 = H_3, \qquad h_1 - h_2 = H_2,$$

puis

$$(8)\quad \begin{cases} p_2 X_4 + q_2 Y_4 + r_2 Z_4 = u, \\ p_3 X_1 + q_3 Y_1 + r_3 Z_1 = v. \end{cases}$$

Les équations (4), (5), (6) deviennent

$$(9)\quad \begin{cases} p_2 X_1 + q_2 Y_1 + r_2 Z_1 = 0, \\ p_3 X_4 + q_3 Y_4 + r_3 Z_4 = 0; \end{cases}$$

$$(10)\quad \begin{cases} p_2^2 + q_2^2 + r_2^2 = \text{const.}, \\ p_3^2 + q_3^2 + r_3^2 = \text{const.}; \end{cases}$$

$$(11)\quad u + v = \text{const.}$$

Quant aux deux équations (7), nous n'en garderons qu'une combinaison facile qui, en vertu de (9), s'écrit

$$(12)\quad \frac{v + H_3 \cos\omega}{H_2} = \frac{H_3}{u + H_2 \cos\omega},$$

ω étant l'angle constant des deux directions fixes D_1 et D_4. Quelles que soient les valeurs des constantes H_2, H_3, ω, les deux équations (11) et (12) sont distinctes et obligent u et v à être des constantes.

Les premières équations des groupes (8), (9), (10), interprétées géométriquement, montrent que p_2, q_2, r_2 sont alors les constantes et il en est de même de p_3, q_3, r_3; donc finalement aussi, de L_2, M_2, N_2, L_3, M_3, N_3.

L'impossibilité est donc démontrée rigoureusement :

Il n'existe aucune chaîne singulière à deux groupes de vis parallèles.

VI.

CHAINES A QUATRE VIS NON PARALLÈLES.

11. Fixons le membre $V_1 V_2$ de la chaîne, ce qui fixe en même temps le membre correspondant de l'image sphérique. Celle-ci est un quadrilatère sphérique; c'est un système déformable dont la forme est complètement définie par l'angle ω_1 relatif à l'articulation V_1. Les cosinus directeurs V_1, V_2 étant fixes, la déformation du quadrilatère sphérique nous fait connaître ceux, X_3, Y_3, Z_3, X_4, Y_4, Z_4 des directions D_3, D_4 et nous montre que ce sont des fonctions algébriques de $\cos\omega_1$.

En exprimant ainsi la déformation de l'image sphérique, nous avons exprimé la constance de l'angle de deux droites D consécu-

tives et pour exprimer la constance de leur plus courte distance, il suffit d'écrire la constance de leur moment relatif. Entre les six coordonnées L_3, M_3, N_3, L_4, M_4, N_4, qui satisfont d'abord à

$$(13) \qquad \begin{cases} L_3 X_3 + M_3 Y_3 + N_3 Z_3 = 0, \\ L_4 X_4 + M_4 Y_4 + N_4 Z_4 = 0. \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi les trois relations

$$(14) \qquad \begin{cases} L_3 X_2 + M_3 Y_2 + N_3 Z_2 + L_2 X_3 + M_2 Y_3 + N_2 Z_3 = \text{const.}, \\ L_4 X_3 + M_4 Y_3 + N_4 Z_3 + L_3 X_4 + M_3 Y_4 + N_3 Z_4 = \text{const.}, \\ L_1 X_4 + M_1 Y_4 + N_1 Z_4 + L_4 X_1 + M_4 Y_1 + N_4 Z_1 = \text{const.} \end{cases}$$

Enfin la déformabilité exige que les quatre droites D puissent porter des déplacements hélicoïdaux infiniment petits et de pas respectifs h_1, h_2, h_3, h_4 se composant en un déplacement nul

$$\begin{gathered} \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \lambda_3 X_3 + \lambda_4 X_4 = 0, \\ \lambda_1 Y_1 + \lambda_2 Y_2 + \lambda_3 Y_3 + \lambda_4 Y_4 = 0, \\ \lambda_1 Z_1 + \lambda_2 Z_2 + \lambda_3 Z_3 + \lambda_4 Z_4 = 0, \end{gathered}$$

$$\lambda_1(L_1 + h_1 X_1) + \lambda_2(L_2 + h_2 X_2) + \lambda_3(L_3 + h_3 X_3) + \lambda_4(L_4 + h_4 X_4) = 0,$$
$$\lambda_1(M_1 + h_1 Y_1) + \lambda_2(M_2 + h_2 Y_2) + \lambda_3(M_3 + h_3 Y_3) + \lambda_4(M_4 + h_4 Y_4) = 0,$$
$$\lambda_1(N_1 + h_1 Z_1) + \lambda_2(N_2 + h_2 Z_2) + \lambda_3(N_3 + h_3 Z_3) + \lambda_4(N_4 + h_4 Z_4) = 0.$$

Le non-parallélisme des droites D permet de tirer des trois premières équations des quantités Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 proportionnelles aux λ ; en portant dans les trois dernières on obtient les équations

$$(15) \qquad \begin{cases} \Delta_1(L_1 + h_1 X_1) + \Delta_2(L_2 + h_2 X_2) + \Delta_3(L_3 + h_3 X_3) + \Delta_4(L_4 + h_4 X_4) = 0, \\ \Delta_1(M_1 + h_1 Y_1) + \Delta_2(M_2 + h_2 Y_2) + \Delta_3(M_3 + h_3 Y_3) + \Delta_4(M_4 + h_4 Y_4) = 0, \\ \Delta_1(N_1 + h_1 Z_1) + \Delta_2(N_2 + h_2 Z_2) + \Delta_3(N_3 + h_3 Z_3) + \Delta_4(N_4 + h_4 Z_4) = 0, \end{cases}$$

donc, finalement, un système de huit équations (13), (14), (15) que doivent vérifier pendant la déformation nos six quantités L_3, M_3, N_3, L_4, M_4, N_4 et dans lequel les quantités X_3, Y_3, Z_3, X_4, Y_4, Z_4, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 sont des fonctions algébriques connues de $\cos\omega_1$.

Pour raisonner rigoureusement, nous commençons par tirer des équations (15) les valeurs de L_4, M_4, N_4, ce qui est possible, puisque, par suite du non-parallélisme des directions D, aucun des déterminants Δ n'est identiquement nul :

$$(16) \qquad L_4 = \rho L_3 + \alpha, \qquad M_4 = \rho M_3 + \beta, \qquad N_4 = \rho N_3 + \gamma,$$

ρ, α, β, γ étant des fonctions algébriques connues de $\cos\omega_1$, la

fonction φ étant finie et non identiquement nulle, puisque c'est le quotient de deux déterminants Δ.

Portons ces valeurs de L_4, M_4, N_4 dans les équations (13) et (14), nous obtenons

$$(17)\quad \begin{cases} L_3 X_3 + M_3 Y_3 + N_3 Z_3 = 0, \\ L_3 X_4 + M_3 Y_4 + N_3 Z_4 = B_4, \\ L_3 X_2 + M_3 Y_2 + N_3 Z_2 = B_2, \\ L_3 X_4 + M_3 Y_4 + N_3 Z_4 = B'_4, \\ L_3 X_1 + M_3 Y_1 + N_3 Z_1 = B_1, \end{cases}$$

les B étant des fonctions algébriques de $\cos\omega_1$. S'il y a déformabilité, ces équations sont compatibles. Laissant cette question de côté, considérons, par exemple, la première, la troisième et la cinquième, elles déterminent complètement L_3, M_3, N_3 par suite du non-parallélisme des directions et montrent que ce sont des fonctions algébriques de $\cos\omega_1$; les formules (16) prouvent ensuite qu'il en est de même de L_4, M_4, N_4.

Soit δ_1 la distance des pieds sur D_1 des perpendiculaires communes à $D_1 D_2$ et à $D_1 D_4$; il résulte, de ce qui précède, que ce sera une fonction algébrique de $\cos\omega_1$; mais, d'autre part, cette longueur δ_1, à une constante près, mesure le glissement du corps $V_1 V_4$ sur D_1 pendant la déformation et, puisque V_1 est une vis de pas h_1, elle doit être reliée à ω_1 par l'égalité

$$\delta_1 = \frac{h_1}{2\pi}\,\omega_1 + \text{const.}$$

Si h_1 n'est pas nul, il en résulte que ω_1 est une fonction algébrique de $\cos\omega_1$, conclusion absurde.

L'articulation V_1 doit donc être un rotoïde et, la démonstration s'appliquant à l'une quelconque des articulations, nous arrivons à ce résultat :

Dans la catégorie des chaînes fermées à quatre vis sans parallélisme, il ne peut exister, comme chaînes déformables, que des chaînes à quatre rotoïdes non parallèles.

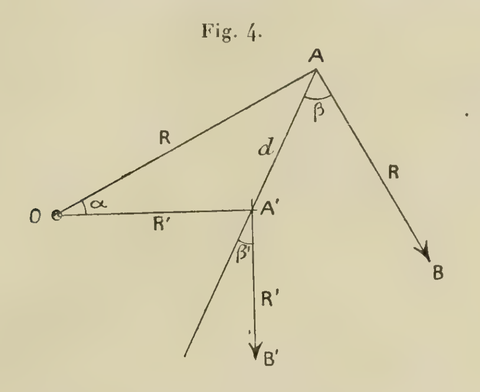
12. Avant de continuer, établissons une proposition relative à deux hyperboloïdes de révolution à une nappe, invariables mais mobiles de façon à avoir constamment une génératrice commune, la distance des pieds sur cette génératrice de ses perpendiculaires communes avec les deux axes de révolution restant constante.

Soient Δ la génératrice commune, R, R′ les rayons des cercles de gorge et θ, θ′ les ouvertures des deux hyperboloïdes.

Les rayons des cercles de gorge aboutissant à Δ sont des perpendiculaires communes avec les deux axes, donc la seconde condition signifie que la distance D des centres a une projection constante sur Δ.

Projetons tout sur un plan perpendiculaire à Δ, soient OA, OA′

Fig. 4.



les projections des deux rayons; les axes se projetteront perpendiculairement à ces deux rayons et si nous marquons sur eux, dans des sens convenables, des vecteurs de grandeurs

$$\rho = \frac{R}{\sin\theta}, \qquad \rho' = \frac{R'}{\sin\theta'},$$

leurs composantes suivant Δ seront constantes, comme celle de D, et leurs composantes sur le plan de projection seront AB et A′B′ de grandeurs R et R′ disposées comme l'indique la figure.

Si l'on considère les trois segments ρ, ρ′, D, leurs produits géométriques deux à deux $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{Q}'$, $\mathfrak{P}$ ainsi que D^2 ne différeront que par des constantes des quantités analogues relatives à leurs projections

$$q = Rd\cos\beta, \qquad q' = R'd\cos\beta',$$
$$p = RR'\cos\alpha, \qquad d^2 = R^2 + R'^2 - 2RR'\cos\alpha.$$

Mais, en vertu de

$$\frac{R}{\cos\beta'} = \frac{R'}{\cos\beta} = \frac{d}{\sin\alpha},$$

on a

$$q = RR'\sin\alpha, \qquad q' = R'R\sin\alpha,$$

de sorte qu'il en résulte

$$q - q' = 0,$$
$$d^2 + 2p = \text{const.},$$
$$p^2 + q^2 = \text{const.}$$

et, par conséquent, en revenant aux vecteurs de l'espace,

$$\mathfrak{Q} - \mathfrak{Q}' = \text{const.},$$
$$D^2 + 2\mathfrak{P} = \text{const.},$$
$$(\mathfrak{P} + \text{const.})^2 + (\mathfrak{Q} + \text{const.})^2 = \text{const.}$$

Si le premier hyperboloïde dégénère en un cône, on ne peut plus considérer le vecteur $\frac{R}{\sin\theta}$, qui devient nul et ne définit plus l'axe ; on prend alors pour ρ un vecteur de grandeur constante porté par cet axe et, en raisonnant comme dans le cas précédent, on trouve immédiatement

$$d^2 = R^2, \qquad q = 0, \qquad p^2 + q'^2 = \text{const.},$$

d'où

$$D^2 = \text{const.}, \qquad \mathfrak{Q} = \text{const.}, \qquad (\mathfrak{P} + \text{const.})^2 + (\mathfrak{Q}' + \text{const.})^2 = \text{const.}$$

Si, enfin, on a deux cônes, on prend pour ρ et ρ' deux vecteurs de grandeurs constantes, ce qui donne

$$d^2 = 0, \qquad q = 0, \qquad q' = 0,$$

d'où

$$D^2 = \text{const.}, \qquad \mathfrak{Q} = \text{const.}, \qquad \mathfrak{Q}' = \text{const.}$$

13. Revenons maintenant à notre chaîne à quatre rotoïdes R_1, R_2, R_3, R_4. Fixons le membre R_3R_4 et considérons l'axe D_1 du rotoïde R_1.

Dans la déformation de la chaîne cette droite restera toujours sur un certain hyperboloïde de révolution autour de D_4, hyperboloïde fixe et bien déterminé ; elle appartiendra aussi à un certain hyperboloïde de révolution autour de D_2, hyperboloïde bien déterminé mais qui est mobile, qui tourne autour de la droite fixe D_3. Pendant la déformation, la distance des pieds sur D_1 de ses perpendiculaires communes avec D_2 et D_4 reste constante, puisque l'articulation D_1 est un rotoïde.

Les deux hyperboloïdes considérés sont donc bien dans les conditions du paragraphe précédent et doivent satisfaire aux équations indiquées.

Par ce procédé, nous écrivons les conditions de déformabilité en n'introduisant que le seul angle de rotation autour de D_3 que nous prendrons pour axe des Z, choisissant pour plan des xy celui du cercle de gorge de l'hyperboloïde décrit par R_2 autour de R_3.

Le premier hyperboloïde sera défini par un vecteur ρ fixe appliqué au centre a, b, c et ayant pour composantes X, Y, Z.

Le second hyperboloïde sera défini par un vecteur ρ' invariable mobile autour de Oz, appliqué au centre

$$\begin{aligned} a' &= r\cos\alpha - \delta_2 \sin\alpha, \\ b' &= r\sin\alpha + \delta_2\cos\alpha, \\ c' & \end{aligned}$$

et de composantes

$$\begin{aligned} X' &= -\sigma\sin\alpha, \\ Y' &= \quad\sigma\cos\alpha, \\ Z', & \end{aligned}$$

δ_2 étant, à un facteur constant près, non nul (à cause du non-parallélisme de D_2 et D_3), la distance des pieds sur D_2 de ses perpendiculaires communes avec D_1 et D_3. Pour la même raison, σ n'est pas nul.

On aura ici

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= \sigma Y\cos\alpha - \sigma X\sin\alpha + \text{const.}, \\ \mathfrak{Q} &= (rX + \delta_2 Y)\cos\alpha + (rY - \delta_2 X)\sin\alpha + \text{const.}, \\ \mathfrak{Q}' &= -\sigma b\cos\alpha + \sigma a\sin\alpha + \text{const.}, \\ D^2 &= -2(ar + b\delta_2)\cos\alpha + 2(a\delta_2 - br)\sin\alpha + \text{const.} \end{aligned}$$

Et nous devons écrire les trois conditions. La troisième, où nous mettons $\mathfrak{Q}'$ au lieu de $\mathfrak{Q}$, qui n'en diffère que par une constante exige, puisque σ n'est pas nulle,

$$X^2 + a^2 = Y^2 + b^2, \qquad XY + ab = 0,$$

donc

$$a = \varepsilon Y, \qquad b = -\varepsilon X \qquad (\varepsilon = \pm 1).$$

Remplaçant a et b par ces valeurs, les deux premières conditions conduisent au même résultat, qui s'écrit

$$\begin{aligned} (r - \varepsilon\sigma)X + \delta_2 Y &= 0, \\ \delta_2 X - (r - \varepsilon\sigma)Y &= 0. \end{aligned}$$

Comme D_1, axe de l'hyperboloïde fixe, n'est pas parallèle à D_3,

pris pour axe des Z, les composantes X, Y ne sont pas toutes deux nulles et il résulte des deux équations précédentes

$$(r - \varepsilon\sigma)^2 + \delta_2^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$\delta_2 = 0, \qquad r - \varepsilon\sigma = 0.$$

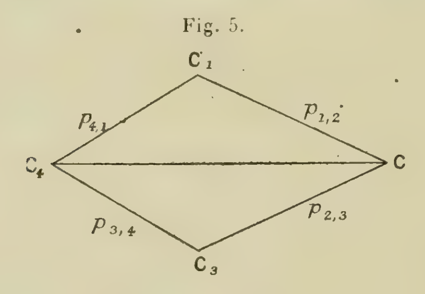
La première de ces égalités montre que les perpendiculaires communes à $D_2 D_1$ et à $D_2 D_3$ ont même pied sur D_2 et, comme la démonstration précédente s'applique à n'importe quelle arête, nous voyons déjà que *les quatre perpendiculaires communes doivent former un quadrilatère gauche continu.*

Si nous désignons par $p_{1,2}$, $p_{2,3}$, $p_{3,4}$, $p_{4,1}$ les longueurs des perpendiculaires communes, on voit immédiatement que la seconde égalité s'écrit

$$\frac{p_{1,2}}{\sin D_1 D_2} = \frac{p_{2,3}}{\sin D_2 D_3}.$$

Or, si nous considérons le quadrilatère gauche formé par les

Fig. 5.



perpendiculaires communes et le trièdre C_2C_1, C_2C_4, C_2C_3, par suite de la proportion des sinus, nous avons

$$\frac{\sin \widehat{C_4 C_2 C_3}}{\sin D_1 D_2} = \frac{\sin \widehat{C_4 C_2 C_1}}{\sin D_2 D_3},$$

d'où

$$p_{1,2} \sin \widehat{C_4 C_2 C_1} = p_{2,3} \sin \widehat{C_4 C_2 C_3},$$

donc les deux triangles $C_4 C_1 C_2$, $C_4 C_3 C_2$ de même base $C_4 C_2$ ont même hauteur et ceci a lieu pendant la déformation, ce qui exige

$$p_{4,1} = p_{2,3},$$
$$p_{1,2} = p_{3,4}$$

ou bien

$$p_{1,2} = p_{2,3},$$
$$p_{4,1} = p_{3,4}.$$

Mais, dans cette dernière hypothèse, en appliquant le même raisonnement à la diagonale C_1C_3, il faudrait que la valeur commune de $p_{1,2}$ et $p_{2,3}$ fût égale à celle de $p_{4,1}$ et $p_{3,4}$. Les quatre côtés seraient égaux et ce serait un cas particulier de la première hypothèse.

Nous arrivons donc à cette conclusion : *les quatre perpendiculaires communes doivent former un quadrilatère gauche continu et à côtés opposés égaux.*

Nous retrouvons ainsi le système articulé de M. Bennett et nous renvoyons pour la démonstration élémentaire de sa déformabilité, à un article de M. Bricard, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, en 1906.

14. Nos calculs ont supposé essentiellement que les deux hyperboloïdes considérés n'étaient pas des cônes, c'est-à-dire qu'il n'y avait pas de rotoïdes consécutifs concourants.

Supposons qu'il y en ait deux, R_4 et R_1 concourants en A; en écrivant les conditions du paragraphe 12 relatives à ce cas on trouve immédiatement

$$r = 0, \qquad \delta_2 = 0,$$

qui indiquent que R_3, R_2 sont aussi concourants et que la perpendiculaire commune $p_{1,2}$ aboutit en ce point B de concours.

Puisque R_2 et R_3 sont concourants, on aurait pu faire le même raisonnement en partant de R_3 et conclure que $p_{1,2}$ passait par A, de sorte que $p_{1,2}$ coïncide avec AB.

Le raisonnement a été fait en fixant le membre R_3, R_4. Comme on se trouve exactement dans les mêmes conditions en fixant le membre R_1, R_2, on en conclura que $p_{3,4}$ coïncide aussi avec AB.

Considérons alors l'image sphérique, elle aura ses quatre rotoïdes dans un même plan et, comme ce fait est incompatible avec toute déformation, nous voyons que l'hypothèse considérée ne conduit à rien.

Il nous reste à examiner le cas où les deux hyperboloïdes sont des cônes, c'est-à-dire où R_4, R_1 sont concourants ainsi que R_1, R_2.

Les équations correspondant à ce cas donnent immédiatement

$$a = b = X = Y = 0,$$

ce qui est impossible d'après l'hypothèse du non-parallélisme de R_4 et R_1.

15. En résumé, il existe cinq et rien que cinq chaînes singulières déformables à quatre membres :

1° Quatre vis parallèles en rhomboïde avec

$$h_1 = h_3 = \frac{h_2 + h_4}{2},$$

h_1, h_3 étant les pas des vis aux deux extrémités de la diagonale-axe ;

2° Quatre vis parallèles en parallélogramme avec

$$h_1 + h_3 = h_2 + h_4;$$

3° Quatre vis parallèles en contre-parallélogramme avec

$$h_1 = h_3, \qquad h_2 = h_4;$$

4° Deux vis parallèles V_1, V_3 alternant avec deux glissières rectilignes G_2, G_4. On a

$$h_1 = h_3$$

et G_2, G_4 sont symétriques par rapport au plan V_1V_3 ;

5° Quatre rotoïdes non parallèles et non concourants, les quatre perpendiculaires communes formant un quadrilatère gauche continu à côtés opposés parallèles (système Bennett).

Si l'on prend la définition ordinaire des systèmes articulés, c'est-à-dire si l'on ne considère que les systèmes à rotoïdes, on peut dire qu'il n'existe qu'une seule chaîne singulière à quatre membres : la chaîne Bennett.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

GOURSAT (ÉDOUARD), membre de l'Institut, professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — LEÇONS SUR LE PROBLÈME DE PFAFF. In-8°, 1922, VIII-386 pages. Paris, J. Hermann.

Le nouvel ouvrage que M. Goursat vient de faire paraître sur le Problème de Pfaff peut être regardé comme un complément des Leçons, devenues classiques, du même auteur sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre [1] et sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre [2]. Il est devenu superflu de louer les qualités qui font des ouvrages didactiques de M. Goursat des modèles du genre : clarté et élégance de l'exposition, simplicité des démonstrations qui éclairent vraiment le lecteur, parce que tout artifice en est exclu, soin avec lequel sont mis en évidence les rapports mutuels des différentes méthodes employées, souci constant d'éclairer les théories générales par des exemples judicieusement choisis; tout cela le lecteur le retrouvera dans ces Leçons sur le Problème de Pfaff.

Comme le fait remarquer l'auteur dans sa Préface, l'ouvrage n'exige pas du lecteur la connaissance préalable des Leçons sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre ou du second ordre. Il n'y a rien là que de conforme à la nature des choses. En réalité, ce qui est primitif et fondamental, c'est le problème de Pfaff; la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre doit en être considérée comme un cas particulier, et ce n'est que de cette manière qu'on peut bien comprendre les différents aspects de cette théorie. Il y a eu à cet égard dans les points de vue des mathématiciens une révolution, qui est contenue en germe dans la remarque, faite par S. Lie, d'après laquelle l'intégration de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre

$$F(x, y, z, p, q) = 0 \tag{1}$$

---

[1] Paris, Hermann, 1891, 2e édition, 1921.
[2] Paris, Hermann, t. I, 1896; t. II, 1898.

n'est autre chose que la résolution de l'équation de Pfaff

$$(2) \qquad dz - p\,dx - q\,dy = 0$$

à cinq variables x, y, z, p, q liées par une certaine relation. Si quelque chose ressort avec évidence de la lecture de l'ouvrage de M. Goursat, c'est le fait suivant : C'est la théorie des équations de Pfaff qui domine celle des équations aux dérivées partielles, et non l'inverse. La raison profonde en est double; d'abord à la différence des dérivées partielles qui n'ont de sens que quand on a fait un choix préalable des variables, indépendantes et dépendantes, les différentielles totales ont une signification intrinsèque; en second lieu, à toute expression de Pfaff on peut associer une autre expression, son covariant bilinéaire, ayant aussi une signification intrinsèque et dont la construction est indépendante du choix des variables. C'est grâce au levier puissant fourni par le covariant bilinéaire que beaucoup de problèmes, comme celui de Monge dont il sera question plus loin, ont pu recevoir une solution qu'on avait vainement cherchée en conservant les anciens points de vue.

L'ouvrage de M. Goursat est divisé en huit Chapitres :

Les deux premiers, intitulés respectivement : « *Formes canoniques d'une expression de Pfaff* » et « *Intégration d'une équation de Pfaff* », sont consacrés au problème de Pfaff proprement dit, c'est-à-dire à la recherche de tous les systèmes possibles de relations entre n variables données $x_1, x_2, \ldots, x_n$ rendant identique une équation de Pfaff

$$\omega \equiv X_1\,dx_1 + X_2\,dx_2 + \ldots + X_n\,dx_n = 0,$$

où les X sont des fonctions données des x. Cette recherche est elle-même liée à la réduction de l'expression de Pfaff ω à une forme canonique.

Après avoir rapidement exposé la méthode primitive de Pfaff, qui remonte à 1814, l'auteur, laissant de côté les divers perfectionnements qui lui ont été apportés, expose les méthodes plus récentes de Frobenius, Darboux, Clebsch, etc., fondées sur l'utilisation du covariant bilinéaire

$$\omega' = \delta\omega(d) - d\,\omega(\delta).$$

Appelons *élément linéaire* l'ensemble d'un point $(x_1, \ldots, x_n)$ et

d'une direction (dx_1, ..., dx_n) issue de ce point; un élément linéaire est dit *intégral* relativement à l'équation $\omega = 0$ quand ses coefficients de direction (dx_i) annulent ω; deux éléments linéaires issus du même point sont dits *en involution* relativement à l'expression ω quand leurs coefficients de direction (dx_i) et (δx_i) annulent le covariant bilinéaire ω'. Cela posé, on peut, avec M. Goursat, associer à l'expression ω quatre systèmes d'équations aux différentielles totales S_1, S_2, S_3, S_4.

Le système S_1 exprime que l'élément linéaire (dx_i) est en involution avec tous les éléments linéaires issus du même point;

Le système S_2 exprime en outre que l'élément linéaire (dx_i) est intégral;

Le système S_3 exprime que l'élément linéaire (dx_i) est en involution avec tous les éléments linéaires *intégraux* issus du même point;

Le système S_4 exprime en outre que l'élément (dx_i) est intégral.

Ces systèmes sont complètement intégrables. Le second est le système *caractéristique* de l'expression ω; le nombre c de ses intégrales premières distinctes représente le nombre minimum de variables au moyen desquelles peut s'exprimer ω par un changement de variables convenable : c'est la *classe* de la *forme* ω. De même, le nombre γ des intégrales distinctes de S_3 est égal au nombre minimum de variables au moyen desquelles peut s'écrire l'*équation* $\omega = 0$; c'est la classe de cette équation, et S_3 en est le système caractéristique.

Ces notions de classe et de système caractéristique sont fondamentales et peuvent être généralisées pour un système quelconque de formes différentielles et pour le système d'équations obtenu en annulant ces formes. Les variables en nombre minimum (variables caractéristiques de M. Goursat) au moyen desquelles peuvent s'exprimer les formes ou s'écrire les équations sont toujours déterminées d'une manière unique (à une transformation arbitraire près effectuée sur ces variables), ce sont les intégrales premières d'un système de Pfaff complètement intégrable qu'on peut former par différentiation. M. Goursat démontrera ces propriétés dans les différents cas où la notion de classe s'introduira.

La réduction d'une expression de Pfaff à sa forme canonique se fait pour ainsi dire intuitivement en utilisant les notions précé-

dentes. M. Goursat montre comment les différentes théories d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre se rattachent à la solution générale du problème de Pfaff.

Le Chapitre III est consacré aux *formes symboliques de différentielles;* ce sont en somme les formes qui interviennent sous les signes d'intégration multiple. Étudiées en elles-mêmes, elles ont fait l'objet de travaux de H. Poincaré, de M. Cartan et de M. Goursat lui-même. On peut les soumettre aux opérations fondamentales de l'algèbre, addition et multiplication, avec la restriction que le signe du produit peut changer quand on change l'ordre des facteurs.

Après avoir mis en évidence les propriétés purement algébriques des formes symboliques, M. Goursat montre comment, de toute forme de degré p, on peut déduire par *dérivation* une forme de degré $p+1$; la formation du covariant bilinéaire ω' d'une expression de Pfaff ω est un cas particulier de cette opération, qui se relie dans le cas général à la formule de Stokes généralisée. D'après un théorème dû à Poincaré, la condition nécessaire et suffisante pour que la dérivée d'une forme symbolique de degré p soit nulle est qu'elle soit elle-même la dérivée d'une forme symbolique de degré $p-1$.

Le problème de Pfaff peut s'étendre en substituant à la considération d'une forme de Pfaff (du premier degré) celle d'une forme symbolique de degré quelconque. M. Goursat fournit à l'égard de ce problème, très peu étudié jusqu'à présent, quelques indications intéressantes. On est conduit en particulier à un problème de ce genre en cherchant à étendre la notion de multiplicateur à une forme symbolique de degré quelconque.

Si dans une forme symbolique on porte son attention sur la manière dont entrent les différentielles, les variables elles-mêmes étant regardées comme des paramètres, on arrive à la notion du *rang* de la forme : c'est le nombre minimum de combinaisons linéaires des différentielles au moyen desquelles peut s'exprimer algébriquement la forme; le rang d'une forme de Pfaff est égal à 1; celui d'une forme du second degré est toujours pair; dans le cas général. sa détermination est un problème purement algébrique, qui est lié à la considération d'un certain système de Pfaff

associé à la forme. La notion de *rang* est distincte de celle de *classe;* le rang peut être égal à la classe, mais il peut aussi lui être inférieur. M. Goursat démontre que la classe est égale au nombre des équations indépendantes du système obtenu en adjoignant au système S *associé* à la forme le système S′ associé à sa dérivée; l'ensemble de ces deux systèmes est complètement intégrable et constitue le système caractéristique de la forme.

Une notion très utile due à M. Goursat est celle de *rang d'une fonction f relativement à une forme symbolique* ω; c'est le nombre qui indique de combien d'unités diminue la classe de la forme quand on égale la fonction à une constante arbitraire et sa différentielle à zéro; il est lié d'une manière simple au rang de la forme $\omega\, df$.

Le problème général de la réduction d'une forme symbolique à une forme canonique est susceptible d'une solution simple dans le cas des formes du premier degré (formes de Pfaff), des formes du second degré qui sont différentielles totales exactes et des formes dont le degré est inférieur d'une unité au nombre des variables. Dans les autres cas, on ne peut guère, en restant dans l'ordre de considérations exposées dans l'ouvrage de M. Goursat, que signaler quelques cas particuliers intéressants; l'auteur donne à ce sujet des indications relatives aux formes du second degré à quatre variables. Une étude plus approfondie exigerait en premier lieu la considération du groupe de substitutions linéaires qu'admet la forme, considérée comme fonction algébrique des différentielles des variables.

Le Chapitre IV contient l'*application des formes symboliques au problème de Pfaff*. L'auteur y expose la méthode dont s'est servi M. Cartan dans un Mémoire des *Annales de l'École Normale* de 1899 pour présenter la théorie du problème de Pfaff en y utilisant les formes ω'^p et $\omega\omega'^p$. Le Chapitre contient également la détermination, due aussi à M. Cartan, des solutions singulières d'une équation de Pfaff, avec les applications aux équations aux dérivées partielles du premier ordre et à la théorie des transformations de contact.

Le Chapitre V, intitulé : « *Invariants intégraux* », contient surtout le résumé des importantes recherches de M. Goursat lui-

même (*Journal de Mathématiques*, 1908 et 1915; *Annales de Toulouse*, 1915) sur la théorie des invariants intégraux. L'auteur se borne en principe au cas d'un système d'équations différentielles ne contenant pas explicitement la variable indépendante t; mais une partie des résultats obtenus sont indépendants de cette hypothèse. Signalons comme particulièrement simple la manière dont la composition des invariants intégraux est rattachée directement à la multiplication des formes symboliques, sans qu'il soit nécessaire de passer, comme le faisait Poincaré, par l'intermédiaire des équations aux variations.

Une notion importante introduite par M. Goursat est celle d'*invariant intégral attaché aux trajectoires*, caractérisé par la propriété de rester invariant intégral quand, en conservant les trajectoires, on modifie d'une manière quelconque la loi cinématique suivant laquelle elles sont parcourues. Ici l'hypothèse que t n'entre pas explicitement dans les équations données est essentielle. M. Goursat montre, en généralisant un procédé dû à Poincaré, comment, de tout invariant intégral d'ordre p non attaché aux trajectoires, on peut déduire [par l'opération (E)] un invariant intégral d'ordre $p-1$ attaché aux trajectoires. En réalité, il y a là un cas particulier d'une opération beaucoup plus générale s'appliquant toutes les fois que le système d'équations différentielles donné admet une transformation infinitésimale connue.

M. Goursat examine enfin sommairement le parti qu'on peut tirer, pour l'intégration des équations données, de la connaissance d'un invariant intégral; dans des cas étendus, l'intégration s'achève par une quadrature. Il y a là encore un problème très vaste, mais qui sortait du cadre de l'ouvrage.

Les trois derniers Chapitres sont consacrés à la théorie générale des systèmes de Pfaff.

Le Chapitre VI, intitulé : « *Classe d'un système de Pfaff. Caractéristiques* », contient la généralisation pour un système de Pfaff quelconque des notions fondamentales introduites dans le Chapitre I : élément intégral, couple d'éléments en involution. Le système covariant qui joue ici le rôle de système caractéristique exprime qu'un élément linéaire est intégral et est en involution avec tous les éléments linéaires intégraux issus du même point.

Ces résultats généraux sont éclairés par des exemples empruntés à la théorie des équations aux dérivées partielles.

Une notion importante est celle d'élément linéaire *singulier;* on appelle ainsi un élément linéaire intégral tel que les équations linéaires fournissant les éléments intégraux avec lesquels il est en involution, sans être toutes des identités, se réduisent néanmoins à un moindre nombre que si l'élément intégral était arbitraire. Ces éléments singuliers jouent le rôle de caractéristiques, au sens où ce mot est pris dans la théorie des équations aux dérivées partielles du second ordre (*caractéristiques de Monge*, suivant la dénomination de M. Cartan), les caractéristiques dites de « Cauchy » correspondant aux éléments linéaires intégraux en involution avec un élément intégral arbitraire. Ces notions sont éclairées par l'exemple d'un système de deux équations de Pfaff à six variables : c'est à un tel système qu'on peut toujours ramener une équation aux dérivées partielles du second ordre de Monge-Ampère, ainsi qu'un système de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre à deux fonctions inconnues de deux variables indépendantes; les rapports de ces systèmes avec le problème de Bäcklund ont été étudiés par M. Goursat dans un important Mémoire des *Annales de Toulouse* (1918).

Le Chapitre VII, intitulé : « *Systèmes dérivés. Problème de Monge* », met en évidence l'importance des résultats qui peuvent être obtenus par la considération de systèmes covariants, à la formation desquels se prêtent si facilement les systèmes d'équations aux dérivées partielles mis sous la forme de systèmes de Pfaff. Au nombre de ces systèmes covariants est le système *dérivé* S d'un système de Pfaff S : il est formé de l'ensemble des équations de S telles que deux éléments linéaires intégraux quelconques de S soient en involution relativement à chacune d'elles. S' ne se confond avec S que si S est complètement intégrable.

La notion de système dérivé, due à E. von Weber, permet d'établir facilement que les seules transformations de l'espace qui changent deux surfaces ayant un contact d'ordre donné supérieur à 1 en deux surfaces ayant un contact du même ordre résultent du prolongement des transformations de contact ordinaires. Elle

permet aussi, avec M. Engel et M. Cartan, de ramener tout système de deux équations de Pfaff à quatre variables à une forme canonique simple, ce qui fournit une solution du problème classique de Monge. Elle permet aussi une première étude des systèmes de Pfaff à cinq variables, qui se relient à la théorie des systèmes en involution d'équations aux dérivées partielles du second ordre, et dont l'étude plus approfondie a été faite par M. Cartan dans un Mémoire des *Annales de l'École Normale* (1910).

La dernière partie du chapitre est consacrée à l'exposé des résultats obtenus par M. Cartan dans l'étude des systèmes S de r équations de Pfaff à $r+2$ variables, ou, ce qui revient au même, des systèmes indéterminés de ρ équations différentielles ordinaires à $\rho+1$ fonctions inconnues. Une classe particulière de ces systèmes, appelés *spéciaux* par M. Goursat, jouit d'une propriété remarquable, c'est que leur solution générale peut être écrite explicitement sans signe d'intégration; ils sont caractérisés par la propriété que, si l'on forme les systèmes dérivés successifs, le nombre des équations qui les constituent diminue au plus d'une unité quand on passe d'un système au suivant. M. Goursat reproduit la démonstration que M. Cartan a donnée de ce théorème dans le *Bulletin de la Société mathématique* (1914) et il montre les applications qu'on en peut faire au problème de Monge, objet de nombreux travaux de Serret, Darboux, M. Hadamard, M. Goursat lui-même, M. Hilbert, etc.

Quant aux systèmes qui ne sont pas spéciaux, M. Goursat montre comment M. Cartan les ramène à des systèmes *normaux*, caractérisés par la propriété que le second système dérivé S″ contient deux équations de moins que S′; les systèmes normaux les plus simples sont les systèmes de trois équations de Pfaff à cinq variables : c'est à ceux-là que se rattache le système différentiel des courbes à torsion constante.

Le huitième et dernier Chapitre, intitulé : « *Multiplicités intégrales. Genre d'un système de Pfaff* », est consacré à la théorie, due à M. Cartan, qui permet, après qu'on a formé les covariants bilinéaires des premiers membres des équations d'un système de Pfaff, de déterminer par des procédés purement algébriques le nombre des dimensions et le degré d'indétermination des multi-

plicités intégrales non singulières de ce système, et qui ramène la résolution du problème de Cauchy sous sa forme la plus générale à l'intégration de systèmes de Kowalewski. M. Goursat donne une démonstration rigoureuse du théorème fondamental d'existence, tout en reproduisant le raisonnement intuitif que M. Cartan s'était contenté de donner.

Comme on s'en rend compte d'après l'analyse précédente, qui a laissé de côté bien des points intéressants, l'ouvrage de M. Goursat rend facilement accessibles au lecteur des théories qu'on était jusqu'à présent obligé d'aller chercher dans des Mémoires disséminés ici et là. C'est pour ces théories une consécration que de trouver place dans un Livre destiné à devenir classique, au même titre que les ouvrages précédents de M. Goursat.

E. CARTAN.

MÉLANGES

LA CLEPSYDRE CHEZ LES ANCIENS;

PAR M. CONST. MALTÉZOS.

Dans le *Journal de la Société archéologique hellénique* (A. E.) j'avais publié (1902) une *Étude sur la Clepsydre chez les Anciens*. J'y avais alors, le premier, montré que des vases en terre cuite et un vase en bronze, se trouvant dans les musées archéologiques (1) sont des anciennes clepsydres, dont nous rencontrons la description et le mode de fonctionnement (par la pression de l'air atmosphérique) chez Aristote. Ces petits vases avaient été soit des jouets d'enfants (Aristote, *Problèmes* et Ἀναπνοῇ Ἰώνων), soit des pipettes à vin (Heron d'Alexandrie (Πνευματικῶν, A, § VII), tandis que le vase de bronze, exposé dans le Musée d'Athènes, a servi

(1) *Voir*, par exemple, la *Revue archéologique*, 1899, t. I, p. 7 et 323-328, *Mittheilungen des K. D. Arch. Instituts*, 1897, p. 387.

comme pipette à huile, comme je l'ai démontré. Ces vases, ovoïdes ou en forme de fruit de pavot, portent sur la partie inférieure des trous (passoire) et sur la partie supérieure un tube soudé, droit (la pipette à huile), ou courbe en anse de panier, ayant une ouverture au point culminant. Cette explication et l'usage proposé ont été depuis universellement admis.

En second lieu, j'avais étudié la clepsydre des tribunaux. Pour celle-ci, je distingue deux époques : la première, jusqu'au IVe siècle avant Jésus-Christ compris, et la seconde dont le commencement reste indéterminé. Pendant cette dernière époque, la clepsydre consistait tout simplement en un vase prismatique ou cylindrique ouvert, ayant un trou ou une petite tubulure d'écoulement au fond. Mais pour la clepsydre de la première époque, à cause du même nom donné par Aristote (1) et d'autres indices, j'avais conclu comme très probable qu'elle était établie sur le principe des pipettes, avec, pourtant, quelques changements nécessaires à cet usage spécial. En effet, dans tout temps on remplissait la clepsydre des tribunaux en y versant de l'eau une fois pour chaque plaidoyer, tandis qu'on ne peut remplir la clepsydre commune (décrite ci-dessus) qu'en la plongeant dans l'eau, la passoire en bas. A cause de cela, en m'appuyant sur le texte d'Ἀθηναίων Πολιτεία, j'avais alors conçu comme très probable que la clepsydre primitive des tribunaux portait au-dessus un couvercle avec une tubulure, et en dessous, au lieu de passoire, une seule tubulure d'écoulement, et l'on pouvait la remplir par en haut en ôtant le couvercle. Quand, durant la plaidoirie, le secrétaire lisait une loi, un décret, etc., le préposé à la distribution de l'eau fermait l'ouverture du tube supérieur, suspendant ainsi l'écoulement de l'eau par le jeu de la pression atmosphérique.

J'avais enfin cherché la durée de l'écoulement pour les plaidoiries *dans les affaires à eau*, et j'avais été amené à la conclusion que l'écoulement complet *d'une amphore* d'eau durait 51 minutes (de temps moyen solaire).

En même temps, M. Bruno Keil a calculé (2) le temps d'*un chous* $\left(= \frac{1}{12}\text{ de l'amphore}\right)$, lequel peut être considéré comme

(1) Comparer les *Problèmes* et Ἀθηναίων Πολιτεία.

(2) *Anonymus Argentinensis*, 1902 (*Zum athen. Gerichtswesen*).

l'unité légale de temps, à $4^m 34^s \frac{2}{7}$, par conséquence le temps de l'amphore à $54^m 51^s$ pour l'époque avant 370 avant Jésus-Christ, et pour l'époque ultérieure la durée du *chous* à 4 minutes et de l'amphore à 48 minutes, parce qu'entre les deux époques, d'après lui, *la journée-étalon* (διαμεμετρημένη) des Athéniens avait été changée ; il arrive à cette conclusion par la considération de la longueur en lignes des textes qui nous restent des plaidoiries des orateurs athéniens.

En 1912, sir J. Sandys [1] admet mon explication pour lesdits vases (clepsydres), mais il donne une autre édition du passage relatif du texte d'Ἀθηναίων Πολιτεία, d'où il conclut que les clepsydres des tribunaux ont été en tout temps tout à fait semblables aux susdits petits vases.

De ces travaux, et d'autres mentionnés dans ma nouvelle Étude, j'ai été amené à reprendre la recherche sur les clepsydres en général, et celle des tribunaux en particulier, au point de vue de construction, de fonctionnement et de durée d'écoulement pour les plaidoiries, dont les résultats vont être publiés dans le *Journal archéologique* (A. E.) ; un résumé de ces résultats est publié ici.

Considérant la longueur de ce qui reste en plaidoyers *à eau*, par le nombre des syllabes, et admettant, après expérience personnelle, qu'un plaideur, parlant distinctement, peut en moyenne prononcer 5,2 syllabes par seconde, m'appuyant aussi sur des données auxiliaires, je trouve : 1° que la durée moyenne de l'écoulement *d'un chous*, c'est-à-dire *l'unité légale de temps* dans les affaires à eau, est restée la même entre 414 et 325 avant Jésus-Christ, et égale à $4^m 5^s \frac{1}{2}$ de temps moyen ; 2° qu'on prenait comme journée-étalon (διαμεμετρημένη) la journée la plus courte à Athènes, que je calcule entre le moment où les premiers rayons du Soleil levant frappent le Parthénon et le moment analogue du coucher, on la divisait en onze (11) parties égales, et que durant chacune de ces onze subdivisions pouvait se vider une clepsydre contenant une amphore d'eau ; 3° enfin qu'entre 360 et 325 avant Jésus-Christ, le nombre des *chous*, donnés pour les causes privées aux premiers plaidoyers, a été abaissé probablement dans le rapport $\frac{10}{12}$.

---

(1) *Cambridge Phil. Society*, et édition d'Ἀθηναίων Πολιτεία, 1912.

Quant à la forme et le mode de fonctionnement des clepsydres-pipettes ou jouets et de celles des tribunaux, mes nouvelles recherches confirment ce que j'ai exposé ci-dessus, avec la particularité que celles des tribunaux étaient cylindriques et en *métal*. Élles étaient posées sur un trépied, pour être visibles de toute l'assemblée, par une anse ou par des oreillettes. Mais, suivant l'intérêt de l'action judiciaire, on donnait une différente quantité d'eau.

De la longueur des plaidoiries qui nous restent, on conclut sûrement que les temps d'écoulement étaient proportionnels au nombre de *chous* donnés, tandis que le temps d'écoulement d'un vase cylindrique par un orifice à la base (en mince paroi) est proportionnel à la racine carrée de ce nombre. Il existait donc dans les tribunaux plusieurs clepsydres, une pour chaque durée légale, ce qui est confirmé, pensons-nous, par le texte d'Aristote.

Contrairement à cette conclusion, on pourrait supposer que la clepsydre des tribunaux n'était pas cylindrique, mais qu'elle avait une telle forme de révolution qu'elle pouvait se vider, en écoulement libre, en des temps proportionnels à la quantité d'eau qu'on y versait. Mais la solution de ce problème conduit, comme on le prouve aisément, *à l'écoulement à vitesse constante*. Cela peut se faire soit par le procédé du vase de Mariotte, inconnu des Anciens, soit par un siphon supporté par un flotteur (λεβητάριον) (1). Mais ces moyens ne donnent, en tout cas, *l'écoulement libre* par ouverture ou tubulure à la base (2).

(1) *Héron d'Alexandrie*, Πνευματικῶν, A, IV.

(2) Si l'on cherche à construire un vase de révolution qui se vide par un trou au sommet de la base (en mince paroi) *en des temps proportionnels aux hauteurs de l'eau* qu'on y verse, le problème admet la solution suivante.

En prenant comme origine du système triplorthogonal le centre de l'ouverture, et comme axe des z dirigé vers le haut l'axe du vase, en désignant par R le rayon de la section droite intérieure, à la hauteur z, et par σ' l'aire de la section contractée de la veine liquide, on aura le temps d'écoulement d'une quantité d'eau de hauteur z

$$t = \frac{\pi}{\sigma' \sqrt{2g}} \int_0^z \frac{R^2\,dz}{\sqrt{z}} = b.z,$$

d'où l'équation de la surface de révolution du vase

$$\pi R^2 = \pi(x^2 + y^2) = b.\sigma' \sqrt{2gz}.$$

Donc le vase cherché aura une surface intérieure de révolution du genre parabo-

SUR LES PETITES OSCILLATIONS D'UNE MASSE FLUIDE;

PAR M. E. CARTAN.

Dans son Mémoire célèbre : « *Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation* » ([1]), Poincaré a indiqué une méthode remarquable pour l'étude des petits mouvements d'un ellipsoïde fluide homogène au voisinage d'une position d'équilibre de rotation (§ 13, p. 347-366). Cette méthode a été, semble-t-il, difficilement comprise ; on a même récemment contesté jusqu'à la possibilité des petits mouvements étudiés par Poincaré ([2]). Les difficultés qu'on a éprouvées à la lecture du Mémoire des *Acta* tiennent plus, à mon avis, aux notations employées par l'auteur qu'à l'exposition elle-même, une même lettre ρ servant à désigner tantôt une variable, tantôt la valeur numérique que prend cette variable pour l'ellipsoïde considéré. J'ai pensé qu'il y aurait intérêt à donner de la méthode de Poincaré un exposé qui, tout en respectant le principe même de cette méthode, la débarrassât de ses obscurités et précisât certains points importants laissés dans l'ombre par l'auteur.

Je partirai, sans en discuter la légitimité, de l'hypothèse faite par Poincaré d'après laquelle, comme pour les systèmes matériels jouissant d'un nombre fini de degrés de liberté, le petit mouvement le plus général est la juxtaposition de mouvements fondamentaux *pendulaires*, c'est-à-dire pour lesquels chaque molécule fluide a,

---

loïde. Une telle clepsydre peut être construite en verre et posée sur un trépied. La quantité d'eau écoulée par cette forme de vase sera donnée par

$$q = cz^{\frac{3}{2}} \qquad \left(c = \frac{2}{3}\sqrt{2g}.b\sigma'\right)$$

et les temps d'écoulement proportionnels à $q^{\frac{2}{3}}$.

([1]) *Acta math.*, t. VII, 1885, p. 259-380. (Les références à ce Mémoire seront indiquées par la lettre P., suivie du numéro de la page.)

([2]) B. GLOBA MIKHAILENKO, *Contribution à l'étude des mouvements d'une masse fluide en rotation.* Thèse, Paris, Gauthier-Villars, 3e partie, 1920, p. 60-68. — *Cf.* P. APPELL, *Bulletin des Sc. math.*, 2e série, t. XLV, 1921, p. 10-12. (Compte rendu de la Thèse précédente.)

autour d'une position moyenne, un mouvement pendulaire dont la fréquence (réelle ou imaginaire) λ est la même pour toutes les molécules. La mise en équations du problème conduit à une équation aux dérivées partielles du second ordre à coefficients constants tout à fait analogue à l'équation de Laplace. L'idée directrice de Poincaré a été qu'en ramenant, par une transformation homographique, cette équation à l'équation de Laplace (et l'ellipsoïde donné à un autre ellipsoïde), les fonctions de Lamé sur cet ellipsoïde transformé fournissaient sur l'ellipsoïde donné des fonctions jouant, par rapport à l'équation aux dérivées partielles de Poincaré, le même rôle que les fonctions de Lamé par rapport à l'équation de Laplace. Mais, outre que l'ellipsoïde, par la transformation homographique, peut devenir imaginaire, ou devenir un hyperboloïde réel, ce qui soulève des difficultés pour la construction des fonctions de Lamé correspondantes (1), la recherche de ces fonctions de Lamé généralisées va au delà de ce que nécessite la solution du problème proposé; en réalité, il suffit d'introduire des polynomes satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles de Poincaré et prenant sur l'ellipsoïde donné des valeurs qui, rapportées à la sphère homographique, se réduisent à une fonction sphérique (polynome harmonique ***homogène***).

C'est à ce point de vue que je me suis placé dans l'exposé qu'on va lire. Le lecteur verra que la méthode de Poincaré peut théoriquement laisser échapper des solutions du problème, mais dans le seul cas d'une fréquence *réelle* comprise entre -2ω et $+2\omega$, ce qui n'a aucune importance pour la discussion de la stabilité. Dans le but d'éviter la confusion signalée plus haut relativement à l'emploi de la lette ρ, je me suis permis de prendre des notations un peu différentes de celles de Poincaré; j'appelle a^2, b^2, c^2 les carrés des demi-axes de l'ellipsoïde donné; quant au paramètre ρ des ellipsoïdes homofocaux, je le définis par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2+\rho}+\frac{y^2}{b^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}-1=0.$$

En dehors de l'exposé théorique de la méthode de Poincaré, j'ai

(1) Poincaré a vu ces difficultés et y a répondu sommairement pages 364-365; les brèves indications données dans ce passage, quoique insuffisantes pour répondre à toutes les objections, sont très précieuses pour l'intelligence même de sa méthode.

traité deux applications. J'ai étudié d'abord la question de la stabilité ordinaire des ellipsoïdes de Maclaurin; Poincaré s'était contenté de montrer que cette stabilité s'étend au delà de l'ellipsoïde de bifurcation de Jacobi; je montre qu'elle s'étend à tous les ellipsoïdes de Maclaurin dont l'aplatissement est inférieur à 0,697 (ou l'excentricité inférieure à 0,953) : cette limite avait déjà été indiquée par B. Riemann (*Gött. Abh.*, t. IX, 1860, p. 3 — *Math. Werke*, p. 168), mais dans l'hypothèse restreinte où la masse fluide conservait une forme ellipsoïdale. En second lieu j'ai étudié les petites oscillations des ellipsoïdes de Jacobi pour lesquelles la masse conserve une forme ellipsoïdale; dans une première catégorie, la masse conserve sa grandeur et sa forme d'équilibre, le petit axe de l'ellipsoïde décrivant autour de sa position d'équilibre un cône du second degré; dans une seconde catégorie l'axe des z reste constamment l'axe de la masse fluide. Ce sont les petits mouvements de cette deuxième catégorie qui sont à identifier avec ceux dont M. P. Appell a signalé récemment l'existence (*C. R.*, t. 171, 1920, p. 761-766).

Enfin dans les deux derniers paragraphes je montre comment on peut, en restant dans l'esprit général de la méthode de Poincaré, lever la restriction signalée ci-dessus relative aux fréquences réelles comprises entre -2ω et $+2\omega$, ou égales à $\pm 2\omega$. Il est possible de diriger les calculs de manière à obtenir, *sans exception*, tous les petits mouvements cherchés.

I. — Exposé général de la méthode de Poincaré.

1. Considérons une masse liquide de densité constante, que nous pouvons toujours supposer égale à 1. Imaginons que, par rapport à des axes $Oxyz$ d'origine O fixe et tournant avec une vitesse angulaire constante ω autour de l'axe fixe Oz, les différentes molécules fluides soient en mouvement de manière que chacune s'écarte très peu d'une position moyenne et que sa vitesse soit très petite. Nous désignerons par X, Y, Z les coordonnées de la position d'une molécule à l'instant t et par x, y, z les coordonnées de la position moyenne de cette même molécule. Nous désignerons enfin par

$$\rho_X, \quad \rho_Y, \quad \rho_Z, \qquad \gamma_X, \quad \gamma_Y, \quad \gamma_Z$$

les composantes de la vitesse et de l'accélération (relatives aux axes donnés) de la molécule.

Les équations fondamentales de l'Hydrodynamique sont

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial X} = -\gamma_X + 2\omega v_Y, \\ \dfrac{\partial f}{\partial Y} = -\gamma_Y - 2\omega v_X, \\ \dfrac{\partial f}{\partial Z} = -\gamma_Z, \end{cases}$$

où l'on a désigné par $f(X, Y, Z)$ la valeur, pour la molécule (X, Y, Z), de la fonction

$$p - V - \frac{1}{2}\omega^2(X^2 + Y^2);$$

p désigne la pression et V le potentiel des attractions newtoniennes. Dans les seconds membres des équations (1) figurent les composantes de la force d'inertie relative et de la force centrifuge composée. Par hypothèse, ces composantes sont très petites.

On peut exprimer la valeur de $f(X, Y, Z)$ relative à la moléculs (X, Y, Z) en fonction des coordonnées (x, y, z) de sa position moyenne; désignons par $F(x, y, z)$ cette expression. Les équations (1), qui sont condensées dans l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial X}dX + \frac{\partial f}{\partial Y}dY + \frac{\partial f}{\partial Z}dZ = (-\gamma_X + 2\omega v_Y)dX + (-\gamma_Y - 2\omega v_X)dY - \gamma_Z dZ,$$

sont également condensées dans l'équation équivalente

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz &= (-\gamma_X + 2\omega v_Y)\,dx + (-\gamma_Y - 2\omega v_X)\,dy - \gamma_Z\,dz \\ &\quad + (-\gamma_X + 2\omega v_Y)\,d(X - x) + (-\gamma_Y - 2\omega v_X)\,d(Y - y) - \gamma_Z\,d(Z - z); \end{aligned}$$

en négligeant les infiniment petits d'ordres supérieurs, on obtient, au degré d'approximation admis,

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = -\gamma_X + 2\omega v_Y, \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = -\gamma_Y - 2\omega v_X, \\ \dfrac{\partial F}{\partial z} = -\gamma_Z. \end{cases}$$

2. Supposons maintenant, avec Poincaré, que chaque molécule soit animée, autour de sa position moyenne, d'un mouvement pendulaire :

$$X - x = \mathcal{R}(\xi e^{i\lambda t}), \qquad Y - y = \mathcal{R}(\eta e^{i\lambda t}), \qquad Z - z = \mathcal{R}(\zeta e^{i\lambda t}),$$

où λ désigne une *constante*, réelle ou imaginaire, indépendante de la molécule considérée ; ξ, η, ζ sont trois fonctions, réelles ou imaginaires, de x, y, z ; enfin le signe $\mathcal{R}$ indique qu'on prend la partie réelle de la fonction qui le suit. Dans ces conditions, les équations (2) deviennent

$$(3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \mathcal{R}\,[(\lambda^2\xi + 2i\omega\lambda\eta)e^{i\lambda t}], \\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial y} = \mathcal{R}\,[(\lambda^2\eta - 2i\omega\lambda\xi)e^{i\lambda t}], \\[2mm] \dfrac{\partial F}{\partial z} = \mathcal{R}\,(\lambda^2\zeta e^{i\lambda t}). \end{cases}$$

Il résulte de là que la fonction F de x, y, z, t est de la forme

$$(4)\qquad F = C + \mathcal{R}(\psi e^{i\lambda t}),$$

C étant une constante et ψ une fonction déterminée, réelle ou imaginaire, de x, y, z. Cette fonction satisfait manifestement aux équations suivantes, qui remplacent les équations (3) [1] :

$$(I)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\psi}{\partial x} = \lambda^2\xi + 2i\omega\lambda\eta, \\[2mm] \dfrac{\partial\psi}{\partial y} = \lambda^2\eta - 2i\omega\lambda\xi, \\[2mm] \dfrac{\partial\psi}{\partial z} = \lambda^2\zeta. \end{cases}$$

A ces équations doit s'ajouter l'équation de continuité qui exprime que la densité reste constante, ou encore que l'on a

$$\frac{D(X, Y, Z)}{D(x, y, z)} = 1 ;$$

cette équation, au degré d'approximation admis, donne

$$(II)\qquad \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0.$$

---

[1] Ce sont les équations (4) de Poincaré, p. 356.

Les petits mouvements étudiés par Poincaré dépendent donc tout d'abord de l'intégration des quatre équations (I) et (II) à quatre fonctions inconnues ξ, η, ζ, ψ des trois variables réelles x, y, z.

3. Il y a lieu maintenant de tenir compte des conditions aux limites : à la surface libre la pression doit être nulle, par suite la fonction F doit se réduire à

$$-V(X, Y, Z) - \frac{1}{2}\omega^2(X^2 + Y^2).$$

Remarquons que le potentiel newtonien V est la somme du potentiel newtonien V_1 qui serait dû aux molécules fluides, *prises dans leurs positions moyennes*, et du potentiel newtonien V_2 dû au bourrelet supplémentaire, en partie positif, en partie négatif, qu'il est nécessaire d'ajouter pour obtenir la masse fluide à l'instant t. Ce potentiel V_2 peut être regardé comme un potentiel de simple couche dont la densité serait

$$\alpha\,\mathcal{R}(\xi e^{i\lambda t}) + \beta\,\mathcal{R}(\eta e^{i\lambda t}) + \gamma(\zeta e^{i\lambda t}),$$

en désignant par α, β, γ les cosinus directeurs de la normale extérieure à la surface moyenne; on a donc

$$V_2 = \mathcal{R}(V_3 e^{i\lambda t}),$$

en appelant V_3 le potentiel dû à la simple couche de densité

$$\alpha\xi - \beta\eta + \gamma\zeta.$$

On a par suite

$$f(X, Y, Z) = p - V_1(X, Y, Z) - \frac{1}{2}\omega^2(X^2 + Y^2) - \mathcal{R}(V_3 e^{i\lambda t}).$$

Posons pour abréger

$$U(X, Y, Z) = V_1(X, Y, Z) + \frac{1}{2}\omega^2(X^2 - Y^2).$$

Nous avons alors, au degré d'approximation admis,

$$F(x, y, z) = p - U(x, y, z) - \frac{\partial U}{\partial x}\mathcal{R}(\xi e^{i\lambda t}) - \frac{\partial U}{\partial y}\mathcal{R}(\eta e^{i\lambda t}) - \frac{\partial U}{\partial z}\mathcal{R}(\zeta e^{i\lambda t}) - \mathcal{R}(V_3 e^{i\lambda t}),$$

la fonction V_3, dans le dernier terme, pouvant être évaluée au point (x, y, z) au lieu de l'être au point (X, Y, Z).

Si nous considérons maintenant une molécule (X, Y, Z) de la surface libre, c'est-à-dire si nous supposons que le point (x, y, z) appartient à la surface moyenne, nous voyons, en tenant compte de la formule (4), qu'on doit avoir en ce point

$$U(x, y, z) = -C,$$
$$\psi = -\xi\frac{\partial U}{\partial x} - \eta\frac{\partial U}{\partial y} - \zeta\frac{\partial U}{\partial z} - V_3.$$

La première de ces relations exprime que *la surface moyenne est une surface d'équilibre relatif pour la masse fluide.* Si nous désignons par g l'intensité de la pesanteur correspondante, la seconde équation nous donne, *sur la surface moyenne*,

$$\text{(III)} \qquad \psi = g(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta) - V_3.$$

En définitive, *les conditions aux limites donnent la relation* (III) *entre les valeurs prises à la surface par les fonctions* ξ, η, ζ, ψ. Je rappelle que V_3 est le potentiel de simple couche de densité $\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta$, et que α, β, γ sont les cosinus directeurs de la normale extérieure.

4. Supposons maintenant avec Poincaré que la surface moyenne, qui est une figure d'équilibre relatif, soit un ellipsoïde. Nous écrirons son équation sous la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0 \qquad (a^2 > b^2 > c^2).$$

On a ici

$$\frac{\alpha}{\frac{x}{a^2}} = \frac{\beta}{\frac{y}{b^2}} = \frac{\gamma}{\frac{z}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}} = l.$$

Nous poserons

$$(5) \qquad \frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta + \frac{z}{c^2}\zeta = \varepsilon \quad [1].$$

La formule (III) montre qu'à la surface de l'ellipsoïde on a

$$(6) \qquad \psi = gl\varepsilon - V_3.$$

[1] L'équation de la surface libre, grâce à l'introduction de cette quantité, rend la forme

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 2\mathcal{R}(\varepsilon e^{i\lambda t}) = 1.$$

Rappelons qu'en introduisant les fonctions de Lamé R et S et en conservant les notations de Poincaré, on a

$$gl = 2\pi abc \frac{R_3^0 S_3^0}{3},$$

où l'indice o indique que les valeurs des fonctions R_3 et S_3 se rapportent à l'ellipsoïde considéré.

Si de plus la fonction de point ε sur l'ellipsoïde est développée en une série [1] de fonctions de Lamé

$$\varepsilon = \sum A_k M_k N_k,$$

on a

$$V = 2\pi abc \sum \frac{R_k^0 S_k^0}{2n+1} M_k N_k \quad (^2).$$

On aura donc, à la surface de l'ellipsoïde [3],

$$\psi = 2\pi abc \sum A_k \left(\frac{R_3^0 S_3^0}{3} - \frac{R_k^0 S_k^0}{2n+1} \right) M_k N_k.$$

Nous poserons, pour abréger un peu l'écriture,

$$H_k = abc \frac{R_k^0 S_k^0}{2n+1}$$

et nous énoncerons la condition (III) sous la forme suivante :

Si les constantes de Fourier de la fonction ε sont désignées par A_k, les constantes de Fourier correspondantes de la fonction ψ, prise sur l'ellipsoïde, sont

$$2\pi(H_3 - H_k) A_k.$$

---

(1) Poincaré suppose implicitement le développement possible; en réalité ce n'est pas nécessaire; la fonction ε est complètement définie par ses *constantes de Fourier* A_k, et l'on peut simplement affirmer que la série est *convergente en moyenne* vers ε.

Remarquons encore que dans le Mémoire de Poincaré c'est $R_1^0 S_1^0$ qui intervient au lieu de $R_3^0 S_3^0$, parce que c'est l'axe des x qui est supposé de rotation au lieu de l'axe des z.

(2) Dans le Mémoire de Poincaré, c'est le coefficient 4π qui intervient au lieu de 2π; cela tient à ce que j'appelle ρ ce que Poincaré appelle ρ^2.

(3) *Cf.* P., formule (5), p. 357.

5. Revenons maintenant aux équations (I) et (II). La résolution des équations (I) par rapport à ξ, η, ζ donne, si $\lambda^2(\lambda^2-4\omega^2)\neq 0$,

$$(\text{I}')\qquad \left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial x}-\dfrac{2i\omega}{\lambda}\dfrac{\partial\psi}{\partial y}}{\lambda^2-4\omega^2},\\ \eta &= \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial y}+\dfrac{2i\omega}{\lambda}\dfrac{\partial\psi}{\partial x}}{\lambda^2-4\omega^2},\\ \zeta &= \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial\psi}{\partial z};\end{aligned}\right.$$

en portant dans l'équation (II) on obtient pour la fonction ψ l'équation aux dérivées partielles

$$(\text{II}')\qquad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+\left(1-\frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}=0.$$

à laquelle nous donnerons le nom d'*équation de Poincaré*.

Le calcul de ε, d'après la formule (5), donne

$$(\lambda^2-4\omega^2)\varepsilon=\frac{x}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{y}{b^2}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\left(1-\frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{z}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{2i\omega}{\lambda}\left(\frac{x}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{y}{b^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right);$$

nous désignerons le second membre par la notation $D_\lambda(\psi)$.

Le problème à résoudre est alors le suivant :

Trouver une fonction ψ définie à l'intérieur et à la surface de l'ellipsoïde, satisfaisant à l'équation aux dérivées partielles de Poincaré, et telle que si l'on considère sur l'ellipsoïde les deux fonctions

$$\psi \quad et \quad D_\lambda(\psi)=\frac{x}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{y}{b^2}\frac{\partial\psi}{\partial y}+\left(1-\frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{z}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}-\frac{2i\omega}{\lambda}\left(\frac{x}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\frac{y}{b^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right),$$

les constantes de Fourier correspondantes de ces deux fonctions soient de la forme

$$2\pi(H_3-H_k)A_k \qquad et \qquad (\lambda^2-4\omega^2)A_k.$$

6. Le problème étant ainsi formulé analytiquement, nous allons faire une étude préalable de l'équation de Poincaré, en supposant que la constante λ a une valeur réelle ou imaginaire quelconque, *exception faite des valeurs réelles comprises dans l'intervalle*

$$(-2\omega, +2\omega).$$

Ce cas d'exception n'intéresse du reste pas la question de la stabilité, celle-ci étant simplement liée à l'impossibilité de la solution du problème proposé pour des valeurs imaginaires de la constante λ.

Une première remarque est la suivante : *L'équation de Poincaré n'admet aucune solution s'annulant à la surface de l'ellipsoïde* (¹). En effet, si l'on désigne par $\bar{\psi}$ la fonction imaginaire conjuguée de ψ, on a la formule

$$\int \bar{\psi} \left[\alpha \frac{\partial \psi}{\partial x} - \beta \frac{\partial \psi}{\partial y} + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right) \gamma \frac{\partial \psi}{\partial z} \right] d\sigma$$
$$= \int \left[\frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y} + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right) \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} \right] dx\, dy\, dz,$$

l'intégrale de surface du premier membre étant étendue à la surface de l'ellipsoïde et l'intégrale du second membre au volume de cet ellipsoïde. D'après l'hypothèse faite sur ψ, la première intégrale est nulle, et par suite aussi la seconde. Or, si λ^2 est imaginaire, la partie imaginaire de l'intégrale donne

$$\int \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial z} dx\, dy\, dz = 0,$$

d'où

$$\frac{\partial \psi}{\partial z} = 0;$$

on a ensuite

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = 0.$$

La conclusion est la même si λ^2 est réel, $1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}$ étant positif. Dans les deux cas la fonction ψ, constante à l'intérieur de l'ellipsoïde et nulle à la surface, est identiquement nulle.

De la remarque précédente résulte que l'équation de Poincaré admet une seule solution prenant à la surface des valeurs données.

(¹) Il est bien évident que cette remarque pourrait tomber en défaut si $1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}$ était réel et négatif, comme le montre l'exemple de la fonction

$$\psi = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \quad \text{pour} \quad 1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2} = - \frac{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{c^2}}.$$

On peut démontrer qu'il y a effectivement une solution, mais nous n'aurons pas besoin de cette propriété.

De là résulte encore que la fonction ψ étant complètement définie par les valeurs qu'elle prend à la surface, la connaissance des constantes de Fourier de la fonction ψ, prise sur la surface, doit entraîner théoriquement la connaissance des constantes de Fourier de la fonction $D_\lambda(\psi)$, prise aussi sur la surface. Il est du reste évident, d'après la forme de $D_\lambda(\psi)$, que les constantes de Fourier de $D_\lambda(\psi)$ ne peuvent être que des combinaisons linéaires à coefficients fixes des constantes de Fourier de ψ. *Poincaré a montré, et c'est là le point essentiel de la théorie, que les* $2n+1$ *constantes de Fourier d'ordre* n *de* $D_\lambda(\psi)$ *ne dépendent que des constantes de Fourier du même ordre de* ψ.

7. Pour démontrer cette propriété fondamentale, nous allons suivre une voie un peu différente de celle de Poincaré.

1° *Il existe toujours un polynome* P *de degré* n *satisfaisant à l'équation de Poincaré et prenant sur l'ellipsoïde les mêmes valeurs qu'un polynome arbitrairement donné* Q *du même degré.*

Il suffit en effet de déterminer un polynome R de degré $n-2$ tel que le polynome

$$P = Q + \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) R$$

satisfasse à l'équation de Poincaré. En exprimant qu'il en est ainsi on obtient, pour déterminer les coefficients de R, autant d'équations linéaires qu'il y a d'inconnues, à savoir le nombre des coefficients d'un polynome de degré $n-2$. Le déterminant de ces équations ne peut être nul ; sinon en effet les équations *homogènes* admettraient une solution non identiquement nulle, autrement dit il existerait un polynome $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right)$ R non identiquement nul satisfaisant à l'équation de Poincaré. Or, cela est impossible puisque ce polynome s'annule sur l'ellipsoïde.

En particulier, supposons que Q soit un *polynome de Lamé* L d'ordre n ; nous dirons que le polynome P correspondant est un *polynome de Poincaré*. Ces deux polynomes se réduisent sur

l'ellipsoïde à une fonction de Lamé $M_k N_k$ et, comme on sait, cette fonction, *rapportée à la sphère homographique*, *est une fonction sphérique d'ordre n*.

2° *Si* P *est un polynome de Poincaré de degré n*, *la fonction* $D_\lambda(P)$, *considérée sur l'ellipsoïde*, *se réduit à une somme de fonction de Lamé d'ordre n*.

Partons en effet de la formule de Green

$$\int [\varphi D_\lambda(\psi) - \psi D_{-\lambda}(\varphi)]\, l\, d\sigma = 0. \tag{7}$$

applicable à deux fonctions quelconques φ et ψ satisfaisant à l'équation de Poincaré, et où l'intégrale est étendue à la surface de l'ellipsoïde. Cette formule se démontre immédiatement si l'on remarque que l'on a

$$\begin{aligned} D_\lambda(\psi) &= l\left[\frac{x}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{y}{b^2}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{z}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{2i\omega}{\lambda}\left(\frac{x}{a^2}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{y}{b^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)\right] \\ &= \alpha\frac{\partial\psi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\psi}{\partial y} + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\gamma\frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{2i\omega}{\lambda}\left(\alpha\frac{\partial\psi}{\partial y} - \beta\frac{\partial\psi}{\partial x}\right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l\, D_{-\lambda}(\varphi) &= l\left[\frac{x}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{y}{b^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{z}{c^2}\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{2i\omega}{\lambda}\left(\frac{x}{a^2}\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \frac{y}{b^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)\right] \\ &= \alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\gamma\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{2i\omega}{\lambda}\left(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial y} - \beta\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right). \end{aligned}$$

Remplaçons alors dans cette formule ψ par P et φ par un polynome de Poincaré quelconque P' de degré *inférieur* à n. Nous aurons

$$\int P' D_\lambda(P)\, l\, d\sigma = \int P D_{-\lambda}(P')\, l d\sigma.$$

Or le second membre de cette équation est nul, puisque le polynome $D_{-\lambda}(P')$, de degré inférieur à n, est, sur l'ellipsoïde, une somme de fonctions de Lamé d'ordre inférieur à n. Le premier membre est donc nul; par suite $D_\lambda(P)$ est, sur la surface, orthogonal à toutes les fonctions de Lamé d'ordre inférieur à n; c'est donc une somme de fonctions de Lamé d'ordre n.

Il résulte de là que si l'on a choisi les $2n+1$ polynomes de Lamé d'ordre n et si l'on appelle $P_1, P_2, \ldots, P_{2n+1}$ les polynomes de Poincaré correspondants, on a, *sur l'ellipsoïde*, des relations de

la forme

$$(8)\qquad D_\lambda(P_i) = h_{i1}^{(n)} P_1 + h_{i2}^{(n)} P_2 + \ldots + h_{i.2n+1}^{(n)} P_{2n+1},$$

où les constantes $h_{ik}^{(n)}$ dépendent de λ : il est du reste évident qu'elles en dépendent *rationnellement*, puisque, d'après leur détermination même, les coefficients de P_i dépendent eux-mêmes rationnellement de λ.

La propriété analogue aurait lieu pour les $D_{-\lambda}(P)$.

3° *Si ψ est une fonction quelconque satisfaisant à l'équation de Poincaré, les constantes de Fourier d'ordre n de* $D_\lambda(\psi)$, *considérée comme fonction de point sur la surface, sont des combinaisons linéaires à coefficients fixes des constantes de Fourier d'ordre n de ψ.*

Il suffit, en effet, d'appliquer la formule (7), en y remplaçant φ par un polynome de Poincaré de degré n. La constante de Fourier correspondante de $D_\lambda(\psi)$, à savoir

$$\int P\, D_\lambda(\psi)\, l\, d\sigma,$$

est égale à

$$\int \psi\, D''_\lambda(P)\, l\, d\sigma,$$

qui, d'après (2°), est une combinaison linéaire des constantes de Fourier d'ordre n de ψ.

D'après cela si, dans le développement, convergent en moyenne, de ψ (considéré sur la surface) en série de fonctions de Lamé, on considère les termes d'ordre n

$$(9)\qquad \psi = \ldots + (c_1 L_1 + c_2 L_2 + \ldots + c_{2n+1} L_{2n+1}) + \ldots,$$

on aura facilement les termes correspondants de $D_\lambda(\psi)$ en prenant le cas particulier où ψ se réduit à

$$\psi = c_1 P_1 + c_2 P_2 + \ldots + c_{2n+1} P_{2n+1}.$$

On a alors, d'après (8),

$$D_\lambda(\psi) = \sum_{i,k}^{1,\ldots,2n+1} c_i h_{ik}^{(n)} P_k = \sum_{i,k}^{1,\ldots,2n+1} c_i h_{ik}^{(n)} L_k.$$

Donc, dans le cas général, la formule (9) entraîne, *sur la surface*,

$$(10)\quad D_\lambda(\psi) = \ldots + \Big[\sum c_i h_{i1}^{n} L_1 + \sum c_i h_{i2}^{n} L_2 + \ldots + \sum c_i h_{i,2n+1}^{(n)} L_{2n+1}\Big] + \ldots.$$

8. Revenons maintenant au problème tel qu'il est énoncé à la fin du n° 5. Nous obtenons, en portant notre attention sur les constantes de Fourier A_k^{n} d'ordre n de la fonction ε, les $2n+1$ relations linéaires et homogènes

$$(11)\quad \begin{cases} (\lambda^2 - 4\omega^2) A_k^{n} = 2\pi \displaystyle\sum_{i=1}^{i=2n+1} h_{ik}^{(n)} \big[H_3 - H_i^{(n)}\big] A_i^{n} \\ (k = 1, 2, \ldots, 2n+1). \end{cases}$$

Les constantes de Fourier de la fonction ε sont donc données par un système d'une infinité d'équations linéaires et homogènes, mais *ce système se décompose en une infinité de systèmes partiels formés chacun d'un nombre fini* $2n+1$ *d'équations au même nombre d'inconnues*.

Les valeurs acceptables de λ s'obtiennent donc en annulant l'un au moins des déterminants de ces systèmes partiels. On peut encore dire que *tous les petits mouvements considérés par Poincaré se ramènent à ceux pour lesquels la distance normale* $l\varepsilon$ *de la surface moyenne à la surface troublée est le produit de* l *par une somme de fonctions de Lamé d'ordre donné* n (¹).

Il y a des cas où le problème peut se décomposer davantage; cela arrive en particulier si, parmi les polynomes de Poincaré d'ordre n, on peut en trouver un certain nombre $r < 2n+1$ tels que chacun des polynomes $D_\lambda(P)$ correspondants soit, sur l'ellipsoïde, une combinaison linéaire de ces r polynomes. Les fonctions de Lamé correspondantes seront dites former un *groupe*. Poincaré a remarqué qu'il en est ainsi pour l'ensemble des polynomes de

(¹) Il faut, provisoirement, tenir compte de la réserve faite au n° 6, relative aux petits mouvements dont la fréquence est supposée réelle et comprise entre -2ω et $+2\omega$.

Lamé d'ordre n qui contiennent z en facteur et pour l'ensemble de ceux qui ne le contiennent pas.

9. Nous dirons que l'ellipsoïde considéré admet la *stabilité ordinaire à la Poincaré* si toutes les équations en λ obtenues par le procédé indiqué au numéro précédent n'admettent que des racines réelles. Il est bien évident que cette condition doit être réalisée pour que la stabilité ordinaire ait lieu ; car l'existence d'une racine imaginaire donnerait un mouvement oscillatoire pour lequel l'écart des molécules de leurs positions moyennes augmenterait indéfiniment, soit pour $t = -\infty$, soit pour $t = +\infty$. On peut, du reste, remarquer que, à toute solution des équations (I), (II), (III) correspond une solution symétrique par rapport au plan des xz et pour laquelle la valeur de λ est simplement changée de signe ([1]). L'hypothèse d'une valeur de λ imaginaire entraînerait donc une solution pour laquelle l'écart augmenterait indéfiniment pour $t = +\infty$, ce qui est incompatible avec la stabilité.

Remarquons que Poincaré n'a pas démontré rigoureusement que l'absence de valeurs imaginaires pour λ entraîne la stabilité ; c'est néanmoins assez vraisemblable si l'on raisonne par analogie avec les systèmes matériels admettant un nombre fini de degrés de liberté.

10. Il semble, à première vue, que la discussion de la stabilité ordinaire à la Poincaré exige l'étude de la réalité des racines d'une infinité d'équations algébriques en λ. Il n'en est rien. Supposons, en effet, que tous les *coefficients de stabilité* $H_3 - H_i^{n}$ d'ordre n soient *positifs*. Cela veut dire, comme on sait, que la stabilité séculaire est assurée si la masse fluide est assujettie à ne prendre que des positions pour lesquelles la surface libre troublée est repérée par rapport à la surface d'équilibre au moyen des seules fonctions de Lamé d'ordre n ; par suite, l'équation en λ correspondant aux constantes de Fourier d'ordre n de ε ne pourra admettre que des racines réelles, et il sera inutile de la considérer.

([1]) Dans le cas des systèmes matériels à un nombre fini de degrés de liberté et soumis à des forces gyroscopiques, la propriété des équations en λ d'admettre des racines égales et opposées est générale.

Il en serait de même si les coefficients de stabilité relatifs à un *groupe* de fonctions de Lamé étaient tous positifs. Ce groupe n'aurait pas à être étudié.

Remarquons enfin que, si l'on suppose le centre de gravité de la masse fixe, les fonctions de Lamé d'ordre 0 et 1 n'ont pas à être envisagées.

II. — Petits mouvements et stabilité des ellipsoïdes de Maclaurin.

11. Nous allons appliquer la théorie générale de Poincaré à l'étude complète de la stabilité ordinaire des ellipsoïdes de Maclaurin.

Dans le cas des ellipsoïdes de révolution, de grandes simplifications s'introduisent [1]. *On peut, en effet, choisir les différents polynomes de Poincaré* P *de manière que le polynome* $D_\lambda(P)$ *correspondant à chacun d'eux ne diffère de* P, *sur l'ellipsoïde, que par un facteur constant.* Si l'on admet pour un instant qu'il en est ainsi, on voit qu'à *chaque* polynome de Lamé correspondra une équation en λ.

Pour démontrer la propriété énoncée rappelons que, dans le cas des ellipsoïdes de révolution, les polynomes (harmoniques) de Lamé peuvent toujours être supposés de la forme

$$L = (x \pm iy)^p z^q \prod_{i=1}^{i=r} \left(\frac{x^2+y^2}{a^2-h_i} + \frac{z^2}{c^2+h_i} - 1 \right) \qquad (q = 0 \text{ ou } 1),$$

les facteurs du second degré étant complètement déterminés quand on se donne p, q et le degré total $n = p + q + 2r$. Le polynome de Poincaré correspondant sera alors de la forme

$$P = L + (x \pm iy)^p z^q \left(\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 \right) Q(x^2+y^2, z^2),$$

où Q désigne un polynome de degré $r-1$ en x^2+y^2 et z^2 : on se rend compte immédiatement, en effet, que, pour déterminer les coefficients de ce polynome inconnu, il y a exactement autant d'équations que d'inconnues. Si l'on prend alors un polynome de

---

[1] *Cf.* P., p. 364, où des simplifications un peu moins étendues sont indiquées.

Poincaré qui, d'après ce qui précède, est de la forme

$$P = (x \pm iy)^p z^q \overline{Q}(x^2 + y^2, z^2),$$

on constate facilement que $D_\lambda(P)$ est d'une forme analogue et que, par suite, *sur l'ellipsoïde*, son expression en fonction linéaire des polynomes de Poincaré de même degré ne peut contenir qu'un seul terme, celui qui est relatif au polynome P lui-même.

Par exemple, le polynome $P = (x \pm iy)^p$ est un polynome de Poincaré; on trouve immédiatement

$$(12) \qquad D_\lambda(P) = \frac{\lambda \pm 2\omega}{\lambda a^2} p(x + iy)^p = \frac{\lambda \pm 2\omega}{\lambda a^2} p P.$$

On trouve de même

$$(13) \qquad D_\lambda[(x \pm iy)^p z] = \left(\frac{\lambda \pm 2\omega}{\lambda a^2} + \frac{\lambda^2 - 4\omega^2}{\lambda^2 c^2}\right)(x \pm iy)^p z.$$

Des cinq polynomes de Poincaré du deuxième degré, quatre rentrent dans les types précédents, à savoir :

$$P_4 = (x + iy)z, \quad P_5 = (x - iy)z, \quad P_6 = (x + iy)^2, \quad P_7 = (x - iy)^2.$$

Le cinquième se calcule facilement; on peut prendre

$$P_8 = (\lambda^2 - 4\omega^2)\left(x^2 + y^2 - \frac{2}{3}a^2\right) - 2\lambda^2\left(z^2 - \frac{1}{3}c^2\right);$$

on constate, en effet, d'abord que ce polynome satisfait à l'équation de Poincaré, en second lieu que, sur l'ellipsoïde, il se réduit à une fonction de Lamé, à savoir [1] :

$$\left(\frac{1}{3}\frac{\lambda^2 - 4\omega^2}{a^2} + \frac{2}{3}\frac{\lambda^2}{c^2}\right)\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{2z^2}{c^2}\right).$$

Le calcul de $D_\lambda(P_8)$ donne

$$(13) \quad D_\lambda(P_8) = 2(\lambda^2 - 4\omega^2)\left(\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{2z^2}{c^2}\right) = \frac{6(\lambda^2 - 4\omega^2)}{(\lambda^2 - 4\omega^2)a^2 + 2\lambda^2 c^2} P_8.$$

12. Il est facile de former les équations en λ correspondant aux différents polynomes de Poincaré du second degré [2]. D'après

---

[1] C'est bien une fonction de Lamé parce que, sur la sphère homographique, elle se réduit, à un facteur constant près, au polynome *harmonique homogène* $\overline{x}^2 + \overline{y}^2 - 2\overline{z}^2$.

[2] *Cf.* P., p. 374.

l'énoncé de la fin du n° 5, on doit avoir, sur l'ellipsoïde, pour chaque polynome P_k,

$$\frac{D_\lambda(P_k)}{P_k} = \frac{\lambda^2 - 4\omega^2}{2\pi(H_3 - H_k)}. \tag{14}$$

Par suite, les équations cherchées sont : pour P_4,

$$\lambda^2(\lambda - 2\omega) = 2\pi(H_3 - H_4)\left(\frac{\lambda}{a^2} + \frac{\lambda - 2\omega}{c^2}\right);$$

pour P_6,

$$\lambda(\lambda - 2\omega) = 4\pi\frac{H_3 - H_6}{a^2};$$

pour P_8,

$$(\lambda^2 - 4\omega^2)a^2 + 2\lambda^2 c^2 = 12\pi(H_3 - H_8).$$

Les équations relatives à P_5 et P_7 se déduisent de celles relatives à P_4 et P_6 en changeant λ en $-\lambda$.

13. Il est intéressant d'étudier les petits mouvements correspondants, au moins quand λ est réel. Prenons d'abord pour ψ le polynome P_4 multiplié par un facteur constant k très petit, que nous pouvons toujours supposer réel en changeant, au besoin, l'origine du temps. De la formule

$$\psi = k(x + iy)z,$$

nous tirons, d'après (I'),

$$\xi = \frac{k}{\lambda(\lambda - 2\omega)}z,$$

$$\eta = \frac{ik}{\lambda(\lambda - 2\omega)}z,$$

$$\zeta = \frac{k}{\lambda^2}(x + iy),$$

$$\varepsilon = \frac{k}{2\pi(H_3 - H_4)}(x + iy)z.$$

Il en résulte, pour les équations du mouvement d'une molécule fluide,

$$X - x = \frac{k}{\lambda(\lambda - 2\omega)}z\cos\lambda t,$$

$$Y - y = \frac{k}{\lambda(\lambda - 2\omega)}z\sin\lambda t,$$

$$Z - z = \frac{k}{\lambda^2}(x\cos\lambda t - y\sin\lambda t).$$

et, à la surface, l'épaisseur du bourrelet est le produit de l par la quantité

$$\frac{x}{a^2}(X - x) + \frac{y}{b^2}(Y - y) + \frac{z}{c^2}(Z - z) = \frac{k}{2\pi(H_3 - H_4)}(xz\cos\lambda t - yz\sin\lambda t).$$

Les différentes molécules décrivent des ellipses, à l'exception des molécules équatoriales ($z = 0$) qui ont un mouvement vibratoire rectiligne parallèle à Oz; les molécules dont la position moyenne est sur l'axe sont animées d'un mouvement circulaire uniforme autour de Oz. Enfin, en apparence, la surface libre semble tourner avec une vitesse angulaire λ autour de Oz en conservant sa forme et sa grandeur, qui sont celles de l'ellipsoïde d'équilibre lui-même [1].

Prenons maintenant

$$\psi = \frac{1}{2}k(x + iy)^2;$$

nous obtenons

$$\xi = \frac{k}{\lambda(\lambda - 2\omega)}(x + iy),$$

$$\eta = \frac{ik}{\lambda(\lambda - 2\omega)}(x + iy),$$

$$\zeta = 0,$$

$$\varepsilon = \frac{k}{\lambda(\lambda - 2\omega)a^2}(x + iy)^2.$$

En posant

$$\frac{k}{\lambda(\lambda - 2\omega)} = h,$$

on en déduit, pour le mouvement d'une molécule,

$$X - x = h(\quad x\cos\lambda t - y\sin\lambda t),$$
$$Y - y = h(-y\cos\lambda t - x\sin\lambda t),$$
$$Z - z = 0;$$

de plus, l'épaisseur du bourrelet est le produit de l par la quan-

---

(1) L'équation de la surface libre est

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - \frac{k}{\pi(H_3 - H_4)}(XZ\cos\lambda t - YZ\sin\lambda t) = 1.$$

tité

$$\frac{h}{a^2}[(x^2-y^2)\cos\lambda t - 2xy\sin\lambda t].$$

Chaque molécule décrit, dans un plan perpendiculaire à Oz, une circonférence dont le rayon est proportionnel à la distance moyenne de la molécule à l'axe. La surface libre est un ellipsoïde à trois axes inégaux admettant Oz pour axe et qui semble tourner sans se déformer autour de Oz avec la vitesse angulaire $\frac{\lambda}{2}$.

Prenons enfin

$$\psi = \frac{1}{2}hP_8 = \frac{1}{2}h(\lambda^2-4\omega^2)\left(x^2+y^2-\frac{2}{3}a^2\right) - h\lambda^2\left(z^2-\frac{1}{3}c^2\right);$$

nous trouvons

$$\xi = h\left(x - \frac{2i\omega}{\lambda}y\right),$$

$$\eta = h\left(y + \frac{2i\omega}{\lambda}x\right),$$

$$\zeta = -2hz,$$

$$\varepsilon = h\left(\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{2z^2}{c^2}\right).$$

Les équations du mouvement d'une molécule sont

$$X - x = h\left(x\cos\lambda t + \frac{2\omega}{\lambda}y\sin\lambda t\right),$$

$$Y - y = h\left(y\cos\lambda t - \frac{2\omega}{\lambda}x\sin\lambda t\right),$$

$$Z - z = -2hz\cos\lambda t,$$

et l'épaisseur du bourrelet est le produit de l par

$$h\left(\frac{x^2+y^2}{a^2} - \frac{2z^2}{c^2}\right)\cos\lambda t.$$

La surface libre est un ellipsoïde de révolution qui oscille avec la période $\frac{2\pi}{\lambda}$, en partie à l'intérieur, en partie à l'extérieur de l'ellipsoïde donné [1].

---

[1] Son équation est

$$\frac{X^2+Y^2}{a^2}(1-2h\cos\lambda t) + \frac{Z^2}{c^2}(1+4h\cos\lambda t) - 1 = 0.$$

14. Arrivons maintenant à la discussion de la stabilité ordinaire des ellipsoïdes de Maclaurin. On sait que les coefficients de stabilité relatifs aux polynomes de Lamé qui contiennent z en facteur sont toujours positifs. Tous les autres peuvent s'annuler pour un aplatissement convenablement choisi. Si l'on suit la série des ellipsoïdes de Maclaurin en partant de la sphère, les polynomes de Lamé dont les coefficients de stabilité, d'abord tous positifs, deviennent successivement négatifs, se présentent dans l'ordre suivant :

1° Les polynomes $(x \pm iy)^2$ dont le coefficient de stabilité, en s'annulant, donne l'ellipsoïde de bifurcation de Jacobi

$$\left(l = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{c} = 1,395\right);$$

2° Les polynomes $(x \pm iy)^3$, dont le coefficient de stabilité s'annule pour $l = 2,05$;

3° Le polynome

$$L_8 = x^2 + y^2 - 2z^2 - 2\frac{a^2 - c^2}{3},$$

dont le coefficient de stabilité, en s'annulant, donne l'ellipsoïde de vitesse maxima ($l = 2,53$);

4° Les polynomes $(x \pm iy)^4$, $(x \pm iy)^5$, $(x \pm iy)^6$, ..., dans l'ordre des exposants croissants : leurs coefficients de stabilité s'annulent pour $l = 2,59$, $l = 3,05$, $l = 3,20$, ... ;

5° Les polynomes

$$(x \pm iy)\left(x^2 + y^2 - 4z^2 - 4\frac{a^2 - c^2}{5}\right) \qquad (l = 3,95)$$

et ainsi de suite.

La première équation en λ à discuter est celle qui est relative au polynome $(x + iy)^2$; nous verrons que la réalité de ses racines a lieu lorsque l'aplatissement est inférieur à une certaine limite ; les équations en λ relatives aux polynomes dont les coefficients de stabilité sont encore positifs pour cet aplatissement limite n'auront pas à être envisagées, puisque, en ce qui concerne ces polynomes, la stabilité est d'ores et déjà assurée par le théorème de Lejeune-Dirichlet. Nous n'aurons donc qu'un nombre fini d'équations en λ

à considérer. Nous verrons qu'en réalité, ces équations en λ auront d'elles-mêmes toutes leurs racines réelles.

15. Nous désignerons par

$$\frac{x^2+y^2}{a^2+\rho}+\frac{z^2}{c^2+\rho}-1=0$$

l'équation des ellipsoïdes homofocaux de l'ellipsoïde donné. Les fonctions de Lamé R correspondant aux polynomes de Lamé que nous aurons à considérer sont : pour

$$\mathrm{L}=(x+iy)^p, \qquad \mathrm{R}=(\rho+a^2)^{\frac{p}{2}};$$

pour

$$\mathrm{L}=x^2+y^2-2z^2-2\frac{a^2-c^2}{3}, \qquad \mathrm{R}=\rho-\frac{a^2+2c^2}{3}.$$

Pour une fonction de Lamé R donnée, la quantité désignée au n° 4 par H est

$$\mathrm{H}=a^2c\int_0^\infty \frac{\mathrm{R}^2(\rho)}{\mathrm{R}^2(t)}\,\frac{dt}{(a^2+t)\sqrt{c^2+t}}.$$

Pour les premières fonctions de Lamé

$$\mathrm{R}_1=\mathrm{R}_2=\sqrt{\rho+a^2}, \qquad \mathrm{R}_3=\sqrt{\rho+c^2}.$$

on a

$$\mathrm{H}_1=\mathrm{H}_2=a^2c\int_0^\infty \frac{a^2\,dt}{(a^2+t)^2\sqrt{c^2+t}},$$

$$\mathrm{H}_3=a^2c\int_0^\infty \frac{c^2\,dt}{(c^2+t)(a^2+t)\sqrt{c^2+t}}.$$

Rappelons, enfin, la formule qui donne la vitesse angulaire ω :

$$\omega^2=2\pi\frac{\mathrm{H}_1-\mathrm{H}_3}{a^2}=2\pi c(a^2-c^2)\int_0^\infty \frac{t\,dt}{(a^2+t)^2(c^2+t)^{\frac{3}{2}}}.$$

16. Cela posé, l'équation en λ relative au polynome de Poincaré $(x+iy)^2$, qui correspond à la fonction de Lamé

$$\mathrm{R}_6=\rho+a^2,$$

est (n° 12)

$$\lambda(\lambda-2\omega)=4\pi\frac{\mathrm{H}_3-\mathrm{H}_6}{a^2}$$

ou

$$(\lambda - \omega)^2 = \omega^2 + 4\pi \frac{H_3 - H_6}{a^2} = 2\pi \frac{H_1 + H_3 - 2H_6}{a^2}.$$

Par suite, *une première condition de stabilité est donnée par l'inégalité* (¹)

(15) $$H_1 + H_3 - 2H_6 > 0$$

ou, en supprimant le facteur $a^2 c$,

$$\int_0^\infty \left[\frac{a^2}{a^2+t} + \frac{c^2}{c^2+t} - 2\frac{a^4}{(a^2+t)^2}\right] \frac{dt}{(a^2+t)\sqrt{c^2+t}} > 0.$$

Posons, comme d'habitude (²),

$$a^2 = c^2(1+l^2).$$

Le calcul donne

(16) $$7l^3 + 3l - (l^4 + 8l^2 + 3)\,\text{arc tang}\, l > 0.$$

Le premier membre de cette inégalité, nul pour $l = 0$, devient d'abord positif, s'annule pour $l = 3{,}1415$ et devient ensuite négatif.

La première condition de stabilité est donc

$$l > 3{,}1415;$$

pour l'ellipsoïde limite $\mathcal{E}$, on a

$$\frac{c}{a} = 0{,}303,$$

ce qui correspond à un aplatissement de 0,697 et à une excentricité de 0,953.

Le calcul de la vitesse angulaire de rotation correspondante donne (³)

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = \frac{4l^2}{l^4 + 8l^3 + 3} = 0{,}2201.$$

(¹) Cette inégalité, sous une forme un peu moins simple, est donnée par Poincaré, p. 376.

(²) P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. IV; Paris, Gauthier-Villars (1921), p. 49.

(³) En tenant compte de la formule $\frac{\omega^2}{2\pi} = \frac{(3+l^2)\,\text{arc tang}\, l - 3l}{l^3}$ (P. Appell, *loc. cit.*, p. 50).

17. Il y a maintenant à former les équations en λ relatives aux fonctions de Lamé pour lesquelles le coefficient de stabilité a une valeur négative quand on donne à l la valeur $3,1415$ correspondant à l'ellipsoïde limite $\mathcal{E}$. Il en est ainsi des quatre fonctions de Lamé

$$R_9 = (\rho + a^2)^{\frac{3}{2}}, \qquad R_8 = \rho + \frac{a^2 + 2c^2}{3},$$

$$R_{10} = (\rho + a^2)^2, \qquad R_{11} = \rho(+ a^2)^{\frac{5}{2}},$$

correspondant respectivement aux polynomes de Poincaré

$$P_9 = (x \pm iy)^3, \qquad P_8 = (\lambda^2 - 4\omega^2)\left(x^2 + y^2 - \frac{2}{3}a^2\right) - 2\lambda^2\left(z^2 - \frac{1}{3}c^2\right),$$
$$P_{10} = (x \pm iy)^4, \qquad P_{11} = (x \pm iy)^5.$$

L'équation en λ relative à P_8 a déjà été formée (n° **12**); elle s'écrit

$$\begin{aligned}\lambda^2(a^2 + 2c^2) &= 4\omega^2 a^2 + 12\pi(H_3 - H_8)\\ &= 8\pi(H_1 - H_3) + 12\pi(H_3 - H_8) = 4\pi(2H_1 + H_3 - 3H_8).\end{aligned}$$

La condition nouvelle de stabilité fournie par cette équation est donc

$$(17) \qquad 2H_1 + H_3 - 3H_8 > 0.$$

Or elle est remplie d'elle-même, car on peut l'écrire

$$(H_1 - H_8) + (H_1 + H_3 - 2H_6) + 2(H_6 - H_8) > 0;$$

des trois termes qui constituent le premier membre, le second est positif par hypothèse, le premier est positif parce que le quotient

$$\frac{R_8}{R_1} = \sqrt{\frac{\rho + \frac{a^2 + 2c^2}{3}}{\rho + a^2}} \sqrt{\rho + \frac{a^2 + 2c^2}{3}}$$

va en croissant, le troisième est positif parce que le quotient

$$\frac{R_8}{R_6} = \frac{\rho + \frac{a^2 + 2c^2}{3}}{\rho + a^2}$$

va aussi en croissant. L'inégalité est donc vérifiée d'elle-même.

Restent les équations en λ relatives aux polynomes

$$(x \pm iy)^p \qquad (p = 3, 4, 5).$$

Or, on a vu (n° 11) qu'en posant

$$P = (x + iy)^p,$$

on a

$$D_\lambda(P) = \frac{\lambda + 2\omega}{\lambda a^2} p P;$$

l'équation en λ correspondante est donc

$$\frac{\lambda + 2\omega}{\lambda a^2} p = \frac{\lambda^2 - 4\omega^2}{2\pi(H_3 - H)},$$

ou

$$\lambda(\lambda - 2\omega) = 2p\pi \frac{H_3 - H}{a^2},$$

ou

$$(\lambda - \omega)^2 = 2\pi \frac{H_1 - H_3}{a^2} + 2\pi p \frac{H_3 - H}{a^2};$$

$$(\lambda - \omega)^2 = 2\pi \frac{H_1 + (p-1)H_3 - pH}{a^2}.$$

La condition de stabilité est donc

$$H_1 + (p-1)H_3 - pH > 0. \tag{18}$$

En appliquant cette formule aux fonctions de Lamé

$$R_9 = (\rho + a^2)^{\frac{3}{2}}, \qquad R_{10} = (\rho + a^2)^2, \qquad R_{11} = (\rho + a^2)^{\frac{5}{2}},$$

nous avons donc à former les trois inégalités

$$H_1 + 2H_3 - 3H_9 > 0, \qquad H_1 + 3H_3 - 4H_{10} > 0, \qquad H_1 + 4H_3 - 5H_{11} > 0;$$

ou encore

$$\int_0^\infty \left[\frac{a^2}{a^2 + t} + \frac{2c^2}{c^2 + t} - \frac{3a^6}{(a^2 + t)^3}\right] \frac{dt}{(a^2 + t)\sqrt{c^2 + t}} > 0,$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{a^2}{a^2 + t} + \frac{3c^2}{c^2 + t} - \frac{4a^8}{(a^2 + t)^4}\right] \frac{dt}{(a^2 + t)\sqrt{c^2 + t}} > 0,$$

$$\int_0^\infty \left[\frac{a^2}{a^2 + t} + \frac{4c^2}{c^2 + t} - \frac{5a^{10}}{(a^2 + t)^5}\right] \frac{dt}{(a^2 + t)\sqrt{c^2 + t}} > 0.$$

Le calcul donne respectivement les trois inégalités

$$15\,l + 40\,l^3 + 57\,l^5 - (15 + 45\,l^2 + 69\,l^4 + 7\,l^6)\operatorname{arc\,tang} l > 0;$$

$$105\,l + 385\,l^3 + 511\,l^5 + 519\,l^7 \\ - 3(35 + 140\,l^2 + 210\,l^4 + 220\,l^6 + 19\,l^8)\operatorname{arc\,tang} l > 0;$$

$$315\,l + 1470\,l^3 + 2688\,l^5 + 2370\,l^7 + 1861\,l^9 \\ - (315 + 1575\,l^2 + 3150\,l^4 + 3150\,l^6 + 2471\,l^8 + 187\,l^{10})\operatorname{arc\,tang} l > 0.$$

Chacun des trois premiers membres s'annule une fois et une fois seulement pour l positif. Si l'on veut vérifier les inégalités pour la valeur limite $l = 3,1415$, il suffit de les vérifier en y remplaçant arc tang l par sa valeur tirée de l'équation (16)

$$\operatorname{arc\,tang} l = \frac{3\,l + 7\,l^3}{3 + 8\,l^2 + l^4};$$

on obtient ainsi les inégalités

$$4\,l^6 - 4\,l^4 - 8\,l^2 - 15 > 0;$$

$$15\,l^6 - 16\,l^4 - 45\,l^2 - 14 > 0;$$

$$69\,l^8 - 75\,l^6 - 279\,l^4 - 177\,l^2 - 167 > 0;$$

elles ont manifestement lieu pour $l = 3,1415$.

En conclusion, *les ellipsoïdes de Maclaurin admettent la stabilité ordinaire pour tout aplatissement inférieur à 0,697. En suivant les ellipsoïdes de Maclaurin depuis la sphère jusqu'à l'ellipsoïde limite $\mathcal{E}$, on rencontre quatre ellipsoïdes de bifurcation successifs; on rencontre, en outre, l'ellipsoïde de vitesse de rotation maxima. Pour l'ellipsoïde limite $\mathcal{E}$, la vitesse angulaire de rotation est donnée par* $\frac{\omega^2}{2\pi} = 0,2201$.

III. — Petits mouvements des ellipsoïdes de Jacobi.

18. Nous ne discuterons pas la stabilité ordinaire des ellipsoïdes de Jacobi; nous nous contenterons d'étudier les petits mouvements pour lesquels la surface libre reste ellipsoïdale. La fonction ψ est alors un polynome du second degré satisfaisant à l'équation de Poincaré et se réduisant sur l'ellipsoïde à une somme de fonctions de Lamé du second ordre; cela donne, sur la sphère homographique, une fonction sphérique du second ordre.

Ici les polynomes de Lamé se décomposent en deux groupes, celui des polynomes qui contiennent z en facteur, celui des polynomes qui ne le contiennent pas.

Occupons-nous d'abord du premier groupe. On aura évidemment, dans ce premier cas,

$$\psi = \mathrm{A}xz + \mathrm{B}yz,$$

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_\lambda\psi = & \left[\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{4\omega^2}{\lambda^2 c^2}\right)\mathrm{A} - \frac{2i\omega}{\lambda a^2}\mathrm{B}\right]xz \\ & + \left[\frac{2i\omega}{\lambda b^2}\mathrm{A} + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{4\omega^2}{\lambda^2 c^2}\right)\mathrm{B}\right]yz. \end{aligned}$$

Les polynomes xz et yz sont les polynomes de Lamé L_4 et L_5 correspondant aux fonctions de Lamé

$$\mathrm{R}_4 = \sqrt{(a^2-\rho)(c^2-\rho)}, \qquad \mathrm{R}_5 = \sqrt{(b^2-\rho)(c^2-\rho)},$$

et l'on a

$$\mathrm{H}_4 = abc\int_0^\infty \frac{a^2c^2}{(a^2+t)(c^2+t)}\,\frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}},$$

$$\mathrm{H}_5 = abc\int_0^\infty \frac{b^2c^2}{(b^2+t)(c^2+t)}\,\frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}.$$

L'énoncé de la fin du n° 5 conduit aux deux équations

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{4\omega^2}{\lambda^2 c^2}\right)\mathrm{A} - \frac{2i\omega}{\lambda a^2}\mathrm{B}}{\mathrm{A}} &= \frac{(\lambda^2 - 4\omega^2)}{2\pi(\mathrm{H}_3 - \mathrm{H}_4)}, \\ \frac{\frac{2i\omega}{\lambda b^2}\mathrm{A} + \left(\frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} - \frac{4\omega^2}{\lambda^2 c^2}\right)\mathrm{B}}{\mathrm{B}} &= \frac{\lambda^2 - 4\omega^2}{2\pi(\mathrm{H}_3 - \mathrm{H}_5)}. \end{aligned}\right.$$

L'élimination de A et de B donne l'équation en λ cherchée qui, après simplification et division par $\lambda^2 - 4\omega^2$, devient du troisième degré en λ^2.

On est assuré d'avance de la réalité des racines de cette équation puisque les coefficients de stabilité $\mathrm{H}_3 - \mathrm{H}_4$, $\mathrm{H}_3 - \mathrm{H}_5$ sont toujours positifs.

A chaque racine de l'équation en λ^2 correspond, d'après (19), une valeur déterminée, *purement imaginaire*, de $\frac{\mathrm{B}}{\mathrm{A}}$. On peut donc supposer, en choisissant convenablement l'origine du temps,

que la fonction ε est de la forme

$$\varepsilon = \alpha xz + i\beta yz,$$

α et β étant réels et très petits. Cela donne, pour l'équation de la surface libre,

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} - 2\alpha XZ \cos\lambda t + 2\beta YZ \sin\lambda t - 1 = 0.$$

On voit immédiatement qu'aux quantités près du second ordre, cette surface est *égale* à l'ellipsoïde donné. La masse fluide *semble* donc se mouvoir comme un corps solide. En particulier, le petit axe de l'ellipsoïde est donné à chaque instant par les équations

$$(a^2 - c^2)X + \alpha a^2 c^2 Z \cos\lambda t = 0,$$
$$(b^2 - c^2)Y - \beta b^2 c^2 Z \sin\lambda t = 0;$$

il décrit, par rapport aux axes de coordonnées choisis, le cône du second ordre

$$\frac{X^2}{\alpha^2\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{c^2}\right)^2} + \frac{Y^2}{\beta^2\left(\frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2}\right)^2} - Z^2 = 0.$$

19. Les petits mouvements du second groupe font intervenir les trois autres polynomes de Lamé

$$L_6 = xy, \qquad L_7 = \frac{x^2}{a^2+\alpha_1} + \frac{y^2}{b^2+\alpha_1} + \frac{z^2}{c^2+\alpha_1} - 1,$$
$$L_8 = \frac{x^2}{a^2+\alpha_2} + \frac{y^2}{b^2+\alpha_2} + \frac{z^2}{c^2+\alpha_2} - 1.$$

correspondant aux fonctions de Lamé

$$R_6 = \sqrt{(a^2+\rho)(b^2+\rho)}, \qquad R_7 = \rho - \alpha_1, \qquad R_8 = \rho - \alpha_2;$$

α_1 et α_2 sont les racines de l'équation du second degré

$$\frac{1}{a^2+\alpha} + \frac{1}{b^2+\alpha} + \frac{1}{c^2+\alpha} = 0;$$

nous supposerons α_1 compris entre $-a^2$ et $-b^2$, α_2 compris entre $-b^2$ et $-c^2$. On a, comme on sait,

$$H_6 = H_3,$$

puis

$$H_7 = abc\int_0^\infty \frac{\alpha_1^2}{(t-\alpha_1)^2}\,\frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}},$$

$$H_8 = abc\int_0^\infty \frac{\alpha_2^2}{(t-\alpha_2)^2}\,\frac{dt}{\sqrt{(a^2+t)(b^2+t)(c^2+t)}}.$$

Rappelons enfin qu'on a toujours

$$H_3 - H_7 < 0, \qquad H_3 - H_8 > 0.$$

Comme $H_3 - H_6 = 0$, la fonction ψ ne dépendra pas du polynome de Poincaré P_6 correspondant au polynome de Lamé L_6. Par suite, comme on le voit facilement, ψ sera de la forme [1]

(20) $$\psi = \frac{1}{2}A\left(x^2 - \frac{a^2}{3}\right) - \frac{1}{2}B\left(y^2 - \frac{b^2}{3}\right) - \frac{1}{2}C\left(z^2 - \frac{c^2}{3}\right).$$

Les coefficients constants A, B, C satisfont en premier lieu à l'équation

(21) $$\lambda^2 A + \lambda^2 B + (\lambda^2 - 4\omega^2)C = 0$$

obtenue en exprimant que ψ satisfait à l'équation de Poincaré. Ils satisfont aussi à deux autres équations obtenues de la manière suivante :

On a

$$D_\lambda(\psi) = A\frac{x^2}{a^2} + B\frac{y^2}{b^2} + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)C\frac{z^2}{c^2} - \frac{2i\omega}{\lambda}\left(\frac{B}{a^2} - \frac{A}{b^2}\right)xy.$$

La condition énoncée à la fin du n° 5 s'écrit alors

$$\frac{\int_{(E)} L_7 D_\lambda(\psi)\, l\, d\sigma}{\int_{(E)} L_7 \psi\, l\, d\sigma} = \frac{\lambda^2 - 4\omega^2}{2\pi(H_3 - H_7)}, \qquad \frac{\int_{(E)} L_8 D_\lambda(\psi)\, l\, d\sigma}{\int_{(E)} L_8 \psi\, l\, d\sigma} = \frac{\lambda^2 - 4\omega^2}{2\pi(H_3 - H_8)};$$

ce sont ces équations développées et simplifiées qui fourniront deux nouvelles équations linéaires et homogènes en A, B, C.

Pour faire le calcul on peut considérer la sphère homographique

---

[1] Cette forme est choisie par la condition que, sur la sphère homographique de l'ellipsoïde, ψ se réduise à un polynome homogène et harmonique du second degré (*cf.* ci-après, n° 22).

de l'ellipsoïde, par la transformation

$$x = a\bar{x}, \qquad y = b\bar{y}, \qquad z = c\bar{z};$$

$l\,d\sigma$ devient alors, à un facteur constant près, l'élément de surface $d\bar{\sigma}$ de la sphère; quant aux polynomes L_7, L_8, ψ, $D_\lambda(\psi)$, ils deviennent sur la sphère

$$L_7 = \frac{\bar{x}^2}{a^2+\alpha_1} + \frac{\bar{y}^2}{b^2+\alpha_1} + \frac{\bar{z}^2}{c^2+\alpha_1}, \qquad L_8 = \frac{\bar{x}^2}{a^2+\alpha_2} + \frac{\bar{y}^2}{b^2+\alpha_2} + \frac{\bar{z}^2}{c^2+\alpha_2},$$

$$\psi = \frac{1}{6}A\,a^2(2\bar{x}^2 - \bar{y}^2 - \bar{z}^2) + \frac{1}{6}B\,b^2(-\bar{x}^2 + 2\bar{y}^2 - \bar{z}^2)$$
$$+ \frac{1}{6}C\,c^2(-\bar{x}^2 - \bar{y}^2 + 2\bar{z}^2),$$

$$D_\lambda(\psi) = A\bar{x}^2 + B\bar{y}^2 + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)C\bar{z}^2 - \frac{2i\omega}{\lambda}\left(B\frac{b}{a} - A\frac{a}{b}\right)\bar{x}\bar{y}.$$

Les intégrales à calculer porteront sur des polynomes homogènes et du quatrième degré en $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. Les termes non carrés parfaits ne donneront rien : quant aux autres, leur calcul exact est inutile; il suffit de remarquer qu'on a

$$\int \bar{x}^4\, d\bar{\sigma} = \int \bar{y}^4\, d\bar{\sigma}$$
$$= \int \bar{z}^4\, d\bar{\sigma} = 3\int \bar{y}^2\bar{z}^2\, d\bar{\sigma} = 3\int \bar{z}^2\bar{x}^2\, d\bar{\sigma} = 3\int \bar{x}^2\bar{y}^2\, d\bar{\sigma}.$$

On obtient ainsi, sans difficulté, les relations

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\dfrac{A}{a^2+\alpha_1} + \dfrac{B}{b^2+\alpha_1} + \left(1 - \dfrac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\dfrac{C}{c^2+\alpha_1}}{\dfrac{A a^2}{a^2+\alpha_1} + \dfrac{B b^2}{b^2+\alpha_1} + \dfrac{C c^2}{c^2+\alpha_1}} = \frac{\lambda^2 - 4\omega^2}{4\pi(H_3 - H_7)},\\
&\frac{\dfrac{A}{a^2+\alpha_2} + \dfrac{B}{b^2+\alpha_2} + \left(1 - \dfrac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\dfrac{C}{c^2+\alpha_2}}{\dfrac{A a^2}{a_2+\alpha_2} + \dfrac{B b^2}{b^2+\alpha_2} + \dfrac{C c^2}{c^2+\alpha_2}} = \frac{\lambda^2 - 4\omega^2}{4\pi(H_3 - H_8)}.
\end{aligned}\right.$$

Les trois équations linéaires (21) et (22) conduisent à l'équation en λ cherchée

$$(23)\quad \begin{vmatrix}
1 & 1 & 1\\
\dfrac{4\pi(H_3 - H_7) - (\lambda^2 - 4\omega^2)a^2}{a^2+\alpha_1} & \dfrac{4\pi(H_3 - H_7) - (\lambda^2 - 4\omega^2)b^2}{b^2+\alpha_1} & \dfrac{4\pi(H_3 - H_7) - \lambda^2 c^2}{c^2+\alpha_1}\\
\dfrac{4\pi(H_3 - H_8) - (\lambda^2 - 4\omega^2)a^2}{a^2+\alpha_2} & \dfrac{4\pi(H_3 - H_8) - (\lambda^2 - 4\omega^2)b^2}{b^2+\alpha_2} & \dfrac{4\pi(H_3 - H_8) - \lambda^2 c^2}{c^2+\alpha_2}
\end{vmatrix} = 0.$$

C'est une équation bicarrée. On sait d'avance qu'elle a toutes ses racines réelles, puisque les ellipsoïdes de Jacobi jouissent de la stabilité *séculaire* pour toute déformation qui conserve la forme ellipsoïdale de la surface libre. Du reste, la réalité des racines devient évidente si l'on met l'équation (23) sous la forme suivante, à laquelle on arrive par quelques transformations de calcul :

$$\frac{-4\omega^2 c^2(a^2+b^2+2\alpha_1)}{\alpha_1(\lambda^2-4\omega^2)+4\pi(\mathrm{H}_3-\mathrm{H}_7)} + \frac{4\omega^2 c^2(a^2+b^2+2\alpha_2)}{\alpha_2(\lambda^2-4\omega^2)+4\pi(\mathrm{H}_3-\mathrm{H}_8)} + 3(\alpha_1-\alpha_2) = 0.$$

Cette équation est de la forme

(24) $$\frac{\mathrm{P}}{\lambda^2-p} + \frac{\mathrm{Q}}{\lambda^2-q} - 1 = 0,$$

où P et Q sont des coefficients constants positifs, p et q des constantes positives [1] définies par

$$p = 4\omega^2 - 4\pi\frac{\mathrm{H}_3-\mathrm{H}_7}{\alpha_1}, \qquad q = 4\omega^2 - 4\pi\frac{\mathrm{H}_3-\mathrm{H}_8}{\alpha_2}.$$

L'équation (24) admet évidemment en λ^2 une racine réelle comprise entre p et q et une racine réelle supérieure à q.

L'équation de la surface libre est facile à obtenir. On voit d'abord, d'après (21) et (22), que les rapports mutuels de A, B, C sont réels. La fonction ε peut donc être ramenée, par un choix convenable de l'origine du temps, à la forme

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2) - i\,\delta xy \qquad (a^2\alpha + b^2\beta + c^2\gamma = 0),$$

avec des coefficients réels (et très petits) α, β, γ, δ. Par suite, l'équation cherchée est

$$\frac{\mathrm{X}^2}{a^2} + \frac{\mathrm{Y}^2}{b^2} + \frac{\mathrm{Z}^2}{c^2} - (\alpha\mathrm{X}^2 + \beta\mathrm{Y}^2 + \gamma\mathrm{Z}^2)\cos\lambda t - 2\,\delta\mathrm{XY}\sin\lambda t = 0.$$

---

(1) La quantité p est positive, parce qu'on a

$$\omega^2 = 2\pi\frac{\mathrm{H}_1-\mathrm{H}_3}{a^2} > 2\pi\frac{\mathrm{H}_7-\mathrm{H}_3}{a^2}$$

et

$$2\alpha_1 + a^2 < 0.$$

On voit que c'est un ellipsoïde qui se déforme en admettant constamment comme axe l'axe des z; quant aux axes situés dans le plan des xy, ils ont un mouvement sinusoïdal de faible amplitude et de fréquence λ.

Les mouvements du second groupe, qui viennent d'être étudiés, sont ceux dont M. P. Appell a signalé l'existence ([1]) en les rattachant au problème, posé par Lejeune-Dirichlet en 1860, des mouvements d'un ellipsoïde liquide qui se déforme en conservant une forme ellipsoïdale. Contentons-nous de remarquer que la fonction ψ étant un polynome du second degré, il en est de même de la pression p; comme celle-ci s'annule à la surface libre, elle est proportionnelle au premier membre de l'équation de la surface libre : c'est la propriété prise, *a priori*, pour point de départ par M. P. Appell.

IV. — Le cas des fréquences réelles comprises entre -2ω et $+2\omega$.

20. Nous allons maintenant lever la restriction, faite dans l'exposé général, et relative aux fréquences réelles comprises entre -2ω et $+2\omega$.

Donnons-nous un entier n et considérons l'ensemble des polynomes de degré inférieur ou égal à n qui satisfont à l'équation de Poincaré ([2]). Il est évident que chacun d'eux est complètement déterminé par l'ensemble des termes de degré 0 et 1 en z, ces termes étant, du reste, arbitraires; il y a donc autant de polynomes linéairement indépendants cherchés qu'il y a de coefficients dans deux polynomes arbitraires en x et y, l'un de degré n, l'autre de degré $n-1$, c'est-à-dire $(n+1)^2$.

Convenons maintenant d'appeler *polynome* Y un polynome homogène satisfaisant à l'équation

$$a^2\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}+c^2\frac{\partial^2 Y}{\partial z^2}=0;$$

([1]) P. Appell, *Sur les oscillations ellipsoïdales d'une sphère liquide* (*C. R. Acad. des Sc.*, t. 171, 1920, p. 761-766).

([2]) Il s'agit de l'équation de Poincaré à coefficients réels du type *hyperbolique* correspondant à une valeur, *supposée donnée*, de λ comprise entre -2ω et $+2\omega$.

cela signifie que, si l'on se borne à le considérer sur la surface de l'ellipsoïde, ses valeurs, *rapportées à la sphère homographique*, sont celles d'une fonction sphérique. Comme on sait, tout polynome peut être, *sur l'ellipsoïde*, regardé d'une manière et d'une seule, comme somme de polynomes Y. Il y a $(n+1)^2$ polynomes Y linéairement indépendants de degré inférieur ou égal à n. Les fonctions de Lamé d'ordre n sont égales à des polynomes Y de degré n.

Cela posé, dans le cas général, les $(n+1)^2$ polynomes de degré inférieur ou égal à n qui satisfont à l'équation de Poincaré, s'expriment, sur l'ellipsoïde, au moyen de $(n+1)^2$ combinaisons *linéairement indépendantes* des $(n+1)^2$ polynomes Y. C'est à ce cas général que s'applique l'exposé fait plus haut de la méthode de Poincaré. Supposons, maintenant, que parmi les $(n+1)^2$ combinaisons linéaires des $(n+1)^2$ polynomes Y qui représentent les valeurs sur l'ellipsoïde des $(n+1)^2$ polynomes satisfaisant à l'équation de Poincaré, il y en ait seulement $N<(n+1)^2$ linéairement indépendantes. Cela voudra dire que parmi les polynomes considérés, il y en a $R=(n+1)^2-N$ linéairement indépendants *s'annulant sur l'ellipsoïde*. Nous les désignerons par

$$Q_1,\quad Q_2,\quad \ldots,\quad Q_R;$$

les N autres (qui ne sont, du reste, définis qu'à une combinaison linéaire près des Q) seront désignés par

$$P_1,\quad P_2,\quad \ldots,\quad P_N \qquad [N+R=(n+1)^2].$$

Cela posé, nous avons les propriétés suivantes :

1° *Sur l'ellipsoïde, les polynomes* P_i *sont orthogonaux aux polynomes* $D_\lambda(Q_k)$. Cela résulte de la formule (7)

$$\int_{(E)} P_i D_\lambda(Q_k)\, l\, d\sigma = \int_{(E)} Q_k D_{-\lambda}(P_i)\, l\, d\sigma,$$

et de l'hypothèse que Q_k s'annule sur l'ellipsoïde. Les polynomes P_i sont de même orthogonaux aux $D_{-\lambda}(Q_k)$.

2° *Sur l'ellipsoïde, les* $(n+1)^2$ *polynomes* P_i *et* $D_\lambda(Q_k)$ *forment* $(n+1)^2$ *combinaisons linéairement indépendantes*

des polynomes λ. En effet, d'abord il ne peut y avoir sur l'ellipsoïde aucune relation linéaire à coefficients constants non tous nuls entre les $D_\lambda(Q_k)$; sinon, en effet, il y aurait un polynome Q s'annulant sur l'ellipsoïde ainsi que $D_\lambda(Q)$, et satisfaisant de plus à l'équation de Poincaré. Or cela est impossible, car on pourrait toujours trouver, et d'une infinité de manières, un polynome R satisfaisant à

$$\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{\partial^2 R}{\partial z^2} = \overline{Q},$$

$\overline{Q}$ désignant le polynome imaginaire conjugué de Q; la formule

$$\begin{aligned}\int_E [R D_\lambda(Q) - Q D_{-\lambda}(R)]\, l\, d\sigma &= -\int Q\left[\frac{\partial^2 R}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 R}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right)\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}\right] dx\, dy\, dz \\ &= -\int Q\overline{Q}\, dx\, dy\, dz\end{aligned}$$

conduirait alors à une contradiction, le premier membre étant nul par hypothèse et le dernier ne l'étant pas.

En second lieu, il ne saurait exister sur l'ellipsoïde une relation de la forme

$$P = D''_{-\lambda}(Q),$$

en désignant par P une combinaison linéaire non identiquement nulle des P_i et par Q une combinaison linéaire des Q_k. Une telle relation est, en effet, contradictoire avec l'équation

$$\int P D_{-\lambda}(\overline{Q})\, l\, d\sigma = 0,$$

résultant de la première propriété [1].

On voit donc que, *sur l'ellipsoïde, tout polynome de degré inférieur ou égal à n peut être exprimé, d'une manière et d'une seule, comme combinaison linéaire des polynomes* P_i

---

[1] Il est en effet évident que, d'après la manière même dont les Q_k sont obtenus, à chaque polynome Q imaginaire correspond un autre polynome Q imaginaire conjugué du premier, puisque l'équation de Poincaré, dans le cas qui nous occupe, est à coefficients réels.

et $D_\lambda(Q_k)$. Il en serait de même si l'on substituait aux polynomes $D_\lambda(Q_k)$ les polynomes $D_{-\lambda}(Q_k)$.

3° *Si un polynome de degré inférieur ou égal à n est sur la surface orthogonal à tous les polynomes* $D_\lambda(Q_k)$, *il est, sur la surface, égal à une combinaison linéaire des polynomes* P_i. En effet, un tel polynome peut toujours, sur la surface, être mis sous la forme $P + D_{-\lambda}(Q)$. L'égalité, vraie par hypothèse,

$$\int_{(E)} [P + D_{-\lambda}(Q)]\, D_\lambda(\overline{Q})\, l\, d\sigma = 0,$$

entraîne, d'après 1°,

$$\int D_{-\lambda}(Q)\, D_\lambda(\overline{Q})\, l\, d\sigma = 0,$$

ce qui n'est possible que si $D_{-\lambda}(Q)$ est nul sur la surface.

4° *On peut toujours choisir les polynomes* P_i *de manière que chacun d'eux soit sur la surface égal à un polynome* Y (*homogène*). — Faisons d'abord la remarque évidente que l'ensemble des polynomes P_i et Q_k de degré inférieur ou égal à un nombre donné $p < n$ constitue l'ensemble des polynomes P et Q qu'on obtiendrait en partant de l'entier p au lieu de l'entier n.

Cela posé, soit

$$P_i = Y_p + Y_q + Y_r,$$

où Y_p, Y_q, Y_r sont trois polynomes Y non identiquement nuls de degrés différents p, q, r ($n \geqq p > q > r$). Considérons l'ensemble Q' des polynomes Q de degré inférieur ou égal à r; le polynome P_i, *et par suite le polynome* Y_r, est orthogonal à tous les polynomes $D_\lambda(Q')$; donc le polynome Y_r est une combinaison linéaire des polynomes P' de degré inférieur ou égal à r; on peut donc retrancher de P_i une combinaison linéaire des P de manière à n'obtenir que $Y_p + Y_q$. Le même raisonnement permettra de se débarrasser de Y_q.

5° *A tout entier n on peut faire correspondre* $2n+1$ *polynomes linéairement indépendants de degré n satisfaisant à l'équation de Poincaré, soit*

$$P_1^n,\quad P_2^n,\quad \ldots,\quad P_\gamma^n,\quad Q_1^n,\quad \ldots,\quad Q_\rho^n \qquad (\gamma + \rho = 2n+1),$$

tels que les $Q_k^{(n)}$ *s'annulent sur l'ellipsoïde, les* $P_i^{(n)}$ *et* $D_{-\lambda}(Q_k^n)$ *étant sur l'ellipsoïde* $2n+1$ *combinaisons linéaires indépendantes des* $2n+1$ *polynomes* Y *de degré* n.

C'est une conséquence immédiate de ce qui précède. On peut remarquer que les $P_i^{(n)}$ ne sont définis qu'à une combinaison linéaire près des Q_k de degré inférieur ou égal à n.

6° *Les polynomes* $D_{-\lambda}(P_i^{(n)})$ *sont sur la surface des combinaisons linéaires des* $P_i^{(n)}$, $D_{-\lambda}(Q_k^n)$, $D_{-\lambda}(Q_k^{n-1})$, ... En effet, la formule

$$\int P_j^{(p)} D_{-\lambda}(P_i^{(n)})\, l\, d\sigma = \int P_i^{(n)} D_\lambda(P_j^{(p)})\, l\, d\sigma \qquad (p < n)$$

montre que $P_j^{(p)}$ est orthogonal à $D_{-\lambda}(P_i^{(n)})$, puisque $D_\lambda(P_j^{(p)})$, étant un polynome de degré p, est sûrement orthogonal à P_i^n qui est, sur la surface, une fonction Y de degré n. Le polynome $D_{-\lambda}(P_i^n)$ étant orthogonal à tous les polynomes $P_j^{(n-1)}$, $P_j^{(n-2)}$, ... est nécessairement de la forme énoncée.

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

PICARD (Émile). — Traité d'Analyse, Tome I. Intégrales simples et multiples. L'équation de Laplace. Développements en séries. Applications géométriques du calcul infinitésimal; 3e édition, revue et augmentée avec la collaboration de M. Gaston Julia. Paris, Gauthier-Villars, 1922; 1 vol. in-8°.

Nous reproduisons ici l'introduction de cette troisième édition.

La seconde édition du Tome I de cet Ouvrage est depuis longtemps épuisée. Tout en conservant à l'ensemble de ce premier Volume le même caractère élémentaire relativement à l'exposition des principes fondamentaux de l'Analyse, je tenais dans une nouvelle édition à introduire dans certains Chapitres des leçons que j'avais eu l'occasion de faire dans mon cours de la Sorbonne, en particulier sur les séries trigonométriques et les questions qui s'y rattachent, ainsi que sur les fonctions harmoniques et le potentiel newtonien. Diverses circonstances m'avaient empêché jusqu'ici de réaliser ce dessein. Un des plus éminents de nos jeunes géomètres, M. Gaston Julia, bien connu de tous les mathématiciens pour ses beaux travaux d'Analyse, m'ayant offert son concours pour la rédaction définitive de ces additions et la mise au point des références bibliographiques indispensables au lecteur qui désirerait pousser plus loin ses études, je suis maintenant en mesure de faire paraître cette troisième édition.

Le plan général de l'Ouvrage n'a pas été changé, mais on verra que, en dehors des points visés plus haut, de nombreux compléments ont été introduits dans la première et la seconde Partie. Les applications classiques du Calcul infinitésimal à la Géométrie, qui constituent à peu près complètement la troisième Partie, n'ont guère subi de modifications, en dehors de quelques pages sur la géométrie non euclidienne.

Je remercie vivement M. Julia du concours qu'il m'a prêté dans l'établissement définitif du texte, et des remarques qui m'ont

permis d'améliorer ma rédaction antérieure. Je lui suis aussi reconnaissant de la peine qu'il a prise dans la correction des épreuves.

BRICARD (R.), professeur au Conservatoire des Arts et Métiers. — CINÉMATIQUE ET MÉCANISMES. In-8°, 212 pages (Collection Armand Colin, Section de Mathématiques. Paris, Armand Colin, 1921).

Le livre de M. Bricard appartient à une Collection encyclopédique fondée depuis quelques années dans le but de réunir une série d'ouvrages de haute vulgarisation où, dans chaque discipline, un spécialiste doit exposer les idées essentielles, les principes généraux et les résultats les plus importants. Le plan général de cette Collection a été défini et arrêté avec précision, et il en est de même des plans particuliers de chacune des sections qui la composent. L'ouvrage de M. Bricard appartient à la section de mathématiques : il s'adresse à un public possédant les éléments des mathématiques générales et doit toujours avoir en vue les réalités concrètes et les applications pratiques. C'est dans cette même section que se trouve le livre de Géométrie descriptive de M. J. Geffroy dans lequel M. Hadamard louait ici même le sens si juste du réel (1).

De même que le livre de M. Geffroy comporte les applications de la Géométrie descriptive à la charpente et à la coupe des pierres, celui de M. Bricard contient les premières applications de la Cinématique aux mécanismes. Leur but commun est de donner au lecteur, par l'exposé de la partie théorique, des outils commodes et sûrs, par l'exposé de la partie pratique, des exemples de l'emploi de ces outils. C'est cette union entre la pratique et la théorie que M. Bricard a réalisée sans se départir de ces qualités de clarté, de simplicité et d'élégance dont tous ses ouvrages portent la marque.

Le livre est divisé en deux parties qui correspondent à son titre : Cinématique théorique et Mécanismes.

La Cinématique proprement dite est précédée d'un Chapitre où l'auteur étudie les déplacements finis dans les espaces à deux ou à trois dimensions : c'est la meilleure école pour se familiariser avec les déplacements continus. On apprend comment, dans chaque cas, le déplacement se ramène à un petit nombre de déplacements

(1) *Bull. des Sc. Math.*, 2e série, t. XLVI, mai 1922, p. 177.

simples et à une forme canonique déterminée. A cette étude des déplacements, qui font correspondre des figures directement égales, se relie naturellement l'étude des retournements qui font correspondre des figures inversement égales.

On aborde ensuite les notions de vitesse et d'accélération dans le mouvement du point et dans le mouvement du solide, la composition de ces vitesses et de ces accélérations dans le mouvement relatif, et l'on fait une étude particulièrement détaillée de la distribution des vitesses et des accélérations dans le mouvement d'un solide dont une face plane glisse sur elle-même ou dont un point est fixe.

L'analyse des mécanismes débute par la théorie des engrenages cylindriques, hélicoïdaux, coniques, hyperboloïdes, avec un examen approfondi de la construction des profils et des dents; puis viennent les trains d'engrenages, les trains épicycloïdaux, avec des applications aux horloges et au différentiel d'automobile. L'auteur examine ensuite les cames et les excentriques et enfin les systèmes articulés, en particulier le quadrilatère avec le système trois-barres, les différentes transformations du mouvement rectiligne en mouvement circulaire, les inverseurs, le pantographe; dans l'espace, le joint de Cardan, le mécanisme de Bennett, l'hyperboloïde articulé et l'appareil de Darboux et M. Kœnigs pour la description mécanique du plan.

Une Note sur la théorie des vecteurs et des systèmes de vecteurs permet de s'initier aux quelques opérations vectorielles simples que l'auteur a utilisées au cours de son exposé; elle est suivie d'une Note donnant la démonstration de celles des formules de Frenet qui interviennent dans les éléments de la Cinématique et d'une troisième Note relative à l'emploi de méthodes graphiques dans la détermination des éléments cinématiques.

La lecture du petit volume de M. Bricard est assurément aussi profitable à ceux qui veulent enseigner la Cinématique qu'à ceux qui désirent l'apprendre. Le mécanisme de la pensée de l'auteur n'est pas le moins intéressant de ce livre, où l'on discerne aisément, avec le plaisir que donne la belle ordonnance d'un Ouvrage, comment des idées claires s'enchaînent avec art.

PAUL MONTEL.

MÉLANGES.

SUR LES PETITES OSCILLATIONS D'UNE MASSE FLUIDE

(*suite et fin*)

PAR M. E. CARTAN.

21. Venons maintenant à la discussion du problème de Poincaré. Soit ψ la fonction, satisfaisant à l'équation de Poincaré, à la détermination de laquelle se ramène la solution du problème. La formule

$$\int \psi D_{-\lambda}(Q_k^{(n)})\, l\, d\sigma = \int Q_k^{(n)} D_\lambda(\psi)\, l\, d\sigma$$

se réduit à

$$(25) \qquad \int \psi D_{-\lambda}(Q_k^{(n)})\, l\, d\sigma = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \rho).$$

Elle montre que, sur l'ellipsoïde, la fonction ψ est orthogonale aux polynomes Y de degré n représentés par les $D_{-\lambda}(Q_k^{(n)})$.

En second lieu, on a

$$(26) \qquad \int P_i^{(n)} D_\lambda(\psi)\, l\, d\sigma = \int \psi D_{-\lambda}(P_i^{(n)})\, l\, d\sigma \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu);$$

dans le second membre on peut, en tenant compte de (25), remplacer $D_{-\lambda}(P_i^{(n)})$ par une combinaison linéaire des $P_j^{(n)}$.

Les formules qui viennent d'être obtenues établissent $\rho + \nu = 2n + 1$ relations linéaires entre les constantes de Fourier d'ordre n de ψ et les constantes de Fourier d'ordre n de $D_\lambda(\psi)$, et ces relations sont manifestement indépendantes ([1]). En désignant respectivement par

$$2\pi(H_3 - H_k^{(n)})A_k^{(n)} \quad \text{et} \quad (\lambda^2 - 4\omega^2)A_k^{(n)}$$

([1]) Elles sont indépendantes si l'on y regarde les $4n + 2$ constantes de Fourier de ψ et de $D_\lambda(\psi)$ comme des indéterminées. Elles remplacent les $2n + 1$ relations qui, au n° 7, permettaient d'exprimer les constantes de Fourier de $D_\lambda(\psi)$ au moyen de celles de ψ.

les constantes de Fourier correspondantes de ψ et $D_\lambda(\psi)$, *on obtient ainsi un système de $2n+1$ relations linéaires et homogènes entre les $A_k^{(n)}$.*

Pour une valeur au moins de n, le système ainsi obtenu est compatible. Admettons, ce qui est très vraisemblable, que pour une fréquence λ donnée comprise entre -2ω et $+2\omega$, il n'y ait qu'un nombre fini de valeurs de n satisfaisant à cette condition [1]. Nous allons montrer que *la fonction ψ est nécessairement un polynome.*

Nous allons pour cela d'abord démontrer que si les coefficients A_i^{n} ne sont pas tous nuls, il existe un polynome ψ_n satisfaisant à l'équation de Poincaré et tel que, sur la surface, ψ_n et $D_\lambda(\psi_n)$ admettent les mêmes constantes de Fourier (d'ordre n) que ψ et $D_\lambda(\psi)$. En effet, on peut trouver deux polynomes Y et Y' de degré n admettant respectivement les mêmes constantes de Fourier (d'ordre n) que ψ et $D_\lambda(\psi)$. Les équations (25) montrent alors que Y est, sur l'ellipsoïde, une combinaison linéaire $P^{(n)}$ des polynomes $P_i^{(n)}$. Les équations (26) donnent ensuite

$$\int P_i^{(n)}\, Y'\, l\, d\sigma = \int P^{(n)} D_{-\lambda}(P_i^{(n)})\, l\, d\sigma = \int P_i^{(n)} D_\lambda(P^{(n)})\, l\, d\sigma;$$

par suite, le polynome $Y' - D_\lambda(P^{(n)})$, étant orthogonal à tous les polynomes $P_i^{(n)}$, est, sur l'ellipsoïde, une combinaison linéaire des $D_\lambda(Q_k)$, soit

$$Y' - D_\lambda(P^{(n)}) = D_\lambda(Q).$$

Par suite, le polynome

$$\psi_n = P^{(n)} + Q$$

satisfait aux conditions énoncées.

Cela posé, si, par exemple, les seules constantes de Fourier A_k différentes de zéro sont celles d'ordre n et celles d'ordre n', et si ψ_n et $\psi_{n'}$ sont les deux polynomes correspondants, on voit que la fonction

$$\chi = \psi - \psi_n - \psi_{n'}$$

satisfait à l'équation de Poincaré et jouit de la propriété de s'an-

[1] C'est du reste une hypothèse que nous avons faite implicitement dans le cas général. Elle n'est pas absolument indispensable.

nuler sur l'ellipsoïde ainsi que $D_\lambda(\chi)$. Il en résulte que cette fonction est identiquement nulle ([1]).

22. La conclusion de notre analyse est la suivante :

Tout mouvement oscillatoire de la nature de ceux étudiés par Poincaré se ramène à ceux pour lesquels la fonction ψ est un polynome tel que, sur l'ellipsoïde, ψ et $D_\lambda(\psi)$ se réduisent à deux fonctions Y homogènes de même degré.

Pour obtenir ces mouvements, on peut procéder pratiquement de la manière suivante.

On posera

$$(27)\qquad \begin{aligned}\psi = {} & c_1 Y_1 + c_2 Y_2 + \ldots + c_{2n+1} Y_{2n+1} \\ & - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1\right) R(x, y, z),\end{aligned}$$

en désignant par $Y_1, \ldots, Y_{2n+1}$ un système de $2n+1$ polynomes Y indépendants de degré n ([2]) et par R un polynome arbitraire de degré $n-2$. On écrira :

1° Que ψ satisfait à l'équation de Poincaré, ce qui donnera autant de relations linéaires et homogènes entre les c_k et les coefficients de R qu'il y a de ces derniers coefficients ;

2° Que L_k^n étant une fonction de Lamé quelconque d'ordre n, on a

$$\frac{\int L_k^n \psi \, l \, d\sigma}{\int L_k^n D_\lambda(\psi) \, l \, d\sigma} = \frac{2\pi (H_3 - H_k^{(n)})}{\lambda^2 - 4\omega^2},$$

ce qui donnera $2n+1$ relations linéaires nouvelles.

([1]) Ce théorème a été démontré dans le cas particulier d'un polynome au n° 20. La démonstration est analogue dans le cas général. Elle repose sur l'existence d'au moins une fonction φ satisfaisant à l'équation

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \left(1 - \frac{4\omega^2}{\lambda^2}\right) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = F(x, y, z),$$

F étant une fonction donnée. (*Voir* à ce sujet E. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, 2e édition, t. III, p. 161-165.)

([2]) Il est bien évident qu'on pourrait remplacer les Y_i par des polynomes de degré n se réduisant, sur l'ellipsoïde, à des polynomes Y ; on pourrait, par exemple, prendre les $2n+1$ polynomes de Lamé de degré n.

Le déterminant des coefficients des inconnues dans toutes les équations linéaires ainsi obtenues donnera, en l'égalant à zéro, l'équation en λ cherchée.

A chaque racine λ_0 de cette équation en λ correspondra un ou plusieurs polynomes ψ. Soit ψ_0 l'un d'eux. Il faudra s'assurer que $D_\lambda(\psi_0)$ est égal, sur la surface, à un polynome Y de degré n. Il ne pourrait en être autrement que s'il existait des polynomes Q de degré inférieur à n, mais alors il est évident que chacun de ceux-ci, considéré comme de la forme (27) (avec $c_1 = \ldots = c_{2n+1} = 0$), satisfait aux équations écrites (les $2n+1$ dernières étant vérifiées d'elles-mêmes). *On pourra donc toujours, d'une manière et d'une seule, retrancher du polynome ψ_0 considéré une combinaison linéaire de ces polynomes Q de manière que $D_\lambda(\psi_0)$ devienne, sur la surface, un polynome Y de degré n* ([1]).

Tout ce qui a été dit dans ce paragraphe pourrait s'appliquer en ne considérant, parmi les polynomes de degré n, que ceux dont tous les termes seraient de parité donnée par rapport à z et de parité donnée par rapport à l'ensemble des variables x et y. Dans le cas de l'ellipsoïde de Maclaurin, on pourrait de même ne considérer que les polynomes de la forme

$$(x+iy)^p z^q F(x^2+y^2, z^2),$$

où p est donné et q a l'une des valeurs 0 ou 1. Dans ce dernier cas, la formule (27) ne ferait intervenir qu'*un seul* polynome Y.

Dans les deux cas, on voit que la vérification dont il est question ci-dessus ne peut entrer en jeu que pour n au moins égal à 4. L'étude faite au paragraphe III des petits mouvements du second ordre est donc complète.

V. — Les fréquences $\lambda = \pm 2\omega$.

23. Il ne reste plus qu'à traiter le cas des petits mouvements de fréquence $\lambda = \pm 2\omega$. Supposons, par exemple, $\lambda = 2\omega$. Les équa-

---

([1]) En réalité, le premier membre de l'équation en λ contiendra, comme facteur parasite, le polynome en λ dont les racines expriment qu'il existe des polynomes Q de degré inférieur à n s'annulant sur la surface et satisfaisant à l'équation de Poincaré. La vraie équation en λ s'obtient en enlevant le facteur parasite.

On trouvera plus loin (n° 26) une méthode générale de calcul s'appliquant à tous les cas possibles.

tions (I) et (II) deviennent dans ce cas

$$(28)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial\psi}{\partial x} &= 4\omega^2\,(\xi + i\eta), \\ \frac{\partial\psi}{\partial y} &= -4i\omega^2(\xi + i\eta), \\ \frac{\partial\psi}{\partial z} &= 4\omega^2\zeta, \\ \frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} &+ \frac{\partial\zeta}{\partial z} = 0. \end{aligned}\right.$$

On en déduit

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\psi}{\partial x} - i\frac{\partial\psi}{\partial y} = 0, \\ &\frac{\partial(\xi - i\eta)}{\partial x} + i\frac{\partial(\xi - i\eta)}{\partial y} + \frac{1}{2\omega^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = 0, \\ &4\omega^2\left(\frac{x}{a^2}\xi + \frac{y}{b^2}\eta + \frac{z}{c^2}\zeta\right) \\ &\quad = 4\omega^2\varepsilon = 2\omega^2\left(\frac{x}{a^2} + i\frac{y}{b^2}\right)(\xi - i\eta) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a^2} - i\frac{y}{b^2}\right)\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{z}{c^2}\frac{\partial\psi}{\partial z}. \end{aligned}\right.$$

Notre premier but va encore être de montrer qu'*entre les* $2n+1$ *constantes de Fourier d'ordre* n *de la fonction* ψ *et les* $2n+1$ *constantes d'ordre* n *de la fonction* ε, *il existe* $2n+1$ *relations linéaires indépendantes, et cela en utilisant uniquement les propriétés exprimées par les équations* (29).

24. Nous nous servirons des théorèmes préliminaires suivants :

1° *Il existe* $n+1$ *polynomes de degré* n *en* $x+iy$ *et* z *se réduisant sur l'ellipsoïde à des polynomes* Y *de degré* n. Cela est évident si l'ellipsoïde est de révolution; en effet, considérons sur la sphère homographique, définie par la transformation

$$x = a\bar{x}, \qquad y = a\bar{y}, \qquad z = c\bar{z},$$

les $n+1$ fonctions sphériques

$$(\bar{x} + i\bar{y})^p\,\frac{d^p\mathrm{L}_n(\bar{z})}{dz^p},$$

où $L_n(z)$ désigne le $n^{\text{ième}}$ polynome de Legendre. Les polynomes

$$(x+iy)^p \frac{d^p L_n\left(\frac{z}{c}\right)}{dz^p} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

répondent à la question.

Si l'ellipsoïde n'est pas de révolution, considérons le polynome

$$(30) \qquad L_n\left(\frac{x-iy}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos\theta + \frac{z}{c}\sin\theta\right),$$

où θ désigne un paramètre arbitraire; les valeurs prises par ce polynome sur l'ellipsoïde sont, si on les rapporte à la sphère homographique, égales à

$$L_n\left(\frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos\theta\,\bar{x} + \frac{ib}{\sqrt{a^2-b^2}}\cos\theta\,\bar{y} + \sin\theta\,\bar{z}\right),$$

et l'argument représente la distance du point $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ à un plan diamétral fixe; on obtient donc une fonction sphérique.

En mettant le polynome (30) sous la forme d'un polynome entier et homogène en $\cos\theta$ et $\sin\theta$, les $n+1$ coefficients sont des polynomes qui répondent à la question et qui sont linéairement indépendants.

Nous appellerons

$$P_1^n(x+iy, z), \quad P_2^n(x+iy, z), \quad \ldots, \quad P_{n+1}^n(x+iy, z)$$

les $n+1$ polynomes dont nous venons de démontrer l'existence.

Nous appellerons de même

$$Q_1^n(x-iy, z), \quad Q_2^n(x-iy, z), \quad \ldots, \quad Q_{n+1}^n(x-iy, z)$$

les $n+1$ polynomes en $x-iy$ et z jouissant des mêmes propriétés.

Il existe un polynome qui est à la fois une combinaison linéaire des P et une combinaison linéaire des Q, c'est $L_n\left(\frac{z}{c}\right)$; nous l'identifierons à $P_{n+1}^{(n)}$ et à $Q_{n+1}^{(n)}$:

$$P_{n+1}^n = Q_{n+1}^n = L_n\left(\frac{z}{c}\right).$$

On voit ainsi l'existence de $2n+1$ polynomes harmoniques en

x et y et prenant sur l'ellipsoïde les mêmes valeurs que les polynomes Y de degré n. Cette existence aurait pu être démontrée facilement *a priori*. De plus, *tout polynome est sur l'ellipsoïde une combinaison linéaire des polynomes* P_i *et* Q_i *des différents degrés*.

2° *L'ensemble des combinaisons linéaires des polynomes obtenus en dérivant les* P_i^n *par rapport à* $x - iy$ *est identique à l'ensemble des combinaisons linéaires obtenues en dérivant les* $P_i^{(n)}$ *par rapport à* z.

Cette propriété est évidente dans le cas de l'ellipsoïde de révolution, étant donnée la forme des polynomes P_i^n. Dans le cas général, chacun des deux ensembles considérés coïncide manifestement avec les coefficients des polynomes

$$L_n\left(\frac{x - iy}{\sqrt{a^2 - b^2}}\cos\theta - \frac{z}{c}\sin\theta\right)$$

supposé rendu homogène en $\cos\theta$ et $\sin\theta$ et ordonné par rapport à $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

3° *Les polynomes*

$$\frac{x}{a^2}\frac{\partial P_i^n}{\partial x} + \frac{y}{b^2}\frac{\partial P_i^n}{\partial y}$$

sont, sur l'ellipsoïde, égaux à des polynomes Y *homogènes de degré* n, *et* n *d'entre eux sont linéairement indépendants.* — Soit, en effet, P_j^p un polynome en $x + iy$, z de degré $p < n$. Dans la formule

$$\int P_j^p\left(\alpha\frac{\partial P_i^n}{\partial x} + \beta\frac{\partial P_i^n}{\partial y}\right)d\sigma = \int P_i^n\left(\alpha\frac{\partial P_j^p}{\partial x} - \beta\frac{\partial P_j^p}{\partial y}\right)d\sigma.$$

le second membre est nul, puisque ce second membre est

$$\int P_i^n\left(\frac{x}{a^2}\frac{\partial P_j^p}{\partial x} + \frac{y}{b^2}\frac{\partial P_j^p}{\partial y}\right)l\,d\sigma$$

et que

$$\frac{x}{a^2}\frac{\partial P_j^p}{\partial x} + \frac{y}{b^2}\frac{\partial P_j^p}{\partial y},$$

étant de degré p, est orthogonal à P_i^n. Le premier membre est

donc nul, ce qui montre que

$$\frac{x}{a^2}\frac{\partial P_i^{(n)}}{\partial x}+\frac{y}{b^2}\frac{\partial P_i^{(n)}}{\partial y}$$

est orthogonal à tous les $P_j^{(n)}$; il est de même orthogonal aux $Q_i^{(n)}$; il se réduit donc, sur l'ellipsoïde, à un polynome X de degré n. Quant à la seconde partie de l'énoncé, elle résulte de ce que l'égalité à zéro, sur la surface, de

$$\frac{x}{a^2}\frac{\partial P^{(n)}}{\partial x}+\frac{y}{b^2}\frac{\partial P^{(n)}}{\partial y}$$

donnerait, en désignant par $\overline{P}^{(n)}$ le polynome imaginaire conjugué de $P^{(n)}$,

$$0=\int \overline{P}^{(n)}\left(\alpha\frac{\partial P^{(n)}}{\partial x}+\beta\frac{\partial P^{(n)}}{\partial y}\right)d\sigma=\int\left[\frac{\partial \overline{P}^{(n)}}{\partial x}\frac{\partial P^{(n)}}{\partial x}+\frac{\partial \overline{P}^{(n)}}{\partial y}\frac{\partial P^{(n)}}{\partial y}\right]dx\,dy\,dz.$$

ce qui exige que $P^{(n)}$ ne dépende que de z. Or cela n'est vrai que d'une seule combinaison linéaire des $P_i^{(n)}$.

Les mêmes propriétés appartiendraient aux polynomes $Q_i^{(n)}$.

25. Cela posé, nous avons un premier groupe de relations entre les constantes de Fourier d'ordre n de la fonction ψ en partant de l'égalité

$$\int\left(\alpha\frac{\partial Q_i^{(n)}}{\partial x}+\beta\frac{\partial Q_i^{(n)}}{\partial y}\right)\psi\,d\sigma=0,$$

qui résulte immédiatement des relations

$$\frac{\partial Q_i^{(n)}}{\partial x}-i\frac{\partial Q_i^{(n)}}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial \psi}{\partial x}-i\frac{\partial \psi}{\partial y}=0.$$

Cette égalité s'écrit encore

$$(31)\qquad \int\left(\frac{x}{a^2}\frac{\partial Q_i^{(n)}}{\partial x}+\frac{y}{b^2}\frac{\partial Q_i^{(n)}}{\partial y}\right)\psi\,l\,d\sigma=0\qquad (i=1,2,\ldots,n+1).$$

Elle donne $n+1$ relations linéaires entre les constantes de Fourier d'ordre n de ψ; *ces relations se réduisent à n indépendantes*, d'après le troisième théorème préliminaire.

On a maintenant, d'aprés (29), les formules

$$\int 4\omega^2\varepsilon P_i^{(n)}\,l\,d\sigma$$
$$=\int\left[2\omega^2(\alpha+i\beta)(\xi-i\eta)+\frac{1}{2}\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x}+\frac{1}{2}\beta\frac{\partial\psi}{\partial y}+\gamma\frac{\partial\psi}{\partial z}\right]P_i^{(n)}\,d\sigma.$$

Nous allons transformer le second membre en introduisant une combinaison linéaire des polynomes $P_k^{(n)}$, que nous appellerons $P_i'^{(n)}$, satisfaisant à la relation

$$\frac{\partial P_i'^{(n)}}{\partial x} - i\frac{\partial P_i'^{(n)}}{\partial y} = -\frac{\partial P_i^{(n)}}{\partial z};$$

c'est possible, d'après le deuxième théorème préliminaire du n° **24**. On a alors l'égalité

$$\int \Bigg\{ \left[2\omega^2(\alpha + i\beta)(\xi - i\eta) + \frac{1}{2}\alpha\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{1}{2}\beta\frac{\partial\psi}{\partial y} + \gamma\frac{\partial\psi}{\partial z}\right] P_i^{(n)}$$
$$- \left[\frac{1}{2}\alpha\frac{\partial P_i^{(n)}}{\partial x} + \frac{1}{2}\beta\frac{\partial P_i^{(n)}}{\partial y} + (\alpha - i\beta)\frac{\partial P_i'^{(n)}}{\partial z} - \gamma\left(\frac{\partial P_i'^{(n)}}{\partial x} - i\frac{\partial P_i'^{(n)}}{\partial y}\right)\right]\psi\Bigg\} d\sigma = 0,$$

qu'un calcul facile vérifie, si l'on tient compte des relations (29). On en déduit les $2n+1$ relations linéaires

$$(32)\qquad 4\omega^2 \int P_i^{(n)} \varepsilon\, l\, d\sigma$$
$$= \int \psi \left[\frac{1}{2}\frac{x}{a^2}\frac{\partial P_i^{(n)}}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{y}{b^2}\frac{\partial P_i^{(n)}}{\partial y}\right.$$
$$\left. + \left(\frac{x}{a^2} - i\frac{y}{b^2}\right)\frac{\partial P_i'^{(n)}}{\partial z} - \frac{z}{c^2}\left(\frac{\partial P_i'^{(n)}}{\partial x} - i\frac{\partial P_i'^{(n)}}{\partial y}\right)\right] l\, d\sigma.$$

La quantité entre crochets dans le second membre est égale, sur l'ellipsoïde, à un polynome Y de degré n; cela est vrai (3e théorème préliminaire) de la partie

$$\frac{x}{a^2}\frac{\partial P_i^{(n)}}{\partial x} + \frac{y}{b^2}\frac{\partial P_i^{(n)}}{\partial y}.$$

Quant au polynome restant, cela résulte de l'égalité

$$\int \Bigg\{ Y\left[(\alpha - i\beta)\frac{\partial P_i'^{(n)}}{\partial z} - \gamma\left(\frac{\partial P_i'^{(n)}}{\partial x} - i\frac{\partial P_i'^{(n)}}{\partial y}\right)\right]$$
$$+ P_i'^{(n)}\left[(\alpha - i\beta)\frac{\partial Y}{\partial z} - \gamma\left(\frac{\partial Y}{\partial x} - i\frac{\partial Y}{\partial y}\right)\right]\Bigg\} d\sigma = 0,$$

où intervient un polynome Y arbitraire. En prenant Y de degré inférieur à n, on voit que le polynome

$$\left(\frac{x}{a^2} - i\frac{y}{b^2}\right)\frac{\partial P_i'^{(n)}}{\partial z} - \frac{z}{c^2}\left(\frac{\partial P_i'^{(n)}}{\partial x} - i\frac{\partial P_i'^{(n)}}{\partial y}\right)$$

est orthogonal à tous les polynomes Y de degré inférieur à n; c'est donc, sur l'ellipsoïde, un polynome Y de degré n.

Les relations (32) fournissent donc $n+1$ relations linéaires et homogènes indépendantes entre les constantes de Fourier d'ordre n de ε et celles de ψ.

Il existe donc bien $2n+1$ relations linéaires et homogènes indépendantes (31) *et* (32) *entre les constantes de Fourier d'ordre n de ε et celles de ψ.*

Par suite, en désignant respectivement par

$$A_k^{(n)} \quad \text{et} \quad 2\pi(H_3 - H_k^{(n)})A_k^{(n)}$$

les constantes de Fourier d'ordre n de ces deux fonctions, l'existence d'un mouvement oscillatoire de fréquence 2ω entraîne entre les $A_k^{(n)}$ l'existence de $2n+1$ relations linéaires et homogènes, comme dans le cas général.

25. On peut se ramener au cas où toutes les constantes de Fourier A_k sont nulles, sauf celles d'ordre n. *Nous allons montrer que la fonction ψ, ainsi que la fonction $\xi - i\eta$, et par suite aussi les trois fonctions* (ζ, η, ξ) *sont des polynomes.*

En effet, il existe toujours un polynome $\overline{\psi}$, combinaison linéaire des $P_i^{(n)}$ et des $Q_i^{(n)}$, admettant les mêmes constantes de Fourier que ψ, soit

$$\overline{\psi} = \Sigma h_i P_i^{(n)} - k_i Q_i^{(n)} = P^{(n)} - Q^{(n)}.$$

Or les relations (31), où l'on remplace $Q_i^{(n)}$ par le polynome $\overline{P}^{(n)}$ imaginaire conjugué de $P^{(n)}$, conduisent à

$$\int\left(\frac{\partial P^{(n)}}{\partial x}\frac{\partial \overline{P}^{(n)}}{\partial x} - \frac{\partial P^{(n)}}{\partial y}\frac{\partial \overline{P}^{(n)}}{\partial y}\right)dx\,dy\,dz = 0,$$

ce qui est absurde, à moins que le polynome $P^{(n)}$ ne soit une fonction de z seul, auquel cas il pourrait être regardé comme faisant partie des $Q_i^{(n)}$. On peut donc supposer $P^{(n)}$ nul.

Par suite, le polynome $\overline{\psi} = Q^{(n)}$ admet les mêmes constantes de Fourier que ψ et satisfait à la première équation (29). Il est donc identique à ψ [1].

---

[1] Car l'équation $\dfrac{\partial\psi}{\partial x} - i\dfrac{\partial\psi}{\partial y} = 0$ n'admet qu'une solution prenant des valeurs données sur l'ellipsoïde.

La fonction ψ étant un des polynomes $Q'^{(n)}$, il existe au moins une autre combinaison linéaire des $Q_i'^{n}$, soit $Q'^{(n)}$, telle que l'on ait

$$\frac{\partial Q'^{n}}{\partial x} + i\frac{\partial Q'^{n}}{\partial y} = -2\frac{\partial Q'^{n}}{\partial z}.$$

La seconde équation (29) montre alors que l'on a

$$\frac{\partial\left(\xi - i\eta - \frac{1}{4\omega^2}\frac{\partial Q'^{n}}{\partial z}\right)}{\partial x} + i\,\frac{\partial\left(\xi - i\eta - \frac{1}{4\omega^2}\frac{\partial Q'^{n}}{\partial z}\right)}{\partial y} = 0;$$

par suite, on a

$$\xi - i\eta = \frac{1}{4\omega^2}\frac{\partial Q'^{n}}{\partial z} + R(x + iy, z).$$

La troisième formule (29) donne enfin

$$(33)\quad 4\omega^2\varepsilon = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a^2} + i\frac{y}{b^2}\right)\frac{\partial Q'^{n}}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{a^2}\frac{\partial Q'^{n}}{\partial x} + \frac{y}{b^2}\frac{\partial Q'^{n}}{\partial y}\right) + \frac{z}{c^2}\frac{\partial Q'^{n}}{\partial z} + 2\omega^2\left(\frac{x}{a^2} + i\frac{y}{b^2}\right)R.$$

Nous allons montrer que R est un polynome de degré $n-1$. Il suffit pour cela de montrer qu'il existe un polynome R tel que le second membre de l'égalité (33) ait les mêmes constantes de Fourier de *tous les ordres* que $4\omega^2\varepsilon$.

Or on voit d'abord que le polynome constitué par l'ensemble des trois premiers termes du second membre est égal, sur l'ellipsoïde, à un polynome Y de degré n. Il faut donc déjà que les constantes de Fourier d'ordre inférieur à n du polynome $\left(\frac{x}{a^2} + i\frac{y}{b^2}\right)R$ soient toutes nulles.

D'autre part, on voit facilement, en se servant de la formule (32), que, quel que soit le polynome R choisi, les intégrales $\int P_i'^{n}\varepsilon\, l\, d\sigma$ auront les valeurs voulues. Il reste donc simplement à exprimer les égalités

$$\int P_j^{p}\left(\frac{x}{a^2} + i\frac{y}{b^2}\right)R\, l\, d\sigma = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p+1;\ p < n),$$

$$\int Q_j^{p}\left(\frac{x}{a^2} + i\frac{y}{b^2}\right)R\, l\, d\sigma = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, p;\ p < n),$$

$$\int Q_j'^{n}\left(\frac{x}{a^2} + i\frac{y}{b^2}\right)R\, l\, d\sigma = c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

où les c_j sont des constantes données. Le premier groupe d'égalités est vérifié de lui-même, les polynomes $P_j^{q'}$ et R ne dépendant que de $x+iy$ et z. Il reste donc un système de

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

relations linéaires entre les coefficients de R, qui sont en même nombre. Les équations obtenues admettent une solution et une seule; car si leur déterminant était nul, cela signifierait qu'il existerait un polynome $\left(\frac{x}{a^2}+i\frac{y}{b^2}\right)$R de degré n non identiquement nul et ayant toutes ses constantes de Fourier d'ordre $\leq n$ nulles, ce qui est absurde.

Le théorème est donc complètement démontré.

Conclusion générale.

26. En définitive, les petits mouvements fondamentaux auxquels se ramène le petit mouvement le plus général de l'ellipsoïde fluide sont des mouvements pendulaires d'un ordre donné n. *Pour chacun d'eux, la fonction ψ est un polynome entier en x, y, z de degré n, et les fonctions ξ, η, ζ sont des polynomes de degré $n-1$; le polynome ψ et le polynome*

$$\varepsilon=\frac{x}{a^2}\xi+\frac{y}{b^2}\eta+\frac{z}{c^2}\zeta$$

se réduisent, sur l'ellipsoïde, à des polynomes Y *homogènes de degré n; les quatre polynomes ψ, ξ, η, ζ satisfont aux équations*

$$(34)\quad\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial\psi}{\partial x}=\lambda^2\xi-2i\omega\eta,\\&\frac{\partial\psi}{\partial y}=\lambda^2\eta-2i\omega\xi,\\&\frac{\partial\psi}{\partial z}=\lambda^2\zeta,\\&\frac{\partial\xi}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y}+\frac{\partial\zeta}{\partial z}=0;\end{aligned}\right.$$

enfin, on a les $2n+1$ relations

$$(35)\quad \int_{(E)} L_i^n \psi\, l\, d\sigma = 2\pi(H_3 - H_i^n) \int_{(\varepsilon)} L_i^n \varepsilon\, l\, d\sigma \qquad (i=1, 2, \ldots, 2n+1),$$

où les L_i^n désignent les $2n+1$ polynomes de Lamé d'ordre n.

De là résulte un procédé général de calcul pour trouver les petits mouvements fondamentaux, et cela *sans faire aucune hypothèse préalable sur la valeur numérique de λ*. On prendra pour ψ un polynome de degré n à coefficients indéterminés et sans terme constant, et pour ξ, η, ζ trois polynomes de degré $n-1$ à coefficients indéterminés. On exprimera que les quatre équations (34) sont identiquement vérifiées, ce qui donnera

$$3\frac{n(n+1)(n+2)}{6} + \frac{(n-1)n(n+1)}{6}$$

relations linéaires entre les

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} + 3\frac{n(n+1)(n+2)}{6} - 1$$

coefficients indéterminés. *Ces relations sont indépendantes*, sinon les équations (34) seraient vérifiées par plus de

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6} - \frac{(n-1)n(n+1)}{6} - 1 = (n+1)^2 - 1$$

systèmes linéairement indépendants de polynomes ψ, ξ, η, ζ; or, comme nous l'avons vu, quelle que soit la valeur numérique de λ, il suffit de $(n+1)^2 - 1$ équations pour exprimer que ψ et ε sont nuls sur la surface ([1]); il existerait donc un système de polynomes ψ, ξ, η, ζ non tous identiquement nuls pour lesquels ψ et ε seraient nuls sur la surface; or, dans chacun des trois cas examinés (λ quelconque, λ réel et compris entre -2ω et $+2\omega$, $\lambda = \pm 2\omega$), nous avons vu que cela était impossible.

Nous adjoindrons alors aux relations qui viennent d'être écrites

---

([1]) Puisqu'il suffit de $2p+1$ relations entre les constantes de Fourier d'ordre p de ψ et de ε pour que ces constantes de Fourier soient toutes nulles.

les $(n+1)^2-1$ relations linéaires (¹)

$$\int_{(\text{E})} L_i^{(p)}\, l\, d\sigma = 2\pi(H_3 - H_i^{(p)}) \int_{(\text{E})} L_i^{(p)}\, \varepsilon\, l\, d\sigma$$
$$(i = 1, 2, \ldots, 2p+1;\; p = 1, 2, \ldots, n).$$

On aura ainsi autant d'équations que d'inconnues. Le déterminant, égalé à zéro, donnera l'équation en λ des petits mouvements d'ordre inférieur ou égal à n. Il contiendra évidemment en facteur le déterminant analogue correspondant à $n-1$. On voit facilement alors que le premier membre de l'équation en λ des mouvements d'ordre n s'obtiendra en annulant le déterminant relatif aux coefficients des termes de plus haut degré des polynomes ψ, ξ, η, ζ dans celles des relations qui les contiennent.

Autrement dit, *si l'on veut se borner à trouver l'équation en* λ *d'ordre* n, *on pourra supposer* ψ, ξ, η, ζ *homogènes d'ordre* n *et* $n-1$ *et écrire les relations résultant des équations* (34) *et* (35); *le déterminant de ces relations, égalé à zéro, donnera l'équation cherchée* (²).

Comme nous l'avons déjà remarqué, on pourra se borner à considérer des polynomes qui sont de parité donnée par rapport à z et de parité donnée par rapport à x et y.

(¹) Il n'y a pas lieu de faire $p=0$, c'est-à-dire $L_i^{(p)}=1$, car $\int \varepsilon\, l\, d\sigma$ est nul de lui-même, cette intégrale étant égale à

$$\int \left(\frac{\partial\xi}{\partial x} + \frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\zeta}{\partial z}\right) d\tau.$$

D'autre part, les équations du problème ne changent pas quand on augmente ψ d'une constante : c'est pour cela que nous avons supposé *a priori* son terme constant nul.

(²) La recherche des polynomes ψ, ξ, η, ζ correspondant à une racine λ_0 de cette équation exigera naturellement que l'on complète les polynomes homogènes dont on est parti par des termes de degré inférieur.

SUR QUELQUES TRANSFORMATIONS D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES ;

Par M. E. GOURSAT.

Dans un Mémoire *Sur le Problème de Bäcklund* publié en 1919 dans les *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse* (t. X, 1918, p. 1-109), j'ai démontré que la recherche des transformations de Bäcklund B_2 ou B_3 s'appliquant à une équation de Monge-Ampère conduit à résoudre d'abord le problème suivant :

Trouver tous les systèmes des fonctions $F(x, y, z, p, q, u)$, $\Phi(x, y, z, p, q, u)$ *telles que la condition d'intégrabilité de l'équation aux différentielles totales*

$$du = F(x, y, z, p, q, u)\,dx + \Phi(x, y, z, p, q, u)\,dy, \tag{1}$$

où z *désigne une fonction inconnue des variables indépendantes* x *et* y, p *et* q *ses dérivées partielles, soit indépendante de* u.

Lorsqu'il en est ainsi, cette condition d'intégrabilité constitue, sauf dans des cas singuliers que nous laisserons de côté, une équation aux dérivées partielles de Monge-Ampère (E), que j'ai appelée une *résolvante de seconde espèce* du système S de Pfaff à six variables

$$dz = p\,dx + q\,dy, \qquad du = F\,dx + \Phi\,dy ;$$

l'équation (E) correspond, par une transformation B_2, à chacune des résolvantes de première espèce de S. Si ce système admet d'autres résolvantes de seconde espèce, chacune d'elles se déduit de (E) par une transformation B_3.

On est donc amené à rechercher les équations de Monge-Ampère, qui peuvent s'obtenir de cette façon, en exprimant que l'équation (1) est complètement intégrable. La solution de ce problème général paraît difficile. Je l'ai abordé dans le cas où l'équation (E) ne contient que la seule dérivée du second ordre s

et peut être mise sous la forme

$$(2) \qquad s = \rho pq + ap + bq + c,$$

a, b, c, ρ étant des fonctions de x, y, z. On a nécessairement dans ce cas $\frac{\partial F}{\partial q} = \frac{\partial \Phi}{\partial p} = 0$ (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XLIX, 1921, p. 1-55). J'ai déterminé toutes les équations aux différentielles totales

$$(1)' \qquad du = F(x, y, z, p; u)\,dx + \Phi(x, y, z, q; u)\,dy$$

qui conduisent à une équation de la forme (2) lorsque les deux dérivées $\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}$ et $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial q^2}$ sont différentes de zéro. Dans ce nouveau travail, je me propose d'examiner le cas où F est une fonction linéaire de p et Φ une fonction linéaire de q.

I.

1. Considérons une équation aux différentielles totales de la forme

$$(3) \qquad du = [Up + U_1]\,dx + [U_2 q + U_3]\,dy,$$

U, U_1, U_2, U_3 étant des fonctions de x, y, z, u. On peut remplacer cette équation par une infinité d'autres équations de même forme, pour lesquelles la condition d'intégrabilité est la même, si cette condition est indépendante de u. Si l'on pose en effet $v = F(x, y, z, u)$ on a

$$dv = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy + \frac{\partial F}{\partial z}(p\,dx + q\,dy) + \frac{\partial F}{\partial u}\,du.$$

ou, en remplaçant du par son expression (3),

$$(3)' \qquad dv = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z} + U\frac{\partial F}{\partial u}\right)p + \frac{\partial F}{\partial x} + U_1\frac{\partial F}{\partial u}\right]dx + \left[\left(\frac{\partial F}{\partial z} + U_2\frac{\partial F}{\partial u}\right)q + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial u}U_3\right]dy,$$

et il est clair que, si la condition d'intégrabilité de l'équation (3) ne renferme pas u, la condition d'intégrabilité de (3)', qui est identique à la première, ne renferme pas v.

On peut choisir la fonction F de façon que le terme en q, par exemple, manque dans la nouvelle équation. Il suffira de prendre pour F une intégrale de l'équation $\frac{\partial F}{\partial z} + U_2 \frac{\partial F}{\partial u} = 0$.

Nous pourrons donc supposer, sans restreindre la généralité, que l'on a $U_2 = 0$ dans l'équation (3) et partir d'une équation de la forme

$$(4) \qquad du = [Up + U_1]\,dx + U_3\,dy,$$

dont la condition d'intégrabilité est

$$Us + p\left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial z} q + \frac{\partial U}{\partial u} U_3\right) + \frac{\partial U_1}{\partial y} + \frac{\partial U_1}{\partial z} q + \frac{\partial U_1}{\partial u} U_3$$
$$= \frac{\partial U_3}{\partial x} + \frac{\partial U_3}{\partial z} p + \frac{\partial U_3}{\partial u}(Up + U_1).$$

Pour que cette condition ne renferme pas u, le coefficient de pq, c'est-à-dire $\frac{\partial \log U}{\partial z}$ doit être indépendant de u, et U est de la forme $U = f(x, y, z)\,\varphi(x, y, u)$. Si l'on prend pour inconnue, au lieu de z, la fonction $Z = \int f(x, y, z)\,dz$, on a

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = f(x, y, z)\,p + \int \frac{\partial f}{\partial x}\,dz,$$

et l'équation (4) devient, en conservant la lettre z pour représenter la fonction inconnue,

$$du = [\varphi(x, y, u)\,p + U_1]\,dx + U_3\,dy;$$

enfin, si l'on pose

$$v = \int \frac{du}{\varphi(x, y, u)} = \Phi(x, y, u),$$

on a

$$dv = \frac{du}{\varphi(x, y, u)} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,dy,$$

et, en définitive, on est ramené à une équation aux différentielles totales de la forme

$$du = (p + U_1)\,dx + U_3\,dy,$$

où, bien entendu, U_1 et U_3 ne désignent plus les mêmes fonctions qui figurent dans l'équation (4) avant toutes ces transformations.

Si l'on remplace u par $\frac{u+z}{2}$, on arrive à une forme symétrique

$$(5)\qquad du = [p - V(x, y, z, u)]\,dx - [V_1(x, y, z, u) - q]\,dy.$$

que nous conserverons désormais. Cette forme de l'équation aux différentielles totales se conserve quand on fait un changement de variables indépendantes $x = \varphi(x')$, $y = \psi(y')$, ou quand on ajoute aux deux fonctions inconnues z et u des fonctions quelconques de x et de y. Il en est de même quand on prend pour inconnues $\lambda(x, y)z$ et $\lambda(x, y)u$, quelle que soit la fonction $\lambda(x, y)$; l'équation (5) devient alors

$$du = \left[p + (u - z)\frac{\partial \log\lambda}{\partial x} - \lambda V\left(x, y, \frac{z}{\lambda}, \frac{u}{\lambda}\right)\right]dx$$
$$+\left[\lambda V_1\left(x, y, \frac{z}{\lambda}, \frac{u}{\lambda}\right) - (u - z)\frac{\partial \log\lambda}{\partial y} - q\right]dy.$$

2. La condition d'intégrabilité de l'équation (5) est

$$(6)\qquad 2s + \left[\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial u}\right]q - \left[\frac{\partial V_1}{\partial z} + \frac{\partial V_1}{\partial u}\right]p$$
$$+ \frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial V_1}{\partial x} + V_1\frac{\partial V}{\partial u} - V\frac{\partial V_1}{\partial u} = 0;$$

pour que u n'y figure pas, il faut et il suffit que l'on ait

$$(7)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial u\,\partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} = 0,$$

$$(8)\qquad \frac{\partial^2 V_1}{\partial u\,\partial z} + \frac{\partial^2 V_1}{\partial u^2} = 0,$$

$$(9)\qquad \frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial u} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x\,\partial u} + V_1\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} - V\frac{\partial^2 V_1}{\partial u^2} = 0.$$

Les deux premières relations prouvent que $\frac{\partial V}{\partial u}$ et $\frac{\partial V_1}{\partial u}$ sont respectivement des fonctions de $u + z$ et de $u - z$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = f(x, y, z + u),\qquad \frac{\partial V_1}{\partial u} = \varphi(x, y, u - z);$$

prenons $\alpha = u + z$ et $\beta = u - z$ pour variables à la place de u et

z dans V et V_1, et les formules précédentes deviennent

$$(10)\qquad \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta} = f(x, y, \alpha),$$

$$(11)\qquad \frac{\partial V_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial V_1}{\partial \beta} = \varphi(x, y, \beta),$$

tandis que la relation (9) se réduit à la suivante

$$(12)\qquad \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} + V_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha} - V \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 0.$$

On est ramené à déterminer les deux fonctions $f(x, y, \alpha)$, $\varphi(x, y, \beta)$ de telle façon que les trois équations (10), (11) et (12) soient compatibles en V et V_1.

Avant d'étudier le cas général, nous passerons en revue quelques cas particuliers faciles à traiter. Supposons que f soit indépendant de α, et φ indépendant de β, $\frac{\partial f}{\partial \alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 0$. L'équation (12) devient $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}$; on a donc

$$f = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x}, \qquad \varphi = \frac{\partial F(x, y)}{\partial y},$$

et par suite

$$V = \frac{\partial F}{\partial x} u + a(x, y, z), \qquad V_1 = \frac{\partial F}{\partial y} u + b(x, y, z),$$

et l'équation (5) est de la forme

$$du = [p - a(x, y, z)]\, dx + [b(x, y, z) - q]\, dy - u\, dF,$$

ce que l'on peut écrire

$$(A)\qquad d(u e^{-F}) = e^{-F} \{ (p + a)\, dx + (b - q)\, dy \};$$

il est clair que la condition d'intégrabilité est indépendante de u. J'ai étudié dans l'article déjà cité du *Bulletin de la Société mathématique* les équations du second ordre que l'on peut obtenir de cette façon.

Dans ce cas, on peut ramener l'équation (5) à une équation aux différentielles totales $dv = P\, dx + Q\, dy$, où P et Q sont indépendants de v, en remplaçant u par une autre fonction $v = \theta(x, y, z, u)$. *C'est le seul cas où cette transformation est possible*. En effet,

la nouvelle équation est, après ce changement de l'inconnue u,

$$dv = \left\{ \frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\partial\theta}{\partial z} p + \frac{\partial\theta}{\partial u}(p + V) \right\} dx + \left\{ \frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\partial\theta}{\partial z} q + \frac{\partial\theta}{\partial u}(V_1 - q) \right\} dy;$$

pour que les coefficients de dx et de dy dans cette nouvelle équation soient indépendants de v, et par suite de u, il faut que l'on ait

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial z} + \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial z} - \frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} = 0,$$

et par suite $\frac{\partial^2\theta}{\partial u^2} = 0$ $\frac{\partial^2\theta}{\partial u\,\partial z} = 0$. La fonction θ doit donc être de la forme

$$\theta = F(x, y)u + \Phi(x, y, z),$$

et par suite V et V_1 sont aussi de la forme

$$V = -\frac{\partial \log F}{\partial x} u + a(x, y, z),$$

$$V_1 = -\frac{\partial \log F}{\partial y} u + b(x, y, z),$$

et l'on retrouve l'équation précédente, où F est remplacé par $\frac{1}{F}$.

Supposons en second lieu qu'une seule des dérivées $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$ soit nulle, par exemple $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial \alpha} \neq 0$. En différentiant l'équation (12) par rapport à β, on obtient la relation $\frac{\partial V_1}{\partial \beta} = 0$. On a donc

$$V_1 = \varphi(x, y)\alpha + \varphi_1(x, y),$$

et l'on peut, sans diminuer la généralité, supposer $\varphi_1 = 0$. En effet, si dans l'équation

$$du = [p + V]\,dx + [\varphi(u - z) + \varphi_1 - q]\,dy$$

on pose $z = Z + z_1(x, y)$, $z_1(x, y)$ étant une intégrale de l'équation $\varphi(x, y)z + \varphi_1(x, y) - q = 0$, on est ramené à une équation de même forme où $\varphi_1(x, y) = 0$. Si nous prenons $V_1 = \varphi(x, y)\alpha$, la relation (12) devient

$$\varphi(x, y)\alpha \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0.$$

Soit $\varphi(x, y) = \dfrac{\partial H(x, y)}{\partial y}$; l'intégrale générale de l'équation précédente est

$$f = \frac{\partial H}{\partial x} + \Phi(\alpha e^{-H}, x)$$

et par suite on a

$$V = \alpha \frac{\partial H}{\partial x} + e^{H} F(\alpha e^{-H}, x) + \Psi(x, y, z),$$

H, F et Ψ étant des fonctions arbitraires de leurs arguments. L'équation (5) correspondante est

$$du = \left[p + (u + z)\frac{\partial H}{\partial x} + e^{H} F\Big((u - z)e^{-H}, x\Big) + \Psi(x, y, z)\right] dx$$
$$- \left[(u + z)\frac{\partial H}{\partial y} - q\right] dy;$$

en remplaçant u et z par $e^{H}u$ et $e^{H}z$ respectivement, *elle prend la forme simple*

(B) $$du = [p + F(u - z, x) + \varphi(x, y, z)]\, dx - q\, dy;$$

la condition d'intégrabilité, indépendante de la fonction

$$F(u + z, x),$$

conduit à l'équation du second ordre

(13) $$2s + \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} q = 0,$$

qui admet l'intégrale intermédiaire

$$2p + \varphi(x, y, z) = X.$$

3. Supposons maintenant que $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}$ et $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta}$ soient différents de zéro. On peut écrire la condition (12)

(14) $$V_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y} = V \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} U,$$

U étant une inconnue auxiliaire, et l'on en tire

$$V = \frac{\partial f}{\partial \alpha} U - \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta}}, \qquad V_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta} U - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}};$$

en portant ces valeurs de V et de V_1 dans les relations (10) et (11), on obtient deux équations pour déterminer l'inconnue auxiliaire U

$$(15)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}\left[\dfrac{\partial U}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial U}{\partial \beta}\right] + \dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\,U = f(x, y, \alpha) + \dfrac{\partial}{\partial \beta}\left(\dfrac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta}}\right), \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta}\left[\dfrac{\partial U}{\partial \alpha} + \dfrac{\partial U}{\partial \beta}\right] + \dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}\,U = \varphi(x, y, \beta) + \dfrac{\partial}{\partial \alpha}\left(\dfrac{\dfrac{\partial f}{\partial y}}{\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}}\right). \end{cases}$$

Nous avons à rechercher dans quels cas ces équations sont compatibles. Si le déterminant $\delta = \dfrac{\partial f}{\partial \alpha}\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial^2 \beta} - \dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta}\dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$ est nul, les deux équations ne peuvent être compatibles sans être identiques. Nous traiterons d'abord ce cas particulier. La relation

$$(16)\qquad \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial \alpha}} = \frac{\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta}} = m$$

ne peut être vérifiée que si la valeur de ces rapports m est indépendante de α et de β. Les deux fonctions f et φ ne peuvent donc avoir que l'une des formes suivantes :

$$(\mathrm{I})\qquad f = A e^{m\alpha} + B, \qquad \varphi = A_1 e^{m\beta} + B_1 \qquad (m \neq 0),$$

$$(\mathrm{II})\qquad f = A\alpha + B, \qquad \varphi = A_1\beta + B_1,$$

A, B, A_1, B_1, m ne dépendant que des variables x et y. Pour que les équations (15) se réduisent à une seule, il faut de plus que l'on ait

$$(17)\qquad f\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \varphi\frac{\partial f}{\partial \alpha} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\,\partial \beta} - \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial \alpha} + m\left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right) = 0,$$

m désignant la valeur commune des rapports (16). Si m est nul, f et φ sont de la forme (II), et la relation (17) ne peut être vérifiée que si l'on a $AA_1 = 0$. On aurait donc $\dfrac{\partial f}{\partial \alpha} = 0$, ou $\dfrac{\partial \varphi}{\partial \beta} = 0$, hypothèse qui a été examinée.

Si f et φ sont de la forme (I), la condition (17) devient

$$A_1 e^{m\beta}\left\{Bm + \frac{\partial m}{\partial x}\right\} - A e^{m\alpha}\left\{B_1 m + \frac{\partial m}{\partial y}\right\} + m\left(\frac{\partial B}{\partial y} - \frac{\partial B_1}{\partial x}\right) = 0;$$

A et A_1 n'étant pas nuls, on satisfait à cette condition en prenant

$$B = -\frac{\partial \log m}{\partial x}, \qquad B_1 = -\frac{\partial \log m}{\partial y},$$

et de cette façon seulement. Les deux équations (15) se réduisent alors à une seule

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial U}{\partial \beta} - mU = \frac{1}{m} + \frac{1}{AA_1 m}\,\frac{\partial^2 \log m}{\partial x\,\partial y}\,e^{-m(\alpha+\beta)}$$

dont l'intégrale générale est

$$U = \frac{1}{m^2} - \frac{1}{AA_1 m^2}\,\frac{\partial^2 \log m}{\partial x\,\partial y}\,e^{-m(\alpha+\beta)} + e^{m\alpha}.F(\alpha-\beta),$$

F étant une fonction arbitraire. En remplaçant f, φ, U par les expressions précédentes dans les formules (14) on en tire

$$(18)\quad \begin{cases} V = \dfrac{A}{m}e^{m\alpha} - \dfrac{1}{m}\,\dfrac{\partial \log A_1}{\partial x} - \beta\,\dfrac{\partial \log m}{\partial x} + A\,m\,F(\alpha-\beta), \\[2ex] V_1 = \dfrac{A_1}{m}e^{m\beta} - \dfrac{1}{m}\,\dfrac{\partial \log A}{\partial y} - \alpha\,\dfrac{\partial \log m}{\partial y} + A_1 m e^{m(\beta-\alpha)}F(\alpha-\beta); \end{cases}$$

l'équation aux différentielles totales correspondante est

$$(19)\quad \begin{cases} du = \Big[p - \dfrac{A}{m}e^{m(u+z)} - \dfrac{1}{m}\,\dfrac{\partial \log A_1}{\partial x} \\[2ex] \qquad\quad - (u-z)\,\dfrac{\partial \log m}{\partial x} + A\,m\,F(x, y, z)\Big]dx \\[2ex] \qquad + \Big[\dfrac{A_1}{m}e^{m(u-z)} - \dfrac{1}{m}\,\dfrac{\partial \log A}{\partial y} \\[2ex] \qquad\quad - (u+z)\,\dfrac{\partial \log m}{\partial y} + A_1 m e^{-2mz}F(x, y, z) - q\Big]dy. \end{cases}$$

Si l'on remplace dans cette équation mu et mz par u et z respectivement, elle devient

$$du = \left[p + Ae^{u+z} - \frac{\partial \log A_1}{\partial x} + A\varphi(x, y, z)\right]dx$$
$$+ \left[A_1 e^{u-z} - \frac{\partial \log A}{\partial y} + A_1 e^{-2z}\varphi(x, y, z) - q\right]dy.$$

On peut encore simplifier cette équation en remplaçant u et z par $u - \dfrac{\log A + \log A_1}{2}$ et z par $z + \dfrac{\log A_1 - \log A}{2}$, *ce qui conduit*

finalement à l'équation

$$(C)\quad du = [p + e^{u-z} + \psi(x, y, z)]\,dx - [e^{u-z} + e^{-2z}\psi(x, y, z) - q]\,dy,$$

que l'on obtiendrait en faisant $m = 1$, $A = A_1 = 1$ dans l'équation (19).

La condition d'intégrabilité de l'équation (C) est

$$2s - \frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{d}{dx}(e^{-2z}\psi) = 0,$$

que l'on peut écrire plus symétriquement en remplaçant ψ par $2Fe^z$

$$(20)\qquad s + \frac{d}{dy}(Fe^{z}) - \frac{d}{dx}(Fe^{-z}) = 0.$$

Cette transformation a déjà été signalée sous une forme un peu différente (*Bulletin de la Société mathématique*, t. XLIX, 1921). Elle se déduit de l'équation aux différentielles totales

$$dv = v[(p - \beta)\,dx - \alpha\,dy] - dx - e^z\,dy,$$

α et β étant liés par la relation $\alpha + \beta e^z = 0$.

4. Supposons maintenant $\delta = \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} - \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}$ différent de zéro. On tire des équations (15) les expressions suivantes de U et de $\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial U}{\partial \beta}$:

$$U = \frac{1}{\delta}\left\{\frac{\partial f}{\partial \alpha}\varphi - f\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} - \frac{\partial f}{\partial \alpha}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}\right) - \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}}\right)\right\},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha} + \frac{\partial U}{\partial \beta} = \frac{1}{\delta}\left[f\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} - \varphi\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2}\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}}{\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}}\right) - \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2}\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial \alpha}}\right)\right];$$

en écrivant que la valeur de U donnée par la première formule satisfait à la seconde relation, on obtient une condition à laquelle doivent satisfaire les fonctions $f(x, y, \alpha)$ et $\varphi(x, y, \beta)$. Cette condition est à la fois nécessaire et suffisante pour que les équations (10), (11) et (12) soient compatibles en V et V_1, lorsque δ n'est pas nul, et elles admettent une solution unique.

On arrive à cette condition plus facilement de la façon suivante.

Posons, pour abréger,

$$W(\quad) = \frac{\partial(\quad)}{\partial\alpha} + \frac{\partial(\quad)}{\partial\beta};$$

de l'équation (12)

$$\omega_1 = V_1 \frac{\partial f}{\partial\alpha} - V \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0,$$

on tire

$$W(\omega_1) = V_1 \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} - V \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta\,\partial x} + \frac{\partial f}{\partial\alpha} W(V_1) - \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} W(V) = 0,$$

ou, en tenant compte des formules (10) et (11),

$$(21)\qquad \omega_2 = V_1 \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} - V \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} + \varphi \frac{\partial f}{\partial\alpha} - f \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta\,\partial x} = 0.$$

On a de même

$$\begin{aligned} W(\omega_2) = V_1 \frac{\partial^3 f}{\partial\alpha^3} - V \frac{\partial^3\varphi}{\partial\beta^3} + \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} - f \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} \\ + \frac{\partial^3 f}{\partial\alpha^2\,\partial y} - \frac{\partial^3\varphi}{\partial\beta^2\,\partial x} + \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} W(V_1) - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} W(V) = 0, \end{aligned}$$

ou, en remplaçant $W(V)$ et $W(V_1)$ par f et φ respectivement,

$$(22)\quad \omega_3 = V_1 \frac{\partial^3 f}{\partial\alpha^3} - V \frac{\partial^3\varphi}{\partial\beta^3} + 2\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} - 2f \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^3 f}{\partial\alpha^2\,\partial y} - \frac{\partial^3\varphi}{\partial\beta^2\,\partial x} = 0.$$

Les trois équations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ doivent être compatibles en V, V_1, et cela est suffisant, car on a identiquement

$$W(\omega_1) - \omega_2 = \frac{\partial f}{\partial\alpha}[W(V_1) - \varphi] - \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}[W(V) - f],$$

$$W(\omega_2) - \omega_3 = \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}[W(V_1) - \varphi] - \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}[W(V) - f],$$

et les relations $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$ entraînent évidemment

$$W(V) = f, \qquad W(V_1) = \varphi,$$

pourvu que δ ne soit pas nul. Pour que les équations (12), (21) et (22) soient compatibles, *il faut et il suffit que l'on ait*

$$(23)\quad \Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial\alpha} & \dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta} & \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} & \varphi \dfrac{\partial f}{\partial\alpha} - f \dfrac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha\,\partial y} - \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\beta\,\partial x} \\ \dfrac{\partial^3 f}{\partial\alpha^3} & \dfrac{\partial^3\varphi}{\partial\beta^3} & 2\varphi \dfrac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} - 2f \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2} + \dfrac{\partial^3 f}{\partial\alpha^2\,\partial y} - \dfrac{\partial^3\varphi}{\partial\beta^2\,\partial x} \end{vmatrix} = 0,$$

le mineur δ étant toujours supposé différent de zéro.

Dans ces conditions on peut déterminer deux coefficients λ et μ vérifiant les trois relations

$$\frac{\partial^3 f}{\partial\alpha^3} = \lambda \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} + \mu \frac{\partial f}{\partial\alpha}, \qquad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial\beta^3} = \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial\beta^2} + \mu \frac{\partial\varphi}{\partial\beta},$$

$$2\varphi \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} - 2f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial\beta^2} - \frac{\partial^3 f}{\partial\alpha^2 \partial y} - \frac{\partial^3 \varphi}{\partial\beta^2 \partial x}$$
$$= \lambda \left[\varphi \frac{\partial f}{\partial\alpha} - f \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial\beta \partial x}\right] + \mu \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial x}\right].$$

Cherchons d'abord s'il est possible de satisfaire à ces relations en prenant pour λ et μ des fonctions de x, y seulement, indépendantes de α et de β. On aura alors

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} = \lambda \frac{\partial f}{\partial\alpha} + \mu f + C(x, y), \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial\beta^2} = \lambda \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} + \mu\varphi + C_1(x, y)$$

et la dernière relation devient

$$\lambda \left(\varphi \frac{\partial f}{\partial\alpha} - f \frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\right) + \frac{\partial f}{\partial\alpha} \frac{\partial\lambda}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \frac{\partial\lambda}{\partial x} + \left(2C - \frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\varphi$$
$$+ \left(\frac{\partial\mu}{\partial y} - 2C_1\right) f + \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial C_1}{\partial x} = 0.$$

En différentiant par rapport à α et à β successivement, il vient

$$\lambda \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\beta} \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} - \frac{\partial f}{\partial\alpha} \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}\right) = 0;$$

on a donc nécessairement $\lambda = 0$, et la condition devient

$$\left(2C - \frac{\partial\mu}{\partial x}\right)\varphi + \left(\frac{\partial\mu}{\partial y} - 2C_1\right) f - \frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial C_1}{\partial x} = 0.$$

On satisfait à cette relation en prenant

$$C = \frac{1}{2} \frac{d\mu}{dx}, \qquad C_1 = \frac{1}{2} \frac{d\mu}{dy}.$$

On ne peut supposer $\mu = 0$, car on aurait aussi $C = C_1 = 0$, et par suite $\frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2} = 0$, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial\beta^2} = 0$.

Si nous posons $\mu = m^2$, on a $C = m \frac{\partial m}{\partial x}$, $C_1 = m \frac{\partial m}{\partial y}$, et l'expres-

sion générale des fonctions f et φ est

$$(24)\quad \begin{cases} f = A e^{m\alpha} + B e^{-m\alpha} - \dfrac{\partial \log m}{dx}, \\ \varphi = A_1 e^{m\beta} + B_1 e^{-m\beta} - \dfrac{\partial \log m}{dy}, \end{cases}$$

A, B, A_1, B_1, m étant des fonctions des variables x, y. Il est à remarquer que l'on ne peut avoir à la fois $AB_1 = A_1B = 0$, car δ serait nul. Les formules (10) et (11) montrent que V et V_1 sont de la forme

$$V = \frac{A}{m} e^{mu+z} - \frac{B}{m} e^{-mu+z} - \frac{\partial \log m}{\partial x}(u - z) + F(x, y, z),$$

$$V_1 = \frac{A_1}{m} e^{mu-z} - \frac{B}{m} e^{-m(u-z)} - \frac{\partial \log m}{dy}(u - z) + \Phi(x, y, z);$$

on peut encore, comme au paragraphe précédent, supposer $m = 1$, ce qui revient à remplacer mu par u, et mz par z. *L'équation* (5) *correspondante est*

$$(D)\quad du = [p + A e^{u-z} - B e^{-u-z} + F(x, y, z)]\, dx + [A_1 e^{u-z} - B_1 e^{-u+z} + \Phi(x, y, z) - q]\, dy,$$

A, B, A_1, B_1 *étant des fonctions arbitraires des variables* x, y. Quant aux deux fonctions F et Φ, on les détermine de la façon la plus simple en écrivant que la condition d'intégrabilité de l'équation (25) ne dépend pas de u. On trouve ainsi que F et Φ doivent vérifier les deux relations

$$(25)\quad \begin{cases} e^{2z}\left(\dfrac{\partial A}{\partial y} + A\Phi\right) = \dfrac{\partial A_1}{\partial x} + A_1 F, \\ e^{-2z}\left(\dfrac{\partial B}{dy} - B\Phi\right) = \dfrac{\partial B_1}{dx} - B_1 F, \end{cases}$$

qui admettent toujours un système de solutions et un seul, puisque AB_1 et A_1B ne peuvent être nuls à la fois; les fonctions F et Φ étant choisies de cette façon, la condition d'intégrabilité devient

$$(26)\quad 2s + 2A_1 B e^{-2z} - 2AB_1 e^{2z} - \frac{dF}{dy} - \frac{d\Phi}{dx} = 0.$$

L'équation (26) dépend des quatre fonctions arbitraires A, B, A_1,

B_1, mais on peut, comme au numéro précédent, supposer deux de ces fonctions égales à l'unité, en remplaçant z et u par $z + \mu(x, y)$, $u + \nu(x, y)$, μ et ν étant des fonctions convenablement choisies. Si par exemple AA_1 n'est pas nul, on peut supposer $A = A_1 = 1$.

Pour que l'équation (26) ne renferme pas les dérivées p et q, il faut et il suffit que F et Φ ne dépendent pas de z, ce qui exige que l'on ait

$$F = -\frac{\partial \log A_1}{\partial x} = \frac{\partial \log B_1}{\partial x},$$

$$\Phi = \frac{\partial \log B}{\partial y} = -\frac{\partial \log A}{\partial y};$$

il faudra donc que le produit $A_1 B_1$ soit indépendant de x et le produit AB indépendant de y. Si par exemple on a aussi $A = A_1 = 1$, l'équation (26) est de la forme

$$(27) \qquad du = [\,p - e^{z-u} + Xe^{-z+u}\,]\,dx + [\,e^{u-z} + Ye^{-u+z} - q\,]\,dy,$$

et la condition d'intégrabilité conduit à l'équation

$$(28) \qquad s + Ye^{2z} - Xe^{-2z} = 0.$$

Remarquons que l'élimination de z conduit pour u à une équation de même forme

$$(29) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - e^{2u} + XYe^{-2u} = 0$$

que l'on ramènerait à la forme (28) en posant $u = v + \frac{1}{2}\log X$.

Remarquons encore le cas particulier où l'on a $A = 1$, $A_1 = 0$, $B = X$, $B_1 = 1$; la condition d'intégrabilité de l'équation

$$du = [\,p + e^{z-u} + Xe^{-z-u}\,]\,dx + [\,e^{u-z} - q\,]\,dy$$

conduit toujours à l'équation de Liouville

$$s - e^{2z} = 0,$$

quelle que soit la fonction X.

Remarque. — Les transformations précédentes généralisent la transformation de Bäcklund bien connue qui conduit d'une intégrale de l'équation $s = \sin 2z$ à une autre intégrale de la même équation, et qui joue un rôle si important dans l'étude des surfaces à courbure constante. Il est facile de démontrer que toutes les

équations aux différentielles totales (5) dont la condition d'intégrabilité est de la forme $s = f(x, y, z)$ se ramènent aux précédentes.

En effet, pour que cette condition d'intégrabilité ne renferme pas les dérivées p et q, on doit avoir

$$\frac{\partial V}{\partial z} - \frac{\partial V}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial V_1}{\partial z} + \frac{\partial V_1}{\partial u} = 0,$$
$$\frac{\partial^2 V}{\partial y\, \partial u} - \frac{\partial^2 V_1}{\partial x\, \partial u} + V_1 \frac{\partial^2 V}{\partial u^2} - V \frac{\partial^2 V_1}{\partial u^2} = 0.$$

On a donc

$$V = f(x, y, z + u) = f(x, y, \alpha),$$
$$V_1 = f(x, y, u - z) = \varphi(x, y, \beta),$$

et la dernière condition devient

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha\, \partial y} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta\, \partial x} + \varphi \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} - f \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} = 0.$$

En différentiant par rapport à α et à β successivement, il vient

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \beta} \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3} - \frac{\partial f}{\partial \alpha} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \beta^3} = 0;$$

on a donc

$$\frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3} = m^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial \beta^3} = m^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \beta},$$

et par suite

$$V = A e^{m\alpha} + B e^{-m\alpha} + C,$$
$$V_1 = A_1 e^{m\beta} + B_1 e^{-m\beta} + C_1,$$

A, B, C, A_1, B_1, C_1 étant des fonctions des deux variables x et y. Pour achever le calcul, il suffit d'écrire que la condition d'intégrabilité ne renferme pas u, et l'on retrouve les formules précédentes.

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ANNUAIRE POUR L'AN 1922 *publié par le Bureau des Longitudes*. Avec des Notices scientifiques : Un volume in 16 de VII-800 pages, 5 cartes célestes en couleurs, 2 spectres stellaires, 1 carte magnétique. Broché : 6 fr. Relié : 8 fr.

Les Annuaires du Bureau des Longitudes se suivent et se ressemblent : cependant, comme tout organisme vivant, cette publication se transforme d'une façon continue, et si son cadre demeure invariable, consacré par une tradition plus que séculaire, son progrès n'échappe pas au lecteur attentif. Pour nous en assurer, lisons d'abord l'intéressant discours prononcé par M. Maurice Hamy en prenant les fonctions de président du Bureau des Longitudes le 19 janvier 1921, et placé en tête des notices qui terminent l'Annuaire pour 1922. Le nouveau président nous y révèle le projet dont le Bureau des Longitudes poursuit actuellement l'exécution, avec l'appui bienveillant des pouvoirs publics, en se proposant la détermination directe des différences de longitude entre quelques stations convenablement choisies, formant un polygone fermé à la surface de la Terre. Cette opération donnera avec une grande exactitude les positions relatives des sommets du polygone, et, en la répétant dans l'avenir, on saura si ces positions sont invariables, ou si la Terre subit des déformations continues. Il serait superflu d'insister sur l'intérêt qui s'attache à la solution de ce problème fondamental ; ajoutons seulement que, si l'on a pu envisager la possibilité de cette solution, c'est grâce aux immenses progrès réalisés pendant et depuis la guerre dans la technique de la Télégraphie sans fil, principalement sous la direction du général Ferrié.

M. Hamy propose encore à ses collègues de multiplier les résumés substantiels insérés dans le corps même de l'Annuaire, et adaptés à la portée de tous les lecteurs ; dans ce but, il fait appel au concours des savants les plus qualifiés, leur demandant de courtes notices sur les progrès les plus récents des sciences qu'ils

cultivent avec éclat. Cette suggestion a sans doute été accueillie avec faveur, car dans la partie du volume consacrée aux données physiques et chimiques, nous trouvons deux nouvelles Notes du plus haut intérêt, résumés de communications faites au Bureau des Longitudes par MM. Ch.-Ed. Guillaume et M. de Broglie.

La première est consacrée à l'étude des aciers au nickel (invar et élinvar). Les alliages du fer et du nickel présentent des singularités que l'on ne rencontre dans aucun autre groupe de composés ou d'alliages, et ces singularités se manifestent d'une façon étroitement connexe, aussi bien dans leurs propriétés magnétiques que dans leur dilatabilité ou leur élasticité. Ces anomalies sont d'ailleurs sensiblement modifiées, et d'une façon générale atténuées, quand on incorpore aux ferro-nickels du carbone, du manganèse, du chrome, etc.; c'est ainsi qu'on peut obtenir des alliages pratiquement indilatables, ou encore possédant un module d'élasticité pratiquement invariable, dans un intervalle de température étendu. L'usage d'un alliage à dilatabilité non nulle, mais de valeur déterminée, peut d'ailleurs aider à résoudre bien des problèmes techniques; de même, si l'élinvar, appliqué à la construction des spiraux de montres, dispense de l'emploi du balancier compensateur, on obtient encore un meilleur résultat en associant à un spiral d'acier trempé un balancier dont les lames bimétalliques sont composées de laiton et d'un acier au nickel à formule de dilatation spécialement déterminée.

La Note de M. de Broglie traite de la mesure des longueurs d'ondes des rayons X au moyen de la diffraction cristalline. La méthode suivie est en somme la même que celle employée pour mesurer les longueurs d'ondes lumineuses au moyen des réseaux de diffraction. Comme l'a montré Laue, les rayons X subissent une diffraction en traversant les milieux cristallins, et les phénomènes observés peuvent s'interpréter en imaginant que les nœuds du réseau cristallin, au sens de Bravais, agissent comme des centres de diffraction. On voit alors que tout revient à évaluer en centimètres la distance réticulaire dans un cristal cubique donné; c'est ce qu'ont fait les physiciens anglais W.-H. et W.-L. Bragg, comme conséquence de raisonnements qui ne sont pas sans comporter quelques hypothèses plus ou moins hasardées; et dans l'évaluation numérique entrent encore des nombres qui, comme

la constante d'Avogadro, peuvent prêter à quelque incertitude. Les valeurs fournies par la théorie de Bragg ne sont donc pas d'une précision absolue; cependant plusieurs théories bien différentes sont venues déjà les confirmer : pour qu'aucun doute ne puisse subsister, il faut attendre que la jonction entre l'ultraviolet extrême et les rayons X soit accomplie.

Il serait impossible de donner ici le détail de tous les perfectionnements qui ont été apportés aux divers articles et tableaux dont se compose régulièrement l'Annuaire; il faut signaler cependant que la Note sur les spectres stellaires et leur classification a été entièrement refondue par M. A. de Gramont, en tenant compte des derniers résultats obtenus. L'étude de cette Note sera particulièrement profitable pour les nombreux lecteurs qui s'intéressent aux progrès étonnants que nous faisons chaque jour dans la connaissance du ciel étoilé : peut-être faudrait-il dire plutôt « que nous croyons faire », si, comme le veulent quelques extrémistes de la relativité, le ciel n'est peuplé que d'étoiles-fantômes !

Mais à ce propos, puisque voilà le grand mot prononcé, pourquoi l'Annuaire n'avait-il pas encore entretenu ses lecteurs d'une théorie qui met en effervescence les physiciens et les astronomes, comme les philosophes et même le grand public? Faut-il croire que le Bureau des Longitudes se contentait d'opposer une sereine indifférence à ce bouillonnement d'idées nouvelles et quelquefois paradoxales? Bien au contraire, on doit se persuader que, depuis plusieurs années, les discussions sur la relativité ont souvent prolongé les séances hebdomadaires du Bureau; parmi ses membres, les uns se sont montrés plus sceptiques, d'autres plus ardents; et finalement, à la prière de tous, M. Émile Picard a bien voulu rédiger pour les lecteurs de l'Annuaire de 1922 une Notice sur *la Théorie de la relativité et ses applications à l'Astronomie*. Nul n'était plus désigné, car chacun sait que si ses travaux mathématiques ont rendu son nom illustre, il s'intéresse au moins également aux théories physiques et philosophiques.

M. Picard a écrit sa Notice en « narrateur impartial » : il reconnaît ce qu'a de séduisant l'édifice construit par Einstein, il est plein d'admiration pour l'effort accompli; mais il se demande si c'est un progrès que de chercher à ramener la Physique à la Géométrie. Pour lui, il faut encore attendre avant de porter un juge-

ment définitif sur la nouvelle théorie, et c'est « l'avenir qui dira dans quelle mesure les idées relativistes, si des expériences nouvelles leur apportent un appui, pourront s'incorporer dans ce bon sens moyen de l'humanité où Descartes mettait le fondement de la certitude ». Analyser cette Notice courte et facile à lire serait la citer tout entière : remarquons seulement, avec l'auteur, que les questions philosophiques qui se rattachent à la nature du temps et de l'espace sont vieilles comme le monde lui-même; chercher à les approfondir n'aboutit trop souvent qu'à les obscurcir.

Dans l'Annuaire d'il y a cent ans, pour 1822, Laplace dit à propos du temps que « c'est pour nous l'impression que laisse dans la mémoire une suite d'événements dont nous sommes certains que l'existence a été successive » et que le mouvement sera propre à lui servir de mesure. Ne faut-il pas lui appliquer le mot de Saint-Augustin rappelé par M. Picard : « Qu'est-ce donc que le temps? Si nul ne me le demande, je le sais; si je cherche à l'expliquer quand on me le demande, je ne le sais pas. »

Après avoir précisé très nettement les idées essentielles de la théorie de la relativité, et montré comment elles ramènent la Physique à la Géométrie, prise dans son sens mathématique le plus large, M. Picard discute les trois applications concrètes bien connues qu'on peut en faire à l'Astronomie : variation séculaire du périhélie de Mercure, déviation des rayons lumineux rasant le bord du Soleil, déplacement vers le rouge des raies du spectre solaire par rapport à celles des sources terrestres. Les résultats obtenus jusqu'à présent paraissent certainement favorables à la nouvelle théorie : cependant, il s'agit de phénomènes délicats à observer et difficiles à mesurer; seule, la multiplication des expériences, dans des conditions variées, permettra de dire s'il faut abandonner définitivement les idées traditionnelles.

L'Annuaire a toujours publié régulièrement des renseignements étendus sur les monnaies métalliques françaises et étrangères, avec la comparaison de leurs valeurs. Le Bureau des Longitudes a pensé qu'on pouvait sans inconvénient suspendre cette publication, en attendant des jours meilleurs : mais il l'a remplacée par une Notice extrêmement intéressante sur *les Monnaies et le Change*, due à M. Ch. Lallemand.

La monnaie d'or — la seule monnaie saine et stable — a prati-

quement disparu de la circulation, pour faire place à une monnaie de papier, dont la valeur relative, réglée sur le marché des changes par la loi de l'offre et de la demande, subit d'incessantes et brusques variations : il en résulte de graves perturbations dans les transactions économiques, dans la vie sociale et dans la situation financière des nations. Après avoir rappelé comment se sont établies les monnaies et comment elles se sont transformées graduellement, M. Lallemand analyse avec une pénétrante finesse les effets désastreux de l'instabilité des changes : elle favorise la spéculation, mais entrave le commerce honnête; pour plusieurs catégories de citoyens, l'avilissement de la monnaie représente, en raison du cours forcé, une véritable spoliation; les ressources de l'État fléchissent, et l'inflation fiduciaire ne saurait apporter à ses embarras que des remèdes passagers, tout en rendant plus difficile le rétablissement futur de l'équilibre financier.

Pour sortir de cette situation, il faut ou bien consolider le cours avili de la monnaie, ou bien le relever lentement et progressivement par une production industrielle accrue, par le développement des exportations et par des économies sévères. Mais la première solution n'est qu'une faillite partielle; de la seconde seule, on doit poursuivre la réalisation avec persévérance.

La Notice de M. Lallemand est complétée par d'instructifs tableaux donnant les cours extrêmes et moyens des principales monnaies fiduciaires étrangères cotées à Paris de 1914 à 1921, exprimées en francs-papier, et les primes ou pertes correspondantes par rapport au franc-papier et au dollar.

Le Bureau des Longitudes a été cruellement frappé pendant l'année 1921 : en l'espace de deux mois, il a perdu trois de ses membres, Joseph Renaud, Jules Carpentier et son doyen d'ancienneté, Gabriel Lippmann; et à l'heure où ces lignes sont écrites, il déplore encore la perte de M. Louis Favé, qui avait succédé à Renaud. C'est un pieux devoir pour ses membres de retracer dans l'Annuaire la vie et les travaux de leurs collègues disparus : on trouvera dans le volume pour 1922 le discours prononcé aux funérailles de Lippmann le 18 juillet 1921 par M. Hamy, et une Notice sur J. Renaud, écrite par M. Favé.

HENRI ANDOYER.

MÉLANGES.

SUR QUELQUES TRANSFORMATIONS D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

(*Suite et fin*);

PAR M. E. GOURSAT.

II.

5. Il paraît difficile de trouver directement tous les systèmes de deux fonctions $f(x, y, \alpha)$, $\varphi(x, y, \beta)$, satisfaisant à la condition (23), où figurent à la fois des dérivées par rapport aux quatre variables α, β, x, y. Nous chercherons d'abord à déterminer la forme des deux fonctions f et φ, en les regardant comme des fonctions des seules variables α et β respectivement, les autres variables x et y étant regardées provisoirement comme des variables paramétriques. Il nous faut pour cela obtenir des relations où ne figurent plus les dérivées prises par rapport à ces variables. Revenons pour cela aux équations (15). En différentiant la première par rapport à α, la seconde par rapport à β, nous obtenons deux nouvelles équations.

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial\alpha}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right] + \frac{\partial^2 f}{\partial\alpha^2}\left[2\frac{\partial U}{\partial\alpha} + \frac{\partial U}{\partial\beta}\right] + \frac{\partial^3 f}{\partial\alpha^3}U = \frac{\partial f}{\partial\alpha},\\ &\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}\left[\frac{\partial^2 U}{\partial\beta^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\,\partial\beta}\right] + \frac{\partial^2\varphi}{\partial\beta^2}\left[2\frac{\partial U}{\partial\beta} + \frac{\partial U}{\partial\alpha}\right] + \frac{\partial^3\varphi}{\partial\beta^3}U = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta},\end{aligned}\right.$$

qui doivent aussi admettre une intégrale commune, et où figurent seulement les variables α et β.

Remplaçons dans ces équations α, β, U, $\frac{\partial U}{\partial\alpha}$, $\frac{\partial U}{\partial\beta}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial\beta^2}$, $\frac{\partial^2 U}{\partial\alpha\partial\beta}$ par les lettres x, y, z, p, q, r, s, t respectivement et posons

$$(31)\qquad \frac{\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\dfrac{\partial f}{\partial x}} = X', \qquad \frac{\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}} = Y';$$

on en déduit

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3} = \frac{\partial f}{\partial x}(X'' + X'^2), \qquad \frac{\partial^3 \varphi}{\partial y^3} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}(Y'' + Y'^2),$$

et le système (30) s'écrit, avec ces nouvelles notations,

$$(32) \qquad \begin{cases} r + s + X'(2p + q) + (X'' + X'^2)z = 1, \\ s + t + Y'(2q + p) + (Y'' + Y'^2)z = 1. \end{cases}$$

Connaissant un système de deux fonctions $X(x)$, $Y(y)$ des variables x et y respectivement telles que les équations (32) admettent un système de solutions communes, les deux équations différentielles

$$(31) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = X'(\alpha)\frac{\partial f}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta^2} = Y'(\beta)\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}$$

déterminant deux fonctions $f(\alpha)$, $\varphi(\beta)$ telles que les équations (30) admettent une intégrale commune $U(\alpha, \beta)$.

Si, dans les équations (32), on pose

$$z = e^{-X-Y}Z,$$

Z étant la nouvelle inconnue, il vient

$$p = -X'e^{-X-Y}Z + e^{-X-Y}P, \qquad q = -Y'e^{-X-Y}Z + e^{-X-Y}Q,$$
$$r = e^{-X-Y}[(X'^2 - X'')Z - 2X'P + R],$$
$$s = e^{-X-Y}[X'Y'Z - X'Q - Y'P + S],$$
$$t = e^{-X-Y}[(Y'^2 - Y'')Z - 2Y'Q + T],$$

et les équations (32) deviennent, en remplaçant les lettres Z, P, Q, R, S, T par les petites lettres correspondantes,

$$(33) \qquad \begin{cases} r + s - Y'p = e^{X+Y}, \\ s + t - X'q = e^{X+Y}, \end{cases}$$

et l'on est ramené à la résolution du problème suivant :

Trouver une fonction X *de la variable* x *et une fonction* Y *de la variable* y, *telles que les équations* (33) *admettent une solution commune* $z(x, y)$.

Nous pouvons remarquer tout de suite que si $z(x, y)$ est une solution des équations (33), il en est de même de $z(x, y) + C$,

quelle que soit la valeur de la constante C. Les solutions communes, s'il en existe, dépendent donc d'une constante arbitraire *au moins*. Si un système de deux fonctions X, Y donne une solution du problème, il en est de même des fonctions $X + a$, $Y + b$, quelles que soient les constantes a et b, car le système (33) ne change pas quand on change X en $X + a$, Y en $Y + b$, z en $e^{a+b}z$. Il en est de même quand on change x en $x + x_0$, y en $y + y_0$, ou x en cx, y en cy, z en $\frac{z}{c^2}$.

Il suit de là que si les deux fonctions $X(x)$, $Y(y)$ fournissent une solution du problème proposé, il en est de même des deux fonctions $X(cx + x_0) + a$, $Y(cy + y_0) + b$, quelles que soient les constantes a, b, c, x_0, y_0.

6. En différentiant la première des équations (33) par rapport à y, la seconde par rapport à x, il vient

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} - Y's - Y''p = e^{X+Y}Y',$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} - X's - X''q = e^{X+Y}X',$$

et l'on en tire

$$(34) \qquad (X' - Y')s + X''q - Y''p = (Y' - X')e^{X+Y}.$$

Cette équation donne la valeur de s, à moins que l'on n'ait

$$X' - Y' = 0.$$

Ceci ne peut arriver que si la valeur commune de ces deux fonctions est une constante a. L'équation (34) est alors vérifiée identiquement, et le système (33) devient

$$r + s - ap = Ce^{a(x+y)}, \qquad s + t - aq = Ce^{a(x+y)}.$$

Ce système est *en involution* et peut être remplacé par l'équation du premier ordre

$$p + q - az = \frac{C}{a}e^{a(x+y)} + C'$$

si a n'est pas nul, et par l'équation du premier ordre

$$p + q = C(x + y) + C'$$

si $a = 0$. L'intégrale générale du système (33) est, dans le premier cas,

$$z = \frac{C}{a^2} e^{a(x+y)} - \frac{C'}{a} + e^{ax} f(x-y),$$

et, dans le second cas,

$$z = \frac{C}{4}(x+y)^2 + \frac{C'}{2}(x+y) + f(x-y),$$

f étant une fonction arbitraire de $x - y$.

Ainsi, *lorsque les fonctions* X *et* Y *sont des fonctions linéaires de la forme*

$$X = ax + b, \qquad Y = ay + b',$$

a, b, b' étant des contantes quelconques, le système (33) *est en involution et l'intégrale générale dépend d'une fonction arbitraire*. C'est du reste le seul cas où le système (33) soit en involution.

Pour le problème que nous avons en vue, ce cas ne donne pas de solutions nouvelles. Les équations $(31)'$ deviennent en effet

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = a \frac{\partial f}{\partial \alpha}, \qquad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \beta} = a \frac{\partial \varphi}{\partial \beta};$$

c'est l'hypothèse examinée au n° 3.

7. Si $X' - Y'$ n'est pas nul, on peut résoudre l'équation (34) par rapport à s, et l'on est conduit à un système de trois équations du second ordre

$$(35) \qquad \begin{cases} r = 2e^{X+Y} + \left(Y' - \dfrac{Y''}{X' - Y'}\right)p + \dfrac{X''}{X' - Y'}\,q, \\ s = -\,e^{X+Y} + \dfrac{Y''}{X' - Y'}\,p - \dfrac{X''}{X' - Y'}\,q, \\ t = 2e^{X+Y} + \left(X' - \dfrac{X''}{Y' - X'}\right)q + \dfrac{Y''}{Y' - X'}\,p, \end{cases}$$

qui est équivalent à un système de deux équations linéaires aux différentielles totales à deux inconnues p et q. Ce système peut encore s'écrire sous une forme abrégée en posant

$$X' - Y' = e^{H},$$

ce qui donne

$$X'' = e^{H} H'_x, \qquad Y'' = -\,e^{H} H'_y,$$

et le système (35) peut s'écrire

$$(35)' \quad \begin{cases} r = 2e^{X+Y} + (Y' + H'_y)p + H'_x q, \\ s = -e^{X+Y} - H'_y p - H'_x q, \\ t = 2e^{X+Y} + H'_y p + (X' + H'_x)q. \end{cases}$$

La condition d'intégrabilité $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x}$ devient, après réductions, et en tenant compte de la valeur de H,

$$e^{X+Y}[X' + Y' + H'_x + H'_y] + [Y'' + H''_{xy} + H''_{y^2}]p + [X'' + H''_{x^2} + H''_{xy}]q = 0,$$

et il est évident, d'après la symétrie de cette expression, que la condition $\frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial t}{\partial x}$ donnerait la même relation. Si l'on pose

$$(36) \qquad T = X' + Y' + H'_x + H'_y,$$

on voit qu'en définitive les conditions d'intégrabilité se réduisent à une seule que l'on peut écrire

$$(37) \qquad e^{X+Y}T + \frac{\partial T}{\partial y}p + \frac{\partial T}{\partial x}q = 0.$$

Pour que le système (35) *soit complètement intégrable, il faut et il suffit que* T *soit nul.* On peut remarquer que si T était égal à une constante *différente de zéro*, le système (35) ne pourrait admettre de solution.

De l'expression de $H = \text{Log}(X' - Y')$, on tire

$$H'_x = \frac{X''}{X' - Y'}, \qquad H'_y = -\frac{Y''}{X' - Y'},$$

$$(38) \qquad T = X' + Y' + \frac{X'' - Y''}{X' - Y'} = \frac{X'^2 + X'' - (Y'^2 + Y'')}{X' - Y'}.$$

Pour que T soit nul, il faut et il suffit que l'on ait

$$X'^2 + X'' = Y'^2 + Y'',$$

et la valeur commune de ces deux fonctions est nécessairement une constante a^2. En résumé, pour que le système (35) soit complètement intégrable, c'est-à-dire admette des intégrales dépendant de *trois* constantes arbitraires, il faut et il suffit que les fonctions X

et Y vérifient respectivement les deux équations

$$(39)\qquad X'' + X'^2 = a^2 \qquad Y'' + Y'^2 = a^2,$$

a étant une constante quelconque.

Ce cas ne donne pas non plus de solutions nouvelles pour le problème qui nous occupe. En effet, la première des équations (39) prouve que X' est de la forme

$$X' = \frac{\partial}{\partial x}(\log v),$$

v étant une intégrale de l'équation linéaire $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = a^2 v$. La première des équations $(31)'$ devient donc

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha^2} = \frac{\partial f}{\partial \alpha} \times \frac{\partial}{\partial \alpha}(\log v),$$

$v(\alpha)$ étant une intégrale de l'équation $\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2} = a^2 v$. On aura donc

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = Cv \qquad \frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3} = C\frac{\partial^2 v}{\partial \alpha^2}$$

et par suite $\frac{\partial^3 f}{\partial \alpha^3} = a^2 \frac{\partial f}{\partial \alpha}\cdot$ On verrait de la même façon que la fonction $\varphi(\beta)$ satisfait à la relation $\frac{\partial^3 \varphi}{\partial \beta^3} = a^2 \frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\cdot$ Nous retrouvons une hypothèse qui a été examinée au nº 4.

Remarque. — Il serait facile de vérifier que le système (35) est complètement intégrable lorsque les fonctions X et Y sont des intégrales des équations (39).

Lorsque $a = 0$, on peut, en appliquant des transformations simples signalées à la fin du nº 5, ramener ce système à la forme

$$r - s - \frac{p}{y} = xy, \qquad s - t - \frac{q}{x} = xy,$$

dont l'intégrale générale est

$$z = \frac{1}{4}[x^3y - x^2y^2 - xy^3] + C_1xy + C_2\frac{x-y}{x-y} - C_3.$$

Si a n'est pas nul, on peut de même ramener le système (35) à

l'une des formes suivantes :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} r+s-a\,\text{th}(ay)p = \text{ch}\,ax\,\text{ch}\,ay, \\ s+t-a\,\text{th}(ax)q = \text{ch}\,ax\,\text{ch}\,ay; \end{cases}$$

$$\text{(II)} \quad \begin{cases} r+s-ap = e^{ay}\,\text{ch}\,ax, \\ s+t-a\,\text{th}(ax)q = e^{ay}\,\text{ch}\,ax; \end{cases}$$

$$\text{(III)} \quad \begin{cases} r+s+ap = e^{a(x-y)}, \\ s+t-aq = e^{a(x-y)}. \end{cases}$$

L'intégrale générale du système (I) est

$$z = \frac{\text{ch}\,ax\,\text{ch}\,ay}{a^2} + C_1 + \frac{C_2\,\text{ch}\,ax + C_3\,\text{ch}\,ay}{\text{sh}\,a(x-y)};$$

celle du système (II) est

$$z = \frac{1}{a^2}\,\text{ch}\,ax\,e^{ay} + C_1 + C_2 e^{ax} + C_3 e^{a(x-y)}\,\text{ch}\,ax,$$

et celle du système (III)

$$z = \frac{e^{a(x-y)}}{a^2} + C_1 + C_2 e^{-ax} + C_3 e^{ay}.$$

8. Il n'y a donc que les cas où le système (35) admet des intégrales dépendant de *deux* constantes arbitraires seulement, ou d'une seule constante, qui puissent nous conduire à des solutions nouvelles du problème proposé.

Lorsque T est différent de zéro, les intégrales du système (35) dépendent au plus de deux constantes arbitraires; en tirant l'une des inconnues p, q de la relation (37), on est conduit en effet à une équation aux différentielles totales pour déterminer l'autre inconnue. D'une façon générale, supposons que les dérivées partielles p, q d'une intégrale $z(x, y)$ du système (35) vérifient une relation linéaire

$$A e^{X+Y} + Bp + Cq = 0,$$

A, B, C étant des fonctions des variables x, y. En différentiant par rapport à chacune des variables x, y et en ajoutant les relations obtenues, on obtient la nouvelle relation

$$e^{X+Y}\left[(X'+Y')A - \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial y}\right] + \left(\frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\partial B}{\partial y}\right)p + \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \frac{\partial C}{\partial y}\right)q + B(r+s) + C(s+t) = 0;$$

remplaçons $r+s$ et $s+t$ par les expressions (33), et Ae^{X+Y} par $-Bp-Cq$; il reste

$$e^{X+Y}\left[\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial A}{\partial y}+B-C\right]+\left(\frac{\partial B}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}-BX'\right)p$$
$$+\left[\frac{\partial C}{\partial x}+\frac{\partial C}{\partial y}-CY'\right]q=0.$$

Les dérivées partielles p et q d'une intégrale du système (35) vérifient donc à la fois la relation (37) et la nouvelle relation

$$(40)\qquad 2e^{X+Y}\left(\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}\right)+\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}-X'\frac{\partial T}{\partial y}\right]p$$
$$+\left[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y}-Y'\frac{\partial T}{\partial x}\right]q=0.$$

Si les relations (37) et (40) sont distinctes, elles permettent de calculer p et q et l'intégrale générale du système (35) dépend d'une constante arbitraire, si elles sont compatibles. Pour que ce système admette des intégrales dépendant de deux constantes arbitraires, il est donc *nécessaire* que ces deux équations ne soient pas distinctes, ou que l'on ait

$$(41)\qquad \frac{2\left(\dfrac{\partial T}{\partial x}+\dfrac{\partial T}{\partial y}\right)}{T}=\frac{\dfrac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial y^2}-X'\dfrac{\partial T}{\partial y}}{\dfrac{\partial T}{\partial y}}=\frac{\dfrac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y}-Y'\dfrac{\partial T}{\partial x}}{\dfrac{\partial T}{\partial x}}=2\lambda.$$

On a donc des relations de la forme

$$\frac{\partial T}{\partial x}+\frac{\partial T}{\partial y}=\lambda T,$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}=X'\frac{\partial T}{\partial y}+2\lambda\frac{\partial T}{\partial y},$$
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial x\,\partial y}=Y'\frac{\partial T}{\partial x}+2\lambda\frac{\partial T}{\partial x},$$

et une combinaison facile fournit deux relations nouvelles

$$\lambda\frac{\partial T}{\partial y}+T\frac{\partial \lambda}{\partial y}=X'\frac{\partial T}{\partial y}+2\lambda\frac{\partial T}{\partial y},$$
$$\lambda\frac{\partial T}{\partial x}+T\frac{\partial \lambda}{\partial x}=Y'\frac{\partial T}{\partial x}+2\lambda\frac{\partial T}{\partial x},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{\partial T}{\partial y}(\lambda + X') = T\frac{\partial}{\partial y}(\lambda + X'),$$
$$\frac{\partial T}{\partial x}(\lambda + Y') = T\frac{\partial}{\partial x}(\lambda + Y'),$$

ou encore

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\lambda + Y'}{T}\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\lambda + X'}{T}\right) = 0.$$

On a donc

$$\lambda + X' = TX_1, \qquad \lambda + Y' = TY_1,$$

X_1 et Y_1 étant deux fonctions des variables x et y respectivement. Le rapport $\frac{X' - Y'}{T}$ est donc de la forme $X_1 - Y_1$, ce qui exige que l'on ait, d'après l'expression de T,

$$(X' - Y')^2 = (X_1 - Y_1)(X'^2 + X'' - Y'^2 - Y''),$$

et $(X' - Y')^2$ doit se décomposer en un produit de deux facteurs dont chacun est la somme d'une fonction de x et d'une fonction de y. Il en est ainsi toutes les fois que l'une des fonctions X', Y' se réduit à une constante. Si aucune de ces fonctions n'est constante, le carré de $X' - Y'$ ne peut se décomposer en un produit de la forme voulue qu'en l'écrivant

$$(mX' - mY')\left(\frac{X'}{m} - \frac{Y'}{m}\right),$$

m étant constant, et les rapports $\frac{X'^2 + X''}{X'}$, $\frac{Y'^2 + Y''}{Y'}$ devraient être égaux à une même constante, cas que nous avons écarté, quand cette constante n'est pas nulle (n° 7).

Il faut donc que X' ou Y' soit une constante; les deux cas se ramenant l'un à l'autre en permutant x et y, nous supposerons que l'on a $Y' = a$. La valeur de T est alors indépendante de y.

$$(42) \qquad T = X' - a + \frac{X''}{X' - a}.$$

La relation (37) devient

$$e^{X+ay}T + q\frac{dT}{dx} = 0;$$

et la valeur de q tirée de cette relation doit satisfaire aux deux

dernières équations du système (35) qui peuvent s'écrire

$$\frac{\partial q}{\partial x} = -e^{X+ay} - \frac{X''}{X'-a}\,q, \qquad \frac{\partial q}{\partial y} = 2e^{X+ay} - (T-a)\,q.$$

En faisant le calcul, on trouve que T doit satisfaire à une seule condition

$$(43) \qquad 2\,\frac{dT}{dx} = T^2 - 2aT.$$

Si a n'est pas nul, l'intégrale générale de cette équation est

$$(44) \qquad T = \frac{2a}{1-Ce^{ax}};$$

en posant $X' = a + u$, on voit que u doit satisfaire à l'équation de Riccati

$$(45) \qquad u' + u^2 - \frac{2aCe^{ax}u}{1-Ce^{ax}} = 0,$$

dont l'intégrale générale est

$$u = \frac{d}{dx}(\log v),$$

v étant l'intégrale générale de l'équation linéaire

$$(46) \qquad \frac{d^2v}{dx^2} - \frac{2aCe^{ax}}{1-Ce^{ax}}\,\frac{dv}{dx} = 0,$$

qui a pour expression

$$v = C_2 + C_1\int\frac{dx}{(1-Ce^{ax})^2},$$

ou, en effectuant la quadrature,

$$v = C_2 + C_1\left[x - \frac{1}{a}\,\mathrm{Log}(1-Ce^{ax}) - \frac{1}{a(1-Ce^{ax})}\right].$$

On a ensuite

$$X' = a - \frac{d}{dx}\log v,$$

$$X = ax - \log v,$$

$$e^X = e^{ax}\left\{C_2 - C_1\left[x - \frac{1}{a}\log(1-Ce^{ax}) - \frac{1}{a(1-Ce^{ax})}\right]\right\};$$

ce qu'on peut écrire

$$e^X = C_2e^{ax} + \frac{C_1}{a}\left[e^{ax}\,\mathrm{Log}\left(\frac{e^{ax}}{1-Ce^{ax}}\right) - \frac{e^{ax}}{1-Ce^{ax}}\right].$$

On en tire encore

$$\int e^{X}\,dx = \frac{C_2}{a}\,e^{ax} + \frac{C_1}{a^2}\,e^{ax}\,\mathrm{Log}\left(\frac{e^{ax}}{1 - C\,e^{ax}}\right) + C_3.$$

Le système (35) correspondant est alors

$$(35)'' \qquad \begin{cases} r + s - ap = e^{X+Y} = e^{a(x+y)}\,v, \\ s + t - \left(a + \dfrac{v'}{v}\right)q = e^{a(x+y)}\,v; \end{cases}$$

cherchons à déterminer une intégrale de ce système qui soit de la forme

$$z = e^{a(x+y)}\,F(x) + \Phi(x).$$

On est conduit aux trois relations

$$F'' + 2aF' + a^2F = v, \qquad \Phi'' - a\Phi' = 0,$$
$$2a^2F + aF' - a^2F - a\,\frac{v'}{v}\,F = v.$$

La première et la dernière condition, qui ne renferment que F, doivent être compatibles. Or on tire de la dernière

$$F = \frac{v}{a^2} + K\,v\,e^{-ax},$$

et, en substituant dans la première, on trouve la condition

$$v'' + \frac{2a\,e^{ax}}{K a^2 + e^{ax}}\,v' = 0,$$

qui devient identique à l'équation (46) en prenant $Ka^2 = -\frac{1}{C}$. L'intégrale générale du système $(35)''$ dépend donc bien des deux constantes arbitraires introduites par l'intégration de l'équation $\varphi_1'' - a\varphi_1' = 0$.

9. En remplaçant x et y par α et β respectivement dans X et Y, les formules $(31)'$ montrent que les fonctions $f(x, y, \alpha)$, $\varphi(x, y, \beta)$, qui correspondent au système (35) que nous venons de déterminer, sont respectivement de la forme

$$f(x, y, \alpha) = \frac{C_2}{a}\,e^{a\alpha} + \frac{C_1}{a^2}\,e^{a\alpha}\,\mathrm{Log}\left(\frac{e^{a\alpha}}{1 - C\,e^{a\alpha}}\right) + C_3,$$
$$\varphi(x, y, \beta) = C_4\,e^{a\beta} + C_5,$$

a, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5 étant des fonctions de x et de y, ou des constantes.

De la relation (10)

$$\frac{\partial V}{\partial \alpha} + \frac{\partial V}{\partial \beta} = f(x, y, \alpha)$$

on déduit ensuite que V est de la forme

$$\begin{aligned} V &= \int f(x, y, \alpha)\, d\alpha + F(x, y, \alpha - \beta) \\ &= \frac{C_2}{a^2} e^{a\alpha} + C_3\alpha + \frac{C_1}{Ca^3}(1 - Ce^{a\alpha}) \operatorname{Log}(1 - Ce^{a\alpha}) \\ &\quad + \frac{C_1 \alpha e^{a\alpha}}{a^2} + F(x, y, \alpha - \beta), \end{aligned}$$

ou, en remplaçant α par $u + z$, β par $u - z$,

$$\begin{aligned} V = \frac{C_2}{a^2} e^{a(u+z)} + C_3(u + z) + \frac{C_1}{Ca^3}(1 - Ce^{a(u+z)}) \operatorname{Log}(1 - Ce^{a(u+z)}) \\ + \frac{C_1(u + z)}{a^2} e^{a(u+z)} + F(x, y, z). \end{aligned}$$

De la relation

$$\frac{\partial V_1}{\partial \alpha} + \frac{\partial V_1}{\partial \beta} = \varphi(x, y, \beta)$$

on déduit de même que V_1 est de la forme

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{C_4}{a} e^{a\beta} + C_5\beta + \Phi(x, y, \alpha - \beta) \\ &= \frac{C_4}{a} e^{a(u-z)} + C_5(u - z) + \Phi(x, y, z). \end{aligned}$$

Avant de continuer les calculs, nous remarquerons que l'on peut supposer $a = 1$, ce qui revient à remplacer az et au par z et u. On peut de même, en remplaçant z par $z - \log C$, supposer $C = 1$.

Nous pouvons donc écrire V et V_1 sous la forme plus simple

$$(47)\quad \left\{ \begin{aligned} V &= A e^{u+z} + B(u + z) \\ &\quad - C[(u + z)e^{u+z} + (1 - e^{u+z}) \operatorname{Log}(1 - e^{u+z})] + F(x, y, z), \\ V_1 &= A_1 e^{u-z} + B_1(u - z) + \Phi(x, y, z), \end{aligned} \right.$$

A, B, C, A_1, B_1 ne dépendant que des variables x, y. La condition d'intégrabilité de l'équation

$$(48)\qquad du = [p + V]\, dx + [V_1 - q]\, dy$$

est ici

$$(49)\quad \begin{aligned} 2s &+ \frac{\partial A}{\partial y}e^{u+z} + \frac{\partial B}{\partial y}(u+z) \\ &+ \frac{\partial C}{\partial y}[(u+z)e^{u+z} + (1-e^{u+z})\operatorname{Log}(1-e^{u+z})] \\ &+ \frac{dF}{dy} + [Ae^{u+z} + B - C(u+z)e^{u+z} - Ce^{u+z}\operatorname{Log}(1-e^{u+z})] \\ &\times [A_1e^{u-z} + B_1(u-z) + \Phi] \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x}e^{u-z} + \frac{\partial B_1}{dx}(u-z) + \frac{d\Phi}{dx} + [A_1e^{u-z} + B_1] \\ &\times [Ae^{u+z} + B(u+z) + C(u+z)e^{u+z} \\ &\qquad + C(1-e^{u+z})\operatorname{Log}(1-e^{u+z}) + F].\end{aligned}$$

Pour que cette condition d'intégrabilité soit indépendante de u, il faut d'abord que les termes logarithmiques disparaissent, c'est-à-dire que l'on ait

$$\begin{aligned}\frac{\partial C}{\partial y}(1-e^{u+z}) &- Ce^{u+z}[A_1e^{u-z} + B_1(u-z) + \Phi] \\ &= C(1-e^{u+z})(A_1e^{u-z} + B_1).\end{aligned}$$

Le terme B_1Cue^{u+z} ne peut se réduire avec aucun autre; il faut donc d'abord que B_1 soit nul, et la condition devient

$$\frac{\partial C}{\partial y}(1-e^{u+z}) - A_1Ce^{2u} - C\Phi e^{u+z} = A_1Ce^{u-z} - A_1Ce^{2u};$$

elle se décompose en deux :

$$(50)\qquad \frac{\partial C}{\partial y} = 0, \qquad \Phi = A_1e^{-2z}.$$

L'équation (49) devient alors

$$\begin{aligned}2s &+ \frac{\partial A}{\partial y}e^{u+z} + \frac{\partial B}{\partial y}(u+z) + \frac{\partial F}{\partial y} \\ &+ [Ae^{u+z} + B + C(u+z)e^{u+z}][A_1e^{u-z} + \Phi] \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x}e^{u-z} + \frac{d\Phi}{dx} + A_1e^{u-z}[Ae^{u+z} + B(u+z) + C(u+z)e^{u+z} + F].\end{aligned}$$

En supprimant les termes qui se détruisent, il reste l'équation

$$\begin{aligned}2s &+ \frac{\partial A}{\partial y}e^{u+z} + \frac{\partial B}{\partial y}(u+z) + \frac{dF}{dy} \\ &+ A\Phi e^{u+z} + A_1Be^{u-z} + B\Phi + C\Phi(u+z)e^{u+z} \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x}e^{u-z} + \frac{d\Phi}{dx} + A_1B(u+z)e^{u-z} + A_1Fe^{u-z}.\end{aligned}$$

En tenant compte des relations déjà obtenues (50), on voit que, pour que cette équation soit indépendante de u, il faut et il suffit que l'on ait $B = C$:

$$(51)\qquad \left(\frac{\partial A}{\partial y} + A\Phi\right)e^{z} + A_1 B e^{-z} = \frac{\partial A_1}{\partial x} e^{-z} + A_1 F e^{-z}.$$

En définitive, la condition d'intégrabilité (49) est indépendante de z si l'on a $B_1 = 0$, $B = C = X$, $\Phi = A_1 e^{-2z}$, F étant déterminée par la relation (51), et cette condition d'intégrabilité est

$$(52)\qquad 2s + \frac{dF}{dy} + B\Phi = \frac{d\Phi}{dx},$$

et l'équation aux différentielles totales (48) devient

$$(48)'\quad \begin{aligned} du = \Big[p &+ A e^{u+z} + X(u+z) \\ &+ X\{(u+z)e^{u+z} + (1 - e^{u+z}) \operatorname{Log}(1 - e^{u+z})\} \\ &\qquad\qquad\qquad + F(x, y, z)\Big] dx \\ &+ [A_1(e^{u-z} + e^{-2z}) - q]\, dy, \end{aligned}$$

la fonction F étant déterminée par l'équation (51).

Il reste à examiner le cas où l'on aurait $a = 0$ dans la formule (43). On en tire $T = -\dfrac{2}{x + x_0}$,

$$X' = \frac{-1}{(x + x_0)[1 + C(x + x_0)]},$$

et la fonction $f(x, y, \alpha)$ devrait être de la forme

$$f = 2A\alpha + B \operatorname{Log}(\alpha + \alpha_0) + C,$$

A, B, C, α_0 étant des fonctions de x, y. La fonction φ serait de même de la forme

$$\varphi = A_1 \beta + B_1,$$

et l'on aurait ensuite

$$\begin{aligned} V &= A(u+z)^2 + B(u + z + \alpha_0)\{\operatorname{Log}(u + z + \alpha_0) - 1\} \\ &\qquad + C(u+z) + F(x, y, z), \\ V_1 &= A_1(u-z)^2 + B_1(u-z) + \Phi(x, y, z); \end{aligned}$$

en poursuivant le calcul, on retombe sur les hypothèses déjà examinées.

Il resterait à examiner si les équations (33) peuvent admettre des solutions ne dépendant que d'une constante additive; cette étude fera l'objet d'un autre article.

DEUX LEÇONS SUR CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES ET LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE;

PAR M. ÉMILE PICARD.

Dans mon cours de 1911 sur les équations fonctionnelles, j'ai été tout naturellement amené, en étudiant certaines équations fonctionnelles, à parler de la géométrie non euclidienne. Ce sont les deux leçons faites sur ce sujet que je me propose de reproduire ici.

I.

UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE ET LA GÉOMÉTRIE HYPERBOLIQUE.

1. Une des premières équations fonctionnelles, qui ait été étudiée, paraît être l'équation

$$(1)\qquad f(x)+f(y)=f(x+y)\qquad (x \text{ et } y \text{ arbitraires})$$

rencontrée déjà par d'Alembert. On sait qu'elle a fait l'objet de nombreux travaux depuis Cauchy, qui semble avoir démontré le premier, que sa seule solution est

$$f(x)=Cx,$$

C étant une constante, si l'on suppose la fonction continue [1].

A l'équation (1), on peut joindre l'équation

$$(2)\qquad f(x)f(y)=f(x+y)$$

qui admet la seule solution continue

$$f(x)=a^x\qquad (a \text{ étant une constante}).$$

On sait que, moyennant certaines hypothèses très générales, on peut ramener la démonstration de la règle du parallélogramme des forces en statique à l'étude de l'équation (1). M. G. Darboux a développé à ce sujet dans le *Bulletin* (1re série, t. IX, 1875, p. 281) des considérations très intéressantes.

---

[1] Les cas où $f(x)$ ne serait pas continue, ont été en particulier examinés par Darboux, Hamel et Lebesgue.

2. Le problème de la composition de deux forces avait antérieurement amené Laplace et Poisson à étudier l'équation fonctionnelle

$$(3) \qquad \varphi(y+x)+\varphi(y-x)=2\varphi(x)\varphi(y).$$

La fonction $\varphi(x)$ étant toujours supposée continue, je rappelle le résultat essentiel auquel on est conduit. En faisant $x=0$, dans l'équation, on a

$$\varphi(0)=1.$$

La fonction continue $\varphi(x)$ est donc positive pour $x=0$. On pourra donc trouver un nombre assez petit α pour que $\varphi(x)$ soit positif entre $x=0$ et $x=\alpha$. Cela posé, il arrivera de deux choses l'une : ou bien $\varphi(\alpha)$ sera compris entre 0 et 1, ou bien $\varphi(\alpha)$ sera supérieur à 1. On démontre sans peine que *dans le premier cas*, on a

$$\varphi(x)=\cos(ax) \qquad (a \text{ étant une constante}),$$

et que l'on a *dans le second cas*

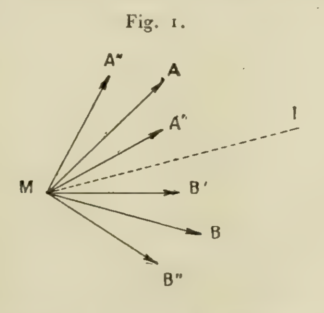
$$\varphi(x)=\operatorname{ch}(ax)$$

où $\operatorname{ch}(ax)$ représente le cosinus hyperbolique de ax, c'est-à-dire

$$\frac{1}{2}(e^{ax}+e^{-ax}).$$

3. La recherche de la résultante de deux forces égales P appliquées en un point M conduit, comme nous l'avons dit, à l'équation

Fig. 1.



fonctionnelle (3). Soient MA et MB ces deux forces égales, et désignons leur angle AMB par $2x$. La résultante R de ces deux

forces, nécessairement dirigée suivant la bissectrice MI de l'angle $2x$ peut être désignée par

$$2\mathrm{P}f(x),$$

$f(x)$ étant une fonction à déterminer. On décompose MA en deux forces dirigées suivant MA′ et MA″, ces forces faisant l'angle z avec MA; leur valeur commune sera

$$\frac{\mathrm{P}}{2f(z)}.$$

On opère de même sur MB que l'on remplace par deux forces MB′ et MB″, z étant encore l'angle de MB avec chacune de ces composantes. Or on peut composer d'abord MA″ et MB″, puis MA′ et MB′; on obtient ainsi deux forces dirigées suivant la bissectrice MI, et leur somme doit donner la résultante de MA et MB. On arrive ainsi à la relation

$$\frac{\mathrm{P}}{f(z)}f(x-z)+\frac{\mathrm{P}}{f(z)}f(x-z)=2\mathrm{P}f(x),$$

c'est-à-dire

$$f(x-z)+f(x-z)=2f(x)f(z).$$

Nous allons voir que, dans le cas actuel, la solution à adopter de cette équation fonctionnelle est $f(x)=\cos x$. En effet pour $x=\frac{\pi}{2}$, il faut nécessairement que $f(x)=0$, les deux forces étant alors égales et de sens contraires. De plus, $f(x)$ est positif pour x compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, la résultante étant dans l'angle des deux forces inférieur à π. Puisque

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0, \tag{4}$$

nous sommes dans le premier des cas envisagé au paragraphe 2, c'est-à-dire que $f(x)$ est de la forme $\cos ax$, et, d'après (4), la constante a est égale à l'unité. La résultante est donc égale à

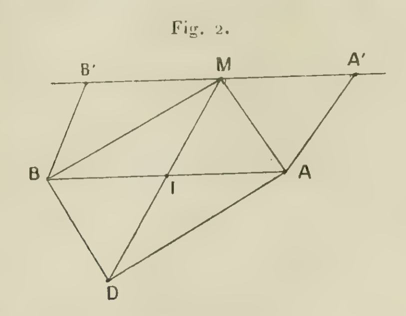
$$2\mathrm{P}\cos x,$$

ce qui conduit à la composition de deux forces égales à P, d'après la règle du parallélogramme (ici un losange).

4. Quand on a traité, comme nous venons de le faire, le cas des forces égales, on passe aisément au cas général.

On prend d'abord le cas de deux forces rectangulaires MA et MB. Menons par M une parallèle à la seconde diagonale du rectangle

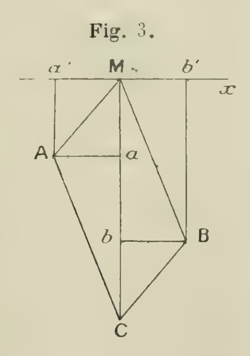
Fig. 2.



construit sur MA et sur MB, et formons les losanges MIBB′ et MIAA′. La force MB peut être remplacée par les forces MI et MB′ (cas précédent), et de même MA par MA′ et MI. Les forces MB′ et MA′ se détruisent. Il reste donc, comme résultante de MA et MB la diagonale MD du rectangle.

On peut maintenant passer au cas de deux forces quelconques MA et MB. On mène Mx perpendiculaire à la diagonale MC du parallélogramme construit sur MA et MB. Décomposons MA en

Fig. 3.



deux forces rectangulaires Ma' et Ma, et pareillement MB en Mb' et Mb. Il est clair que Ma' et Mb' sont égales et de sens contraires. Il reste donc $Ma + Mb$, c'est-à-dire MC, ce qui démontre la règle du parallélogramme.

5. Nous allons traiter maintenant de la composition des forces en *statique non euclidienne*, et en supposant qu'il s'agisse de la géométrie de Lobatschewsky. Il suffit de se rappeler que dans cette géométrie, les droites menées par un point, une droite étant donnée, se partagent en *sécantes* et en *non sécantes*, qui sont séparées par les *deux* parallèles menées du point à la droite. Je rappelle encore qu'une ligne parallèle en un point à une droite conserve le caractère de parallélisme en tous ses points, et que deux droites sont réciproquement parallèles. De plus, la somme des angles d'un triangle est inférieure à deux droites; l'égalité à deux droites correspond à la géométrie euclidienne, où l'on se trouve aussi si deux perpendiculaires à une droite sont parallèles ([1]).

Nous allons, pour établir un résultat essentiel relatif à la statique non euclidienne, nous placer au même point de vue que M. Andrade, dans son très intéressant Ouvrage sur les principes de la Mécanique ([2]). En admettant les mêmes postulats relatifs aux vecteurs appliqués en un point, ce que nous avons dit (§ 3) pour la composition de deux forces égales appliquées en un point est applicable à la géométrie non euclidienne comme à la géométrie euclidienne. Le passage à deux forces inégales est moins immédiat, car les déductions du paragraphe 4 ne sont plus valables puisque l'on a mené des parallèles.

Soient deux forces rectangulaires P et Q ayant une résultante R qui fait l'angle α avec OP. Il est clair que R et α étant donnés, on aura P et Q. Soit donc

$$P = R g(\alpha),$$
$$Q = R h(\alpha).$$

Il faut déterminer les fonctions g et h. On aura évidemment

$$g(\alpha) = h\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right), \qquad g\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = h(\alpha)$$

et aussi

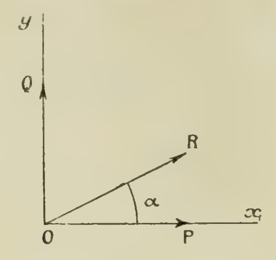
$$h(0) = 0, \qquad g(0) = 1.$$

([1]) Dans une thèse remarquable, M. Gérard a présenté sous une forme très simple les points essentiels de la géométrie de Lobatschewsky; on peut aussi consulter du même auteur un travail inséré en 1893 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

([2]) Jules Andrade, *Leçons de Mécanique physique*, 1898.

Prenons maintenant R′ symétrique de R par rapport à la bissectrice OI de l'angle xOy.

Fig. 4.

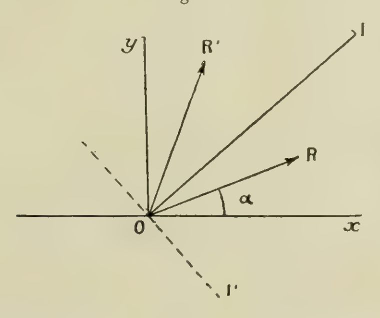


La résultante de R et de R′ est dirigée suivant OI, et a pour valeur

$$2R\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right),$$

mais d'autre part, menons la perpendiculaire $\overline{OI'}$ à $\overline{OI}$. On peut

Fig. 5.



décomposer R suivant OI′ et OI, et ces composantes sont respectivement

$$Rg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right) \qquad \text{et} \qquad Rg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

Il en est de même pour R′. Les forces dirigées suivant OI′ et son prolongement se détruisent, et il reste sur OI

$$2Rg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

Par suite

$$2R\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=2Rg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right).$$

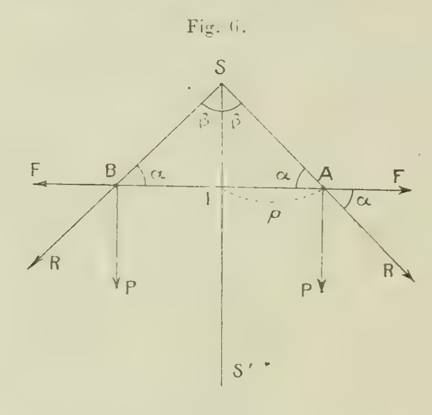
On a donc $g(\alpha) = \cos\alpha$, et par suite $h(\alpha) = \sin\alpha$.

Ainsi se trouve traité le cas de deux forces rectangulaires.

6. Appliquons le résultat précédent à un problème concernant la statique du solide invariable.

Soit AB une droite dans un solide plan, et deux forces égales P appliquées à ce solide perpendiculairement à AB. Elles ont une résultante dirigée suivant la perpendiculaire au milieu I de AB et ayant pour valeur $2P\Phi(p)$, Φ étant une fonction inconnue de la

Fig. 6.



demi-distance de A et B. Ajoutons au solide comme on le fait dans la composition des forces parallèles en statique élémentaire, deux forces F dirigées suivant le prolongement de AB. On a

$$P = R\sin\alpha \qquad \text{ou} \qquad R = \frac{P}{\sin\alpha}.$$

Si β est l'angle de SA avec la perpendiculaire SS′ à AB $\left(\text{on n'a pas } \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}\right)$, on aura la résultante des deux forces R, qui sera égale à

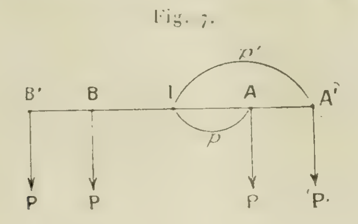
$$2R\cos\beta \qquad \text{ou} \qquad \frac{2P\cos\beta}{\sin\alpha}.$$

La résultante $2P\Phi(p)$ a donc cette valeur, d'où la formule *qui va être pour nous fondamentale :*

$$\Phi(p) = \frac{\cos\beta}{\sin\alpha}. \tag{5}$$

7. Il est possible d'obtenir pour $\Phi(p)$ une équation fonctionnelle qui nous permettra de déterminer cette fonction. Considérons

Fig. 7.



à cet effet les quatre forces P perpendiculaires à AB, IA étant égal à p, et IA' étant égal à p'; d'ailleurs $IA = IB$ et $IA' = IB'$.

Prenons de deux manières différentes la résultante des quatre forces P, regardées comme appliquées à un solide.

On a, d'une part,

$$2P\Phi(p) + 2P\Phi(p').$$

D'autre part, si l'on combine les forces P appliquées en A et A', puis celles appliquées en B et B', on trouve aisément

$$2\left[2P\Phi\left(\frac{p'-p}{2}\right]\Phi\left(\frac{p+p'}{2}\right).$$

On a donc l'identité relative à p et p' qui sont arbitraires

$$\Phi(p) + \Phi(p') = 2\Phi\left(\frac{p'-p}{2}\right)\Phi\left(\frac{p'+p}{2}\right),$$

qui peut encore s'écrire

$$\Phi(x+y) + \Phi(x-y) = 2\Phi(x)\Phi(y).$$

C'est l'équation fonctionnelle rencontrée plus haut.

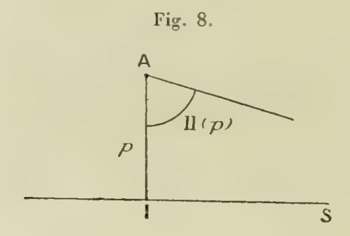
8. Supposons maintenant que le point S s'éloigne indéfiniment, β tendra vers zéro, et α deviendra l'angle de parallélisme du point A situé à la distance p de IS, c'est-à-dire l'angle que fait avec AI la parallèle menée par A à IS. On a donc, en faisant dans la formule fondamentale (5)

$$\beta = 0, \qquad \alpha = \Pi(p),$$

$$\Phi(p) = \frac{1}{\sin\Pi(p)}.$$

Dans la géométrie de Lobatschewsky, l'angle $\Pi(p)$ est aigu, $\Phi(p)$ est *supérieur à l'unité*.

Fig. 8.



Par suite, il résulte de l'équation fonctionnelle à laquelle satisfait $\Phi(p)$, que l'on a

$$(6) \qquad \Phi(p) = \operatorname{ch}\frac{p}{k},$$

k étant une constante, que l'on peut supposer positive. Cette constante k caractérise la géométrie non euclidienne envisagée.

En remplaçant $\operatorname{ch}\frac{p}{k}$ par sa valeur

$$\frac{1}{2}\left(e^{\frac{p}{k}} + e^{-\frac{p}{k}}\right),$$

on transforme de suite la formule (6) en la formule suivante

$$\operatorname{tang}\frac{\Pi(p)}{2} = e^{-\frac{p}{k}}.$$

Elle est fondamentale dans la géométrie de Lobatschewsky. La géométrie euclidienne correspond à $k = +\infty$.

9. Nous allons maintenant établir les formules essentielles de la trigonométrie non euclidienne, comme conséquences de la formule fondamentale (5).

Soit un triangle rectangle ABC. Nous avons

$$\operatorname{ch}\frac{AC}{k} = \frac{\cos\gamma}{\sin\beta}.$$

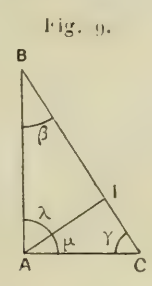
Donc, le côté AC et l'angle γ étant donnés, on aura l'angle β. D'autre part, si l'on mène AI perpendiculaire à BC, on a les

angles λ et μ de AI avec AB et AC $\left(\lambda+\mu=\frac{\pi}{2}\right.$, tandis que $\left.\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}\right)$. En appliquant la même formule, on obtient

$$(7)\qquad \operatorname{ch}\frac{AB}{k}=\frac{\cos\gamma}{\sin\beta},\qquad \operatorname{ch}\frac{AI}{k}=\frac{\cos\gamma}{\sin\mu},\qquad \operatorname{ch}\frac{BI}{k}=\frac{\cos\lambda}{\sin\beta}.$$

On aurait aussi IC. Donc on peut dire que tous les éléments de la figure ci-dessous s'expriment à l'aide de AC et γ qui fixent le

Fig. 9.

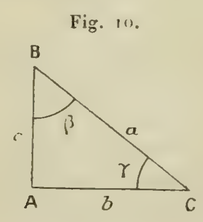


triangle rectangle. On aura alors nécessairement une relation entre les trois côtés. Pour avoir cette relation, peu importe de prendre un triangle ou un autre. Or, pour le triangle rectangle AIB, qui n'a rien de spécial, on a de suite, d'après les égalités (7), et en tenant compte de $\lambda+\mu=\frac{\pi}{2}$,

$$\operatorname{ch}\frac{AB}{k}=\operatorname{ch}\frac{AI}{k}\operatorname{ch}\frac{AC}{k}.$$

Nous pouvons donc dire que dans un triangle rectangle ABC,

Fig. 10.



l'angle droit étant A, on a, en désignant par a, b, c les côtés et les angles par β et γ,

$$\operatorname{ch}\frac{a}{k}=\operatorname{ch}\frac{b}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k},$$

c'est l'analogue du théorème de Pythagore, que l'on obtient en faisant $k=\infty$. Établissons d'autres relations entre les éléments de ce triangle. On a

$$\text{ch}^2\frac{b}{k} = 1+\text{sh}^2\frac{b}{k} = \frac{\cos^2\beta_1}{\sin^2\gamma_1}$$

$\left[\text{sh}\,\frac{b}{k}\right.$ est le sinus hyperbolique de $\frac{b}{k}$, c'est-à-dire $\left.\frac{1}{2}\left(e^{\frac{p}{k}}-e^{-\frac{p}{k}}\right)\right]$, de même

$$1+\text{sh}^2\frac{c}{k} = \frac{\cos^2\gamma_1}{\sin^2\beta_1}.$$

On en déduit

$$\frac{\text{sh}\,\frac{c}{k}}{\sin\gamma_1} = \frac{\text{sh}\,\frac{b}{k}}{\sin\beta_1}.$$

D'autre part, de

$$\text{ch}^2\frac{a}{k} = 1+\text{sh}^2\frac{a}{k} = \frac{\cos^2\beta_1\cos^2\gamma_1}{\sin^2\gamma_1\sin^2\beta_1}$$

se déduit la relation

$$\text{sh}^2\frac{a}{k} = \frac{\cos^2\beta_1\cos^2\gamma_1-\sin^2\gamma_1\sin^2\beta_1}{\sin^2\gamma_1\sin^2\beta_1}$$

qui, rapprochée de

$$\text{sh}^2\frac{c}{k} = \frac{\cos^2\gamma_1-\sin^2\beta_1}{\sin^2\beta_1},$$

donne

$$\frac{\text{sh}\,\frac{c}{k}}{\text{sh}\,\frac{a}{k}} = \frac{\sin\gamma_1}{1}.$$

On a donc dans le triangle rectangle ABC les relations

$$\frac{\text{sh}\,\frac{a}{k}}{1} = \frac{\text{sh}\,\frac{b}{k}}{\sin B} = \frac{\text{sh}\,\frac{c}{k}}{\sin C},$$

c'est-à-dire que les sh des côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés. On passe facilement de là à un *triangle quelconque*, en le décomposant en deux triangles rectangles. On a donc pour tout triangle la proportionnalité

$$\frac{\text{sh}\,\frac{a}{k}}{\sin A} = \frac{\text{sh}\,\frac{b}{k}}{\sin B} = \frac{\text{sh}\,\frac{c}{k}}{\sin C}.$$

10. Arrivons maintenant aux formules fondamentales entre trois côtés et un angle d'un triangle.

Nous menons la hauteur AI, et soient $AI = \beta$, $BI = \alpha$ et θ l'angle BAI.

Fig. 1'.

On rappelle que l'on a les formules d'addition pour les sh et ch

$$\operatorname{ch}(a - b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b,$$
$$\operatorname{ch}(a - b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b.$$

Or

$$\operatorname{ch}\frac{b}{k} = \operatorname{ch}\frac{\beta}{k}\operatorname{ch}\frac{a-\alpha}{k} \qquad \text{(dans le triangle rectangle AIC)},$$

c'est-à-dire

$$(8) \qquad \operatorname{ch}\frac{b}{k} = \operatorname{ch}\frac{\beta}{k}\left[\operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{\alpha}{k} - \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{\alpha}{k}\right]$$
$$= \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k} - \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{\alpha}{k}\operatorname{ch}\frac{\beta}{k}.$$

Or on voit facilement que

$$\operatorname{sh}\frac{\alpha}{k}\operatorname{ch}\frac{\beta}{k} = \operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos B,$$

car on a $\operatorname{sh}\frac{c}{k} = \dfrac{\operatorname{sh}\frac{\alpha}{k}}{\sin\theta}$, et il suffit par suite de montrer que

$$\operatorname{ch}\frac{\beta}{k} = \frac{\cos B}{\sin\theta},$$

ce qui est précisément la formule initiale (5).

La formule (8) *devient donc alors la relation fondamentale cherchée :*

$$(9) \qquad \operatorname{ch}\frac{b}{k} = \operatorname{ch}\frac{a}{k}\operatorname{ch}\frac{c}{k} - \operatorname{sh}\frac{a}{k}\operatorname{sh}\frac{c}{k}\cos B$$

à laquelle on peut joindre deux relations analogues. Elles corres-

pondent aux formules élémentaires de la trigonométrie euclidienne

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B \qquad (k = \infty)$$

et aux deux analogues.

On sait que, en trigonométrie sphérique, si R est le rayon de la sphère, on a

$$(10) \qquad \cos\frac{b}{R} = \cos\frac{a}{R}\cos\frac{b}{R} + \sin\frac{b}{R}\sin\frac{c}{R}\cos B.$$

On passe de (10) à (9) en prenant

$$R = ki \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

comme l'avait déjà remarqué Lambert.

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES

SILBERSTEIN (L.-L.). — THE THEORY OF GENERAL RELATIVITY AND GRAVITATION. — Based on a course of lectures delivered at the Conference on Recent Advances in Physics held at the University of Toronto in january 1921. — Un volume in-8°, IV + 141 pages, University of Toronto Press, 1922.

Parmi les nombreux ouvrages parus récemment sur la Relativité fort peu s'adressent à un public mathématiquement à la hauteur; de ce nombre, celui de M. Silberstein est un des meilleurs. Soldat d'avant-garde de cette doctrine, l'auteur n'en est pourtant pas un fanatique. Ceux qui, en effet, ont lu sa *Theory of Relativity* consacrée à la Relativité restreinte et qui date de 1914, ont pu se convaincre qu'à un style fort clair il joint un esprit assez critique pour le garder d'enthousiasmes parfois dangereux en matière de science. D'ailleurs, dans la Préface du présent Ouvrage, il dit fort judicieusement : « Certains de mes lecteurs regretteront peut-être de ne pas retrouver dans ce volume le ton enthousiaste dont sont imbibés les livres et pamphlets écrits sur ce sujet (avec l'exception notable des écrits d'Einstein lui-même). Cependant l'auteur serait le dernier homme à demeurer aveugle à l'admirable hardiesse et à la sévère beauté architecturale de la théorie d'Einstein. Mais il semble que l'on augmente des beautés de ce genre, plutôt qu'on ne les obscurcit, en adoptant un ton sobre et une présentation apparemment froide. »

Encore un point en faveur de notre auteur. Physicien distingué et très au courant des choses pratiques, il est aussi très bien informé sur tout ce qui se passe dans le domaine de la géométrie pure. Cette combinaison ne se rencontre pas tous les jours et elle ne contribue pas peu au succès des écrits de M. Silberstein.

Jetons un rapide coup d'œil sur son ouvrage où l'on retrouve les qualités de l'auteur. Il s'adresse à un public plus avancé que le Traité de 1914 et présuppose d'ailleurs la connaissance de la Relativité restreinte. Dans le premier Chapitre nous sommes introduits

au ds^2 de cette dernière, que l'auteur met sous diverses formes pour accoutumer le lecteur au changement de coordonnées. Il énonce et discute ces deux principes fondamentaux :

1° Les lignes $ds = 0$ représentent la propagation de la lumière dans le vide.

2° Les géodésiques définies par $\delta \int_A^B ds = 0$ représentent le mouvement d'un point libre dans l'Univers (au sens de Minkowski).

Ces principes sont encore vrais pour la Relativité générale pourvu que l'on adopte un ds^2 convenable. L'auteur discute la nécessité de l'introduire ainsi que le Principe de covariance. Il montre enfin comment des approximations convenables conduisent aux équations du mouvement de Newton.

Dans le troisième Chapitre il y a une discussion assez soutenue du Calcul des tenseurs (Calcul différentiel absolu de Levi-Civitá et Ricci) nécessité par le Principe de covariance. Suivent, enfin, les applications aux équations du champ, ainsi qu'une courte discussion des vérifications maintenant célèbres de la loi d'Einstein (périhélie de Mercure, déflexion des rayons lumineux).

Bref, cet Ouvrage au style clair et agréable, sans être bien entendu aussi compréhensif que le Traité de M. Hermann Weyl, offre au mathématicien désireux de s'instruire une introduction excellente à une théorie qui ne cessera pas de sitôt de passionner les savants.

SALOMON LEFSCHETZ.

EVANS (G.-C.). — FUNCTIONALS AND THEIR APPLICATIONS. SELECTED TOPICS INCLUDING INTEGRAL EQUATIONS. — American Mathematical Society Colloquium. Vol. V. Part 1. 1918. Published by the American Mathematical Society. New-York. In-8°. XII + 136 + 3 pages (une Note).

Tous les quatre ans lors de la Réunion d'été de l'*American Mathematical Society* il y a, pour régaler le public savant, deux séries de conférences — c'est le *Colloquium* de la Société et les conférences sont ensuite publiées par ses soins.

En 1916, MM. Evans et Veblen étaient chargés de la tâche, et ce sont les conférences de M. Evans que nous avons à considérer ici.

L'auteur, disciple fort distingué de M. Volterra et contributeur notable à la théorie des fonctions de lignes, nous a présenté sur ce sujet un fort intéressant Ouvrage. Son but, annoncé dans la Préface, de traiter surtout les questions encore en voie de croissance rapide, n'est certes pas pour en diminuer l'intérêt.

Ajoutons, histoire de le classifier, que ce Livre trouve tout naturellement sa place à la suite des deux monographies bien connues de M. Volterra; il les complète tant par l'addition de recherches récentes que par celle de questions qui n'avaient pu trouver place dans les ouvrages, cependant si riches, du grand géomètre italien.

Passons à un examen par conférences. Dans la première, l'auteur traite des notions fondamentales (continuités, dérivées, etc.), pour les courbes planes ou gauches, avec un court paragraphe sur les fonctions de surfaces ou de variétés. En passant, il étudie la fonction de Green en tant que fonction du contour frontière et obtient une relation due à M. Hadamard et généralisée par M. Lévy qui a fait là-dessus d'importants travaux.

La deuxième conférence est dévouée aux fonctionnelles complexes, notion aussi suggestive qu'importante, que l'on doit à M. Volterra (*Acta mat.*, 1889; *voir* aussi la Thèse de M. Paul Lévy). Deux fonctionnelles complexes

$$F[C] = F_1[C] + iF_2[C], \qquad \Phi[C] = \Phi_1[C] + i\Phi_2[C]$$

sont *isogènes* (Volterra) quand le rapport de leurs accroissements pris comme pour une fonctionnelle réelle donne lieu à une dérivée $\frac{dF}{d\Phi}$ bien déterminée pour C connue.

La relation d'isogénéité conduit à des développements quelque peu semblables à ce qui se rencontre dans la théorie des fonctions analytiques, et dont on n'a certes pas encore dit le dernier mot. Opérateur analogue au Δ^2 de Laplace, théorème quasi de Green se retrouvent ici, bien entendu en beaucoup plus compliqué. Mentionnons ce résultat fort intéressant : *Si* Φ *isogène à* F *n'a aucune singularité à l'intérieur d'une surface fermée* σ *et est connue pour toute* C *fermée de* σ, *elle l'est également pour*

toute C fermée intérieure à σ. Enfin, il y a toute une généralisation aux hypersurfaces (Volterra, *Rice*, *Institute Lectures*).

Les équations fonctionnelles implicites forment le sujet de la troisième conférence. L'auteur traite d'abord des approximations successives puis s'attache aux fonctionnelles *linéaires*. On dit que $T[\varphi(\overset{a}{\underset{b}{x}})]$ en est une si $T[c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2] = c_1 T[\varphi_1] + c_2 T[\varphi_2]$.

Ces fonctionnelles peuvent être représentées par une limite d'intégrale (Hadamard), une intégrale de Lebesgue (Lebesgue) ou de Stieltjes (Riesz). A l'occasion de cette dernière représentation, l'auteur donne des intégrales de Stieltjes une discussion aussi rapide que claire.

Avec le sujet de la quatrième conférence — équations intégro-différentielles du type de Bôcher — nous entrons dans un domaine où M. Evans a dû se complaire tout particulièrement. Maxime Bôcher fut, en effet, un de ses premiers maîtres et n'a sans doute pas peu contribué à l'orienter vers la direction qu'il a choisie.

Voici rapidement de quoi il s'agit. Considérons, avec Bôcher, l'équation

$$(1) \qquad \int_C \frac{\partial u(x,y)}{\partial n} ds = 0,$$

et supposons-la vérifiée par u pour tout cercle intérieur à un domaine plan du type que M. Borel a nommé *région de Weierstrass* (domaine où l'on peut opérer le prolongement analytique). En évaluant de deux manières

$$\int\int \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} d\sigma = \int\int \frac{\partial u}{\partial r} dr\, d\theta,$$

on obtient le théorème de la moyenne

$$u_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u\, d\theta.$$

Ceci permet de démontrer que u, solution de (1) et assujettie à prendre sur une courbe simple fermée une série continue donnée de valeurs, est unique. Comme il y a déjà une fonction harmonique satisfaisant à ces conditions, u coïncide avec elle et (1) *est équivalente à l'équation de Laplace.* Fait remarquable, on le

voit, il n'y a pas eu besoin de s'occuper des dérivées secondes qui peuvent même ne pas exister.

De même, au lieu de l'équation de Poisson, on aura

$$\int_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int\int f(x, y) dx dy,$$

où C est un contour quelconque de la région. On conçoit les généralisations auxquelles ceci se prête et qui forment l'objet de cette conférence.

Enfin, comme dernier sujet, M. Evans nous offre certaines généralisations des équations intégrales : équations intégrales de Stieltjes, fonctions permutables (Volterra, Evans), surtout applications de la *General Analysis*, de M. E.-H. Moore. La *General Analysis* dépasse de beaucoup en portée les équations intégrales. M. Evans, en quelques pages des plus habiles, a réussi à nous donner à la fois une idée claire de la doctrine de M. Moore et de ses applications aux équations intégrales.

SALOMON LEFSCHETZ.

VEBLEN (OSWALD). — ANALYSIS SITUS. — American Mathematical Society Colloquium. Vol. V. Part. 2, 1922. Published by the Society, New-York. In-8°. VII + 150 pages.

On sait que l'objet de l'*Analysis situs* est de trouver ce qu'il y a d'invariant dans une figure transformée de façon biunivoque et continue en une autre, dite *homéomorphe* à la première. Deux tendances y sont bien en évidence aujourd'hui. Un premier groupe de chercheurs, fort actif dans ces dernières années, étudie surtout les questions *locales*, où la continuité, les axiomes, etc. jouent un gros rôle. Pour un autre, au contraire, il s'agit surtout de l'étude d'une multiplicité dans son ensemble, de la caractériser par certains entiers, certaines propriétés simples. Les considérations de continuité ne disparaissent pas complètement, loin de là. Mais ayant franchi le cap de quelques théorèmes d'existence, quelques axiomes, il reste toute une vaste et fort importante théorie; on s'y occupe surtout de décrire les choses à l'œil nu (sans microscope),

comme les verrait quelqu'un emprisonné dans la multiplicité sans chance d'en sortir.

Voilà 27 ans qu'a paru au *Journal de l'École Polytechnique* le magnifique mémoire où Poincaré a véritablement jeté les bases de l'*Analysis situs* des multiplicités, mémoire suivi de plusieurs compléments considérables. Des prédécesseurs, il en eut de fort illustres, quoiqu'un seul, Betti, se soit occupé de multiplicités à plus de deux dimensions. Après Poincaré, la plupart des problèmes nouveaux relatifs aux multiplicités supérieures étaient posés et, à leur solution, on n'a ajouté que peu à ce qu'il nous a laissé. C'est justement aux questions qui ont le plus intéressé Poincaré que M. Veblen a consacré son livre.

Partons, avec notre auteur, de la *cellule à n dimensions*. En langage technique c'est une figure homéomorphe à la pyramide généralisée. Pensons à une pyramide à n dimensions que l'on aurait déformée de façon à en faire rebomber les faces des diverses dimensions. Donnons-nous maintenant une collection de cellules, puis collons-en les faces deux à deux, de manière à obtenir quelque chose qui ressemble à une surface subdivisée en triangles curvilignes. On aura ainsi le complexe à n dimensions C_n. S'il est fermé, que chaque point en soit intérieur à une cellule en entier dans C_n, on a la multiplicité M_n.

Soient donc M_n une multiplicité (pour simplifier légèrement nous laissons les C_n de côté), $a_1^k, a_2^k, \ldots, a_{\alpha_k}^k$ les faces à k dimensions de ses cellules, η_{ij}^k un nombre égal : à 1 si a_i^{k-1} fait partie de a_j^k; à zéro autrement. La matrice

$$H_k = \| \eta_{ij}^k \|$$

aura α_{k-1} lignes et α_k colonnes. L'ensemble des n matrices H_k décrit complètement M_n. Par exemple, pour l'hypersphère subdivisée complètement en pyramides, elles seront toutes de la forme

$$\left\| \begin{matrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{matrix} \right\|.$$

Toute solution des congruences

$$(1) \qquad \sum_{1}^{\alpha_k} {}_j \eta_{ij}^k x_j \equiv 0 \pmod 2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, \alpha_{k-1})$$

définit un *circuit* à k dimensions (cycle). a_j^k en fera partie suivant que x_j est impair ou pair. Soit ρ_k le rang de H_k. Les frontières des a^{k+1} sont des circuits, d'où ρ_{k+1} solutions distinctes correspondantes du système (1). Le nombre total de solutions est d'ailleurs $\alpha_k - \rho_k$. Posons

$$R_k - 1 = \alpha_k - \rho_k - \rho_{k+1}.$$

Les *entiers* R_k *sont des invariants* de M_n, en ce sens qu'ils sont les mêmes pour deux M_n homéomorphes (Veblen et Alexander). M. Veblen nomme R_k *connectivité d'ordre* k. L'invariance n'est guère facile à démontrer. Enfin, on a la relation de dualité $R_k = R_{n-k}$ et une sorte de généralisation du théorème d'Euler

$$\sum_0^n {}_k(-1)^k \alpha_k = 1 + (-1)^n + \sum_1^{n-1} {}_k(-1)^k(R_k - 1).$$

Passons maintenant aux *multiplicités orientables*. On sait qu'orienter un segment AB revient à spécifier l'ordre dans lequel on a nommé les extrémités A, B. Prenons maintenant $n = 2$ et soit $A_1 A_2 A_3$ un triangle. On convient de dire que $A_i A_j A_k$ le représente ou représente son opposé suivant que la permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix}$ contient un nombre pair ou impair d'inversions. A $A_i A_j$, $A_j A_k$, $A_k A_i$, considérés comme éléments frontières de $A_i A_j A_k$ on attribue le sens indiqué par la manière dont on vient de les nommer.

Supposons qu'il soit possible d'orienter, c'est-à-dire en somme de nommer, les triangles d'une C_2 ou d'une M_2 de manière que tout côté commun à deux triangles en reçoive toujours deux directions opposées. On dit alors que C_2 ou M_2 sont *orientables*, dans le cas contraire qu'ils ne le sont pas. Quant à l'orientation, si elle est possible, elle peut se faire de deux manières, chacune déterminant par convention une M_2 ou C_2 opposée à celle relative à l'autre. L'extension à une C_n ou une M_n est immédiate.

Regrettons en passant le choix du terme *orientable*, au lieu de *bilatère* peut-être un peu moins propre, mais certes largement consacré par l'usage.

Attribuons maintenant aux a_i^k des sens bien définis et soit cette fois $e_{ij}^k = 0$ si a_i^{k-1} n'appartient pas à la frontière de a_i^k, $= \pm 1$

si $\pm a_i^{k-1}$ y appartient. On peut répéter pour la matrice E_k, dont les e_{ij}^k sont les termes, ce que l'on a dit pour les H_k, sauf à remplacer les congruences (mod 2) par des équations. Au lieu des R_k on obtient cette fois les *nombres de Betti* P_k et des relations que nous nous dispenserons d'écrire (différentes suivant que M_n est ou bien n'est pas orientable).

On perçoit un avantage des nombres R_k : dans leur définition la question d'orientation peut être laissée de côté. En pratique, il semble bien que les nombres de Betti jouent un rôle prépondérant. Ces nombres sont d'ailleurs reliés de manière fort simple. Les diviseurs élémentaires sont, tout comme les P_k et les R_k, des invariants de M_n (coefficients de torsion); soit δ_k le nombre de ceux de E_k qui sont pairs. On a

$$R_k - P_k = \delta_{k-1} + \delta_k.$$

A part cette dernière relation, la discussion relative aux nombres de Betti et aux coefficients de torsion remonte à Poincaré.

Ce coup d'œil rapide aura donné au lecteur une idée du plan de M. Veblen. Il discute en détail les cas $n = 1$, 2, puis passe à n quelconque. Enfin, dans un dernier Chapitre, il effleure quelques autres questions se rapportant surtout au *groupe* d'une M_n.

Rigueur parfaite, langage précis, chaque mot à sa place et aucun de trop (au contraire parfois), caractérisent tout autant ce travail que les autres de M. Veblen. On voudrait quelques applications, plus d'illustrations pour une théorie si difficile, mais il faut savoir gré à l'auteur pour avoir accompli une tâche fort loin d'être aisée. Ce livre, le premier que l'on ait écrit sur l'*Analysis situs*, constitue une fort bonne introduction au genre d'études qui y sont traitées, une digne et notable addition à la littérature scientifique.

SALOMON LEFSCHETZ.

MÉLANGES.

DEUX LEÇONS SUR CERTAINES ÉQUATIONS FONCTIONNELLES ET LA GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE

(*Suite et fin*);

PAR M. ÉMILE PICARD.

II.

11. On a donné diverses images de la géométrie non euclidienne de Lobatschewsky. Une des plus simples se rapporte aux points d'un demi-plan. Envisageons donc les points d'un *demi-plan*, par exemple du demi-plan situé au-dessus de l'axe des x. Reprenons à cet effet la transformation

$$Z = \frac{az + b}{cz + d},$$

a, b, c, d étant réels, avec

$$ad - bc = 1.$$

Si l'on pose

$$z = x + iy,$$
$$Z = X + iY,$$

et si l'on désigne par z_0 le conjugué de z, on a de suite

$$dx^2 + dy^2 = dz.dz_0$$

et

$$dZ\, dZ_0 = \frac{dz\, dz_0}{(cz + d)^2 (cz_0 + d)^2}.$$

Comme

$$Y = \frac{y}{(cz + d)(cz_0 + d)},$$

on obtient immédiatement

$$\frac{dX^2 + dY^2}{Y^2} = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}.$$

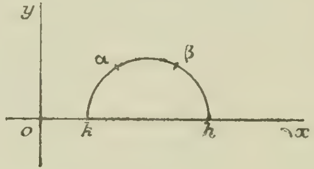
On peut donc dire que

$$\frac{ds}{y}, \quad (ds^2 = dx^2 + dy^2)$$

est un invariant pour une transformation linéaire.

12. Ceci posé, considérons les circonférences normales à l'axe des x. Par deux points α et β du demi-plan supérieur passe une

Fig. 12.

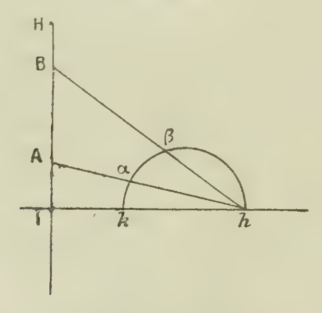


circonférence orthogonale à Ox. Soient h le point de rencontre avec cet axe tel que β soit entre α et h, et k le point de rencontre tel que α soit entre β et k. Formons le rapport anharmonique des quatre points α, β, h, k :

$$\rho(\alpha, \beta) = \frac{\alpha - h}{\alpha - k} : \frac{\beta - h}{\beta - k},$$

où α, β, h et k sont les affixes des points représentés par les mêmes

Fig. 13.



lettres. La fonction ρ, on le voit de suite, est une quantité positive et supérieure à l'unité car $\left|\frac{\alpha - h}{\beta - h}\right| > 1$ et $\left|\frac{\beta - k}{\alpha - k}\right| > 1$. Désignons par $D(\alpha, \beta)$ l'expression

$$\log \rho(\alpha, \beta),$$

où il s'agit du logarithme népérien. Nous donnerons à $D(\alpha, \beta)$ le nom de *distance des deux points* α *et* β, et nous allons voir facilement une propriété de cette distance.

A cet effet, faisons une inversion avec h comme centre. On obtiendra une droite IH normale à Ox. Le rapport anharmonique restant invariant par l'inversion, on a le rapport anharmonique des quatre points I, A, B, H sur la droite IH, ce qui donne

$$\frac{\text{IB}}{\text{IA}}.$$

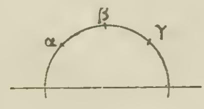
On conclut de là que, si l'on a dans le demi-plan trois points α, β, γ sur une même circonférence normale à Ox, on a

$$\rho(\alpha, \beta).\rho(\beta, \gamma) = \frac{\text{IB}}{\text{IA}}\cdot\frac{\text{IC}}{\text{IB}} = \frac{\text{IC}}{\text{IA}} = \rho(\alpha, \gamma).$$

Si donc nous appelons *points en ligne droite* trois points situés comme l'indique la figure, on a

$$D(\alpha, \gamma) = D(\alpha, \beta) + D(\beta, \gamma).$$

Fig. 14.



C'est la propriété additive des longueurs pour trois points en ligne droite.

13. Cherchons maintenant la *distance* élémentaire entre deux points z, $z + dz$. Partons de

$$\rho(z, z + dz) = \frac{\text{IB}}{\text{IA}} = 1 + \frac{\text{AB}}{\text{AI}}.$$

A cause de l'invariance de $\dfrac{ds}{y}$, on a

$$\frac{ds}{y} = \frac{\text{AB}}{\text{AI}},$$

puisque, sur IAB, AB est l'accroissement de IA. Donc

$$\log\rho(z, z + dz) = \log\left(1 + \frac{ds}{y}\right)$$

et ce logarithme est égal à $\frac{ds}{y}$, aux infiniment petits près d'ordre supérieur. Nous avons ainsi finalement

$$D(z, z + dz) = \frac{ds}{y}.$$

14. Nous sommes maintenant en mesure de donner sur le *demi-plan* une image de la géométrie non euclidienne de Lobatschewsky du *plan entier*. Appelons *droites* les demi-circonférences normales à l'axe Ox. La *distance* entre deux points α et β est l'expression $D(\alpha, \beta)$ définie plus haut, et nous avons vu la propriété additive des distances pour des points situés *en ligne droite non euclidienne*.

Il résulte de l'invariance signalée plus haut que l'on peut poser le principe de superposition de deux *segments de droites égaux* $\overline{\alpha\beta}$ et $\overline{\alpha'\beta'}$. Ils sont susceptibles de coïncider par un déplacement correspondant à une substitution du type envisagé plus haut

$$\left(z, \frac{az + b}{cz + d}\right).$$

Les *déplacements* précédents sont des déplacements à *trois* paramètres. Toutes les hypothèses de la géométrie euclidienne se trouvent donc réalisées ici, sauf le postulat des parallèles.

D'après la définition même de la distance non euclidienne, une *droite* (dans l'image une circonférence normale à Ox) a *deux* points à l'infini, qui sont, dans les figures ci-dessus, les points h et k. On voit bien alors que, une *droite* D étant donnée, on peut mener par un point A du plan *deux* parallèles à cette *droite*, c'est-à-dire deux droites rencontrant celle-ci à l'infini. Parmi les *droites* passant par A, les unes rencontrant D, les autres ne la rencontrent pas : il y a donc des *sécantes* et des *non-sécantes* séparées par les deux parallèles. Quant aux angles, les angles non euclidiens sont identiques aux angles de l'image sur le demi-plan.

15. Diverses remarques résultent immédiatement de l'image qui vient d'être donnée de la géométrie non euclidienne. Ainsi il est évident qu'il y a des triangles dont les trois angles sont nuls. Remarquons aussi que pour deux droites non sécantes ni parallèles, il y a une perpendiculaire commune ; il y a, en effet, dans le

demi-plan, une circonférence orthogonale aux deux circonférences représentant les droites, qui a pour centre le point où l'axe radical de ces deux circonférences rencontre l'axe Ox.

Un point un peu moins immédiat est celui des *circonférences non euclidiennes*. Menons par un point A des droites (non euclidiennes) de même longueur; on demande le lieu de leurs extrémités. Si a est l'affixe de A, les substitutions linéaires du type envisagé dans toute cette théorie sont

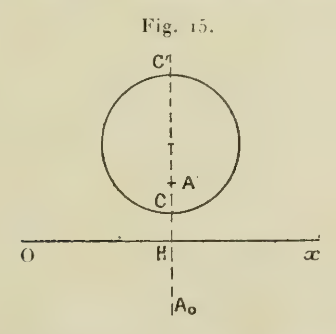
$$\frac{Z-a}{Z-a_0} = e^{i\theta}\frac{z-a}{z-a_0}.$$

Elles correspondent à une rotation d'un angle θ. Soit donné un point B répondant à l'affixe b, quel va être sur le demi-plan le lieu des points B' tels que la distance AB' égale la distance AB (circonférence non euclidienne de centre A)? Ce lieu est donné par l'équation

$$\frac{Z-a}{Z-a_0} = e^{i\theta}\frac{b-a}{b-a_0}$$

quand θ varie, en représentant par Z l'affixe de B'. Comme $e^{i\theta}$ décrit une circonférenee, Z décrira une circonférence. Donc *la*

Fig. 15.



circonférence non euclidienne a pour image une circonférence du demi-plan. Il est aisé de voir que cette dernière circonférence coupe la perpendiculaire menée par A à Ox en deux points C et C' conjugués harmoniques par rapport à A et à A_0 (symétrique de A par rapport à Ox); d'ailleurs, CC' est un diamètre de la circonférence. On voit également qu'une circonférence non euclidienne est perpendiculaire à ses rayons, c'est-à-dire aux droites non euclidiennes passant par son centre.

16. Nous venons de voir qu'une circonférence du demi-plan ne coupant pas l'axe des x représente une circonférence non euclidienne. Le centre de celle-ci correspond au point A sur le diamètre perpendiculaire à Ox, tel que A et A_0 soient conjugués par rapport à la circonférence.

Considérons le cas particulier d'une circonférence du demi-plan tangente à l'axe Ox en un point H. Elle représente une courbe qui est normale à une infinité de *droites* parallèles (les circonférences orthogonales en H à Ox). On a donc une courbe dans le plan non euclidien, dont toutes les normales *sont des droites parallèles;* c'est ce que Lobatschewsky appelait un *horicycle*. On peut la regarder comme la limite d'une circonférence dont le centre s'éloigne indéfiniment (dans la figure ci-dessus, on avait

$$\overline{HA}^2 = \overline{HC}.\overline{HC'};$$

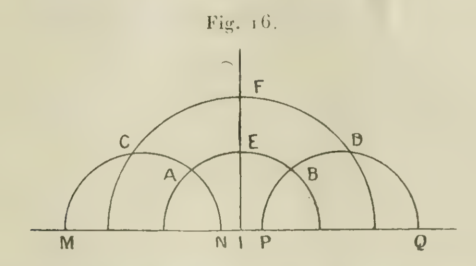
ici HC = o, donc HA = o; le centre non euclidien correspondant à A s'éloigne par suite indéfiniment).

Je dirai un mot des *équidistantes* à une droite. Dans la géométrie non euclidienne, une droite étant donnée, le lieu des points équidistants d'une droite n'est pas une droite. On démontre facilement que les équidistantes d'une droite sont représentées par des circonférences coupant l'axe des x aux deux points de rencontre de cet axe avec la demi-circonférence représentant la droite. Ces courbes sont les *hypercycles* de Lobatschewsky. Un hypercycle est en somme un cercle dont tous les rayons sont perpendiculaires à une même droite.

17. Arrêtons-nous un moment sur le quadrilatère de *Saccheri*. Quoiqu'il se termine par une erreur, le travail d'un Jésuite italien, le père Saccheri, paru en 1733 sous le titre pittoresque « *Euclides ab omni nævo vindicatus* » restera dans l'histoire de la géométrie non euclidienne. Le père Saccheri veut démontrer le postulatum d'Euclide, en établissant que l'on rencontre des contradictions si l'on n'admet pas ce célèbre postulat. Considérons avec lui un quadrilatère ABCD, dans lequel deux côtés AC, BD sont égaux, et où les angles A et B sont égaux à un angle droit. Par raison de symétrie, les angles C et D sont égaux, mais ils peuvent être droits, aigus ou obtus. Si l'on admet l'hypothèse euclidienne, les angles C

et D sont droits. Saccheri croit pouvoir montrer que l'on arrive à des contradictions, si l'on n'est pas dans le cas de l'angle droit; cette partie du Mémoire est mauvaise, mais l'auteur fait auparavant

Fig. 16.

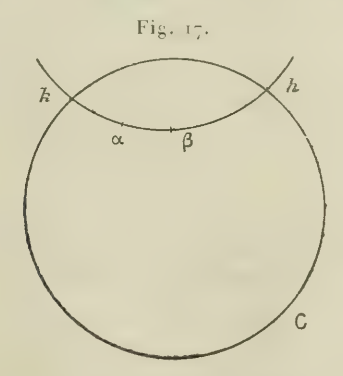


quelques remarques qui le placent malgré lui parmi les fondateurs de la géométrie non euclidienne. En fait, dans la géométrie de Lobatschewsky, les angles C et D sont aigus, comme on le voit de suite sur la figure image ci-dessus, où l'on a supposé, comme il est loisible, que la droite EF joignant les milieux E et F des côtés AB et CD est représentée sur l'image par une droite perpendiculaire à la frontière du demi-plan.

La figure est symétrique par rapport à la droite IEF. Les angles A et B sont droits, tandis que les angles C et D sont aigus.

18. On peut avoir une autre image de la géométrie non eucli-

Fig. 17.



dienne en envisageant, au lieu d'un demi-plan, l'intérieur d'une circonférence. Il suffit en effet de transformer le demi-plan en un cercle, ce qui peut se faire par inversion. Les droites correspondent alors à des circonférences orthogonales à C. Deux

points α, β déterminent une droite, et le logarithme du rapport anharmonique, pris comme plus haut, des points α, β, h, k, est la *distance* des points α, β.

En supposant que le demi-plan soit transformé dans le cercle

$$X^2 + Y^2 = 1,$$

un calcul facile donne comme carré de l'élément linéaire

$$\frac{dX^2 + dY^2}{[1 - X^2 - Y^2]^2}.$$

19. Une image des géométries non euclidiennes a été donnée d'abord par Cayley dans des Mémoires classiques et ensuite par Klein; Beltrami a établi de son côté des rapprochements très intéressants avec la théorie des surfaces à courbure constante. Dans son Livre *Sur une classe de surfaces algébriques* (1873), Darboux a considéré, pour la première fois, semble-t-il, une image des géométries non euclidiennes dans laquelle les droites étaient représentées par des circonférences normales à une sphère (ou à une circonférence dans le plan). Cette dernière représentation a été aussi utilisée postérieurement par Poincaré dans ses célèbres Mémoires sur les groupes fuchsiens (1881). Les quelques pages qui précèdent, se rapportant à la géométrie de Lobatschewsky, suffisent à montrer comment ces images, ces dictionnaires comme disait Poincaré, rendent presque immédiates certaines propositions de la géométrie non euclidienne, sur lesquelles notre intuition habituelle des choses de l'espace manque de prise.

LE THÉORÈME DE LAGUERRE-BOREL DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS ENTIÈRES;

PAR M. GEORGES VALIRON.

Dans un Mémoire récent [1] M. Montel a montré que l'emploi

---

(1) P. MONTEL, *Sur les fonctions entières de genre fini* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. XLVI, 1922, p. 252-265).

des suites normales de polynomes permet d'obtenir très simplement le théorème de Laguerre relatif aux zéros de la dérivée d'une fonction entière réelle n'ayant qu'un nombre fini de zéros complexes. En fait, le théorème de Laguerre, démontré pour la première fois par M. Borel [1], me semble avoir toujours été établi par la considération d'une suite de fonctions ayant pour limite la fonction entière considérée. Je me propose de montrer que l'application des méthodes ordinaires de la théorie des fonctions entières conduit aussi aisément au théorème de Laguerre-Borel et permet de donner d'autres résultats et notamment le suivant :

Le genre de la dérivée d'une fonction entière d'ordre fini quelconque ne dépasse jamais le genre de cette fonction.

La méthode consiste à utiliser la limite supérieure du module de la dérivée logarithmique donnée notamment par Boutroux et à employer le théorème de M. Jensen.

1. Je rappellerai les propositions suivantes [2] :

I. Si $f(z)$ est une fonction entière quelconque d'ordre fini ρ [3], ε un nombre positif arbitrairement petit et R un nombre positif suffisamment grand, $R > R_\varepsilon$, il existe entre R et 2R des nombres r pour lesquels

(1) $$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < r^{\rho-1+\varepsilon},$$

pourvu que le module de z soit égal à r.

II. Si $f(z)$ est d'ordre entier ρ et de genre $\rho - 1$, si petit que soit ε', il existe une suite de cercles $|z| = r$ de rayons indéfiniment croissants sur lesquels on a

(2) $$\left|\frac{f'(z)}{f(z)}\right| < \varepsilon' r^{\rho-1}.$$

---

(1) *Leçons sur les fonctions entières*, Chap. II.

(2) Les propriétés I et II sont des conséquences de celles données par Boutroux dans sa *Thèse;* la première partie de III est de M. Borel (*Leçons*, Chap. III), la deuxième résulte d'un théorème de M. Lindelöf sur le minimum du module (*Acta soc. sc. Fennicæ*, 1908, p. 8). J'ai donné la proposition IV dans le *Bulletin de la Société mathématique*, 1914.

(3) L'ordre est la limite supérieure pour r infini du rapport $\log_2 M(r) : \log r$, $M(r)$ étant le maximum du module de la fonction pour $|z| = r$.

III. Pour une fonction entière $f(z)$ d'ordre entier ρ et de genre $\rho - 1$ le rapport

$$\log M(r) : r^\rho$$

tend vers zéro lorsque r croît indéfiniment. Inversement, si, pour une fonction d'ordre ρ, ce rapport tend vers zéro et si, en outre, la série formée avec les puissances $-\rho$ des modules des zéros de la fonction est convergente, le genre est $\rho - 1$.

IV. Le rapport des logarithmes des modules maxima d'une fonction entière d'ordre fini et de sa dérivée tend vers 1 lorsque r croît indéfiniment.

Enfin, j'utiliserai le théorème de Jensen sous la forme générale suivante : Si $g(z)$ est une fonction méromorphe dans la couronne $r_0 \leqq |z| \leqq r$, n'ayant ni pôle ni zéro sur la circonférence $|z| = r_0$, et si $N(x)$ désigne le nombre des pôles et $N'(x)$ le nombre des zéros de cette fonction dans la couronne $r_0 < |z| \leqq x$, on a l'égalité

$$(3) \quad \int_{r_0}^{r} \frac{N'(x) - N(x)}{x} dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log|g(re^{i\varphi})|\, d\varphi + K_1 + K_2 \log r,$$

K_1 et K_2 étant deux constantes dépendant de r_0 (pour $r_0 = 0$, K_2 est nul).

2. Considérons d'abord une fonction entière *réelle* $f(z)$, d'ordre fini ρ, n'admettant qu'un nombre fini $2q$ de zéros complexes. Nous supposerons que $f(0)$ et $f'(0)$ ne sont pas nuls, ce qui ne restreint pas la généralité du résultat en vue. Soit $n(x)$ le nombre des zéros réels de $f(z)$ dans le cercle $|z| \leqq x$. D'après le théorème de Rolle, la dérivée $f'(z)$ possède au moins $n(x) - 1$ zéros réels dans ce même cercle. Entre deux zéros réels consécutifs de $f(z)$ nous prendrons au choix un seul zéro réel de $f'(z)$, ce sera le zéro fourni par le théorème de Rolle, un zéro multiple de degré s de $f(z)$ fournit de même un zéro de degré $s - 1$ de $f'(z)$; le nombre des zéros ainsi donnés par le théorème de Rolle est $n(x) - 1$ ou $n(x)$ ou $n(x) + 1$. Soit $q(x)$ le nombre des autres zéros, complexes ou non, de $f'(z)$ pour $|z| \leqq x$, $q(x)$ est une fonction discontinue *non décroissante*.

Appliquons l'égalité (3) de Jensen à la fonction $f'(z) : f(z)$ en

prenant $r_0 = 0$. $N(x)$ est égal à $n(x) + \lambda(x)$, $\lambda(x)$ étant égal à $2q$ à partir d'une certaine valeur de x; quant à $N'(x)$ il est au moins égal à $n(x) - 1 + q(x)$. $N'(x) - N(x)$, qui est nul pour les valeurs x inférieures au plus petit module α des zéros de $f(z)$ et de $f'(z)$, est donc au moins égal à $q(x) - 1 - 2q$; le premier membre de (3) est supérieur à

$$(4) \qquad \int_\alpha^r \frac{q(x)}{x}\,dx - (2q+1)\log r + \text{K},$$

K étant une constante.

Pour calculer une limite supérieure du second membre de l'égalité (3), il suffit d'appliquer les propositions I ou II suivant que le genre p de $f(z)$ est supérieur ou est égal à $\rho - 1$.

Dans le premier cas, le théorème I montre que le second membre de (3) est moindre que $(\rho - 1 - \varepsilon)\log r - \text{K}_1$. En comparant à la limite inférieure (4) du premier membre nous obtenons l'inégalité

$$\int_\alpha^r \frac{q(x)}{x}\,dx < (2q + \rho + \varepsilon)\log r + \text{K}',$$

valable pour une suite de valeurs indéfiniment croissantes de r. Comme $q(x)$ ne décroît pas, il ne peut donc pas surpasser la valeur $2q - \rho + \varepsilon$, c'est-à-dire $2q + \rho$ puisque ε est arbitrairement petit. Enfin, comme ρ diffère de p de moins d'une unité, l'entier $q(x)$ est au plus égal à $p + 2q$.

Dans le second cas, le théorème II donne de même une inégalité valable sur une suite de cercles de rayons indéfiniment croissants :

$$\int_\alpha^r \frac{q(x)}{x}\,dx < (2q + \rho)\log r - \log\frac{1}{\varepsilon'},$$

ε' étant arbitrairement petit pourvu que r soit assez grand. Il en résulte que $q(x)$ reste *inférieur* à $2q + \rho$, et puisque dans ce cas le genre p est égal à $\rho - 1$, $q(x)$ est encore au plus égal à $2q - p$.

La première partie du théorème de Laguerre est ainsi démontrée : *en dehors des zéros donnés par le théorème de Rolle il n'y a que $2q + p$ zéros réels ou complexes.* Il en résulte que le

nombre des zéros complexes augmente au plus de p par la dérivation, en particulier il n'augmente pas lorsque le genre est 0 ou 1. On sait que la limite ainsi obtenue pour le nombre des zéros complexes peut être effectivement atteinte, elle l'est pour e^{x^p+x} si p est impair et pour xe^{x^p} si p est pair.

La seconde partie du théorème de Laguerre se déduit aisément de ce premier résultat. Tout d'abord, si l'ordre n'est pas entier, on sait que le genre est la partie entière de l'ordre, il en est de même pour la dérivée puisque l'ordre est le même (proposition IV). Si l'ordre ρ est entier, on s'appuie sur ce que les séries formées avec les puissances $-\rho$ des modules des zéros pour la fonction et pour sa dérivée sont simultanément convergentes ou divergentes en vertu de la première partie du théorème. Alors, si le genre de $f(z)$ est $\rho-1$, ces deux séries convergent et, d'autre part, le rapport $\log|f(z)|:r^\rho$ tend vers zéro (théorème III), donc aussi le rapport $\log|f'(z)|:r^\rho$ d'après le théorème IV et, par suite, en vertu de la proposition III, $f'(z)$ est de genre $\rho-1$. Le même raisonnement montre que, si $f'(z)$ est de genre $\rho-1$, il en est de même de $f(z)$. Dans tous les cas, *le genre de $f'(z)$ est égal au genre de $f(z)$*. C'est la seconde partie du théorème de Laguerre [1].

La démonstration s'étend de suite au cas d'une fonction $F(z)$ réelle, holomorphe seulement pour $|z|\geqq R_0$, sauf à l'infini qui est un point essentiel; il suffit d'utiliser l'égalité (3) avec $r_0=R_0$ et de remarquer que le théorème de Rolle ne fournit plus que $n(x)-2$ zéros de la dérivée entre $n(x)$ zéros de la fonction (à moins que ces zéros ne soient de même signe). On obtient ainsi cette proposition énoncée par M. Maillet, sans avoir été, je crois, démontrée dans tous les cas par cet auteur :

Si la fonction réelle $F(z)$ *est holomorphe pour* $|z|\geqq R_0$,

---

(1) M. Montel montre seulement que le genre de $f'(z)$ est au plus égal à celui de $f(z)$, il est aisé de compléter son raisonnement. Sa méthode a l'avantage de montrer que si la fonction est de genre pair et de la forme $e^{-\alpha z^p}f(z)$, α positif et $f(z)$ de genre moindre que p, le nombre maximum $2q+p$ des zéros complexes peut être remplacé par $2q+p-2$; en outre elle met en évidence ce théorème de M. Polyà : « Toute fonction réelle de genre 0 ou 1 n'ayant que $2q$ zéros complexes est la limite d'une suite de polynomes n'ayant que $2q$ racines complexes ».

sauf au point à l'infini qui est un point essentiel d'ordre fini ρ *et de genre* p [c'est-à-dire est définie par l'égalité

$$F(z) = f(z)\,e^{\varphi(z)},$$

$f(z)$ étant une fonction entière réelle de genre p et d'ordre ρ et $\varphi(z)$ une fonction réelle holomorphe pour $|z| \geqq R_0$, l'infini compris], *et si cette fonction n'a que* $2q$ *zéros complexes à l'extérieur du cercle* $|z| \geqq R_0$, *sa dérivée n'a, en dehors des zéros fournis par le théorème de Rolle, que* $2q + p + K_2 + 1$ *autres zéros, complexes ou non, et est aussi de genre* p (K_2 est le nombre qui s'introduit dans le théorème de Jensen).

Le résultat reste valable pour une fonction de la forme $z^\alpha F(z)$, α étant réel et $F(z)$ de la forme indiquée ci-dessus.

Le théorème de Poulain [1] est une conséquence immédiate du théorème de Laguerre : *si* $f(z)$ *est réelle, de genre* p, *et possède* $2q$ *zéros complexes, la fonction*

$$\alpha f(z) + f'(z) \qquad (\alpha \text{ réel})$$

a au plus $2q + p$ *zéros complexes et est de genre* p *à moins que* $f(z)$ *ne soit précisément égal à* $Ae^{-\alpha z}$. Car les zéros de cette fonction sont ceux de la dérivée de $e^{\alpha z} f(z)$ qui est de genre 1 ou p suivant que p est inférieur ou égal à 1 ou est supérieur à *un*, la proposition relative au nombre des zéros complexes en résulte de suite $\Big[$on peut aussi appliquer directement la méthode précédente en prenant $g(z) = \alpha + \dfrac{f'(z)}{f(z)}\Big]$. Pour ce qui est du genre, les considérations précédentes montrent que le seul cas à examiner de nouveau est celui où $f(z)$ est de la forme $e^{kz}\varphi(z)$, $\varphi(z)$ étant de genre zéro. On a alors

$$\alpha f(z) + f'(z) = e^{kz}[\varphi'(z) + (k+\alpha)\varphi(z)]$$

et le coefficient de l'exponentielle est de genre zéro, le genre est bien 1 à moins que ce coefficient ne soit identiquement nul, donc

$$\varphi(z) = \text{const.}, \qquad k = -\alpha.$$

---

(1) *Voir* le Mémoire cité de M. Montel : JENSEN, *Acta math.*, t. 36, et un Mémoire important de M. POLYÀ, *J. für die Math.*, Bd. 145.

En répétant l'opération qui consiste à passer de $f(z)$ à $\alpha f(z) + f'(z)$, avec des valeurs de α différentes ou non, on obtient le théorème de Poulain pour les fonctions entières. Le théorème s'étend de suite aux fonctions $F(z)$ admettant un point singulier isolé essentiel d'ordre fini à l'infini. Si l'on désigne par $(N)'$ le nombre N ou $N - 1$ suivant que N est pair ou impair, l'énoncé est le suivant : *si la fonction* $F(z)$ *est réelle et de genre* p *et ne possède que* $2q$ *zéros complexes pour* $|z| \geqq R_0$ *et si*

$$g(x) = A_0 + \ldots + A_k x^k$$

est un polynome à racines réelles, la fonction

$$A_0 F(z) + A_1 F'(z) + \ldots + A_k F^{(k)}(z) \tag{5}$$

possède au plus $2q + (p + 1 + K_2)'k$ *zéros complexes et est de genre* p; elle n'a que $2q + k(p + K_2 + 1)$ zéros en dehors de ceux obtenus par l'application réitérée du théorème de Rolle. Dans le cas d'une fonction entière, $K_2 + 1$ est nul $(R_0 = 0)$ et la propriété relative au genre n'est valable que tant que $f(z)$ n'est pas solution de l'équation différentielle obtenue en égalant à zéro l'expression (5). Dans le cas du genre 0 ou 1, le nombre des zéros complexes n'augmente pas, on peut remplacer sous certaines conditions le polynome $g(x)$ par une fonction entière (*voir* le Mémoire de M. Polyà).

L'application du théorème de Laguerre-Borel à une fonction de la forme

$$z^\alpha e^{Q\left(\frac{1}{z}\right)} F(z),$$

où $Q(x)$ est un polynome réel de degré s, conduit à envisager le passage de $F(z)$ à

$$z^{s+1} F'(z) + R(z) F(z), \tag{6}$$

$R(z)$ étant un polynome réel de degré s. Ici encore, entre deux zéros réels de même signe de $F(z)$ se trouve un zéro au moins de l'expression (6) et l'on peut appliquer l'égalité de Jensen en prenant

$$g(z) = \frac{F'(z)}{F(z)} + \frac{R(z)}{z^{s+1}},$$

rien ne sera changé au résultat obtenu avec la dérivée, sauf que le

nombre K_2 aura une valeur différente. On pourra encore multiplier ces opérations. Considérons le cas particulier simple où l'on donne à s la même valeur et à $R(z)$ des valeurs constantes. y étant une fonction de z, posons

$$D_s^1 y = z^s \frac{dy}{dz}, \qquad D_s^m y = z^s \frac{d}{dz}(D_s^{m-1} y),$$

nous aurons l'énoncé suivant : *si* $F(z)$ *est réelle et de genre* p *et a* $2q$ *zéros complexes pour* $|z| \geqq R_0$, *et si*

$$g(x) = A_0 + \ldots + A_k x^k$$

est un polynome à racines réelles, la fonction

$$(7) \qquad A_0 F(z) + A_1 D_s^1 F + \ldots + A_k D_s^k F$$

a au plus $2q + (p + K_s + 1)' k$ *zéros complexes et est de genre* p.

Dans le cas des fonctions entières il importe de préciser la valeur de K_s. On peut appliquer l'égalité (3) avec $r_0 = 0$ en prenant

$$g(z) = z^s \frac{f'(z)}{f(z)} + \alpha.$$

$N'(x)$ est alors le nombre des zéros de $z^s f'(z) - \alpha f(z)$ et $N(x)$ celui de $f(z)$. La considération de la fonction $g(z) : z^s$ montre que, dans un intervalle $-x$, x contenant μ zéros réels de $f(z)$, $z^s f' + \alpha f$ en possède au moins $\mu - 1$ si s est pair, $\mu - 2$ si s est impair et μ si s est impair et α positif; nous dirons encore que ce nombre minimum de zéros est le nombre des zéros donnés par le théorème de Rolle, et nous appellerons $q(x)$ le nombre des autres zéros dans le cercle $|z| \leqq x$. $N'(x) - N(x)$ sera au moins égal à $q(x) - 2q - 1$, $q(x) - 2q - 2$, $q(x) - 2q$ suivant les cas. D'autre part, la limite du second membre de (3) est celle obtenue dans la démonstration du théorème de Laguerre augmentée de $s \log r$. Par suite, *dans le cas d'une fonction entière, le nombre des zéros complexes de la fonction transformée par la formule* (7) *est au plus :*

$$2q + k(s + p)',$$

si s est pair;

$$2q + k(s+p+1)',$$

si s est impair;

$$2q + k(s+p-1)',$$

si s est impair et si $g(x)$ a ses racines négatives.

Pour $s=0$ on retrouve le théorème de Poulain; le seul autre cas où le nombre des zéros complexes puisse ne pas augmenter par la transformation (7) est celui où $s=1$ et où les zéros de $g(x)$ sont négatifs. Ce sont les seuls cas qui pouvaient être intéressants pour les polynomes; le second a été étudié par Laguerre (*Œuvres*, t. I, p. 200), la transformation fait alors passer de la fonction $f(z) = \Sigma a_n z^n$ à la fonction $\Sigma a_n g(n) z^n$. Lorsque le genre est 0 ou 1, on peut remplacer le polynome $g(x)$ par une fonction entière, à zéros négatifs, de genre 0 ou 1; la fonction $\Sigma a_n \mathrm{G}(n) z^n$ n'aura pas plus de zéros complexes que $f(z)$ et sera au plus du même genre. Les diverses transformations indiquées par Laguerre s'appliquent sans modification aux fonctions réelles de genre 0 ou 1 ([1]).

3. Les résultats précédents s'étendent au cas où la fonction réelle $\mathrm{F}(z)$ a une infinité de zéros complexes, le nombre de ces zéros par rapport au nombre des zéros permis par l'ordre étant infiniment petit. D'une façon exacte, supposons que l'exposant de convergence ρ_1 de la suite des zéros complexes soit inférieur à l'ordre ρ de la fonction. Soient $\mathrm{N}'(x)$ et $\mathrm{N}(x)$ le nombre total des zéros de $\mathrm{F}'(z)$ et $\mathrm{F}(z)$ respectivement dans la couronne

$$\mathrm{R}_0 < |z| \leq x.$$

$q(x)$ le nombre des zéros complexes de $\mathrm{F}(z)$ et $q'(x)$ le nombre des zéros complexes ou non de $\mathrm{F}'(z)$ qui ne sont pas fournis par le théorème de Rolle. $\mathrm{N}'(x) - \mathrm{N}(x)$ est supérieur à

$$q'(x) - q(x) - 2$$

et le second membre de l'égalité (3) est moindre que $h \log r$,

---

([1]) M. Polyà a démontré ce résultat par la méthode de Laguerre en utilisant son théorème cité dans la note de la page 436.

h étant fixe. On aura donc, pour les valeurs r considérées dans l'énoncé du théorème de Boutroux,

$$(8) \qquad \int_{R_0}^{r} \frac{q'(x)}{x}\,dx < \int_{R_0}^{r} \frac{q(x)}{x}\,dx + h\log r.$$

Or, en tenant compte de l'hypothèse faite sur les zéros complexes, on voit que $q(x)$ est inférieur à $x^{\rho_1+\varepsilon}$, quel que soit le nombre positif ε, pourvu que x soit assez grand. il en est donc de même de l'intégrale du second membre de (8) et, par suite, de celle du premier. Comme l'inégalité obtenue a lieu pour une valeur au moins de r entre R et 2R, on en déduit par la méthode habituelle que $q'(x)$ est aussi inférieur à $x^{\rho_1+\varepsilon}$ à partir d'une valeur de x. C'est dire que l'exposant de convergence des zéros autres que ceux donnés par le théorème de Rolle est au plus ρ_1. On en déduit encore, par la méthode indiquée plus haut, que le genre de $F'(z)$ est égal à celui de $F(z)$. D'où ce résultat général :

Si l'on considère une fonction réelle $F(z)$ *qui est le produit d'une fonction réelle d'ordre* ρ *à zéros réels par une fonction réelle quelconque d'ordre* ρ_1 *moindre que* ρ, *les zéros de* $F'(z)$ *autres que ceux fournis par le théorème de Rolle ont un exposant de convergence au plus égal à* ρ_1, *et* $F'(z)$ *et* $F(z)$ *ont le même genre*. On a un résultat analogue pour les fonctions définies par la transformation (7).

On peut, de même, supposer que l'ordre est infini. Les notations restant les mêmes que dans le cas précédent, nous aurons, la fonction $F(z)$ étant réelle et n'ayant qu'un nombre fini de zéros complexes,

$$\int_{R_0}^{r} \frac{q'(x)}{x}\,dx < k\log r - \int_{0}^{2\pi} \log\left|\frac{F'(re^{i\varphi})}{F(re^{i\varphi})}\right| d\varphi.$$

Or, l'ordre de la fonction étant connu, on en déduit une limite supérieure du module de la dérivée logarithmique sur certains cercles et l'inégalité précédente donne une limite supérieure de $q'(x)$. Le résultat général que l'on obtient ainsi est que $q'(x)$ *est de l'ordre de grandeur de* $\log_2 M(r)$, *alors que la fonction peut avoir un nombre total de zéros de l'ordre de* $\log M(r)$. On

ne change rien en supposant que le nombre des zéros complexes de $F(z)$ est de l'ordre de $\log_2 M(r)$.

Par exemple, pour une fonction réelle telle que l'on ait, quel que soit ε, pourvu que r soit assez grand,

$$\log_2 M(r) < r^{\gamma+\varepsilon},$$

et dont la suite des zéros complexes a un exposant de convergence au plus égal à γ, la dérivée n'aura en dehors des zéros réels donnés par le théorème de Rolle qu'une suite de zéros d'exposant de convergence au plus égal à γ.

4. Considérons maintenant une fonction $F(z)$ d'ordre fini ρ et absolument quelconque. L'égalité (3) appliquée à la dérivée logarithmique de cette fonction et le théorème I montrent que, $n(x)$ étant le nombre total des zéros de $F(z)$ et $n'(x)$ celui de $F'(z)$ dans la couronne $R_0 < |z| \leqq x$, on a, *quel que soit* r,

$$\int_{R_0}^{r} n'(x)\frac{dx}{x} < \int_{R_0}^{2r} n(x)\frac{dx}{x} + h\log r.$$

En multipliant les deux membres de cette inégalité par r^{-1-k} $(k > 0)$ et intégrant de R_0 à R, on obtient

$$\int_{R_0}^{R} \frac{dr}{r^{1+k}} \int_{R_0}^{r} \frac{n'(x)\,dx}{x} < 2^k \int_{R_0}^{2R} \frac{dr}{r^{1+k}} \int_{R_0}^{r} \frac{n(x)\,dx}{x} + h_1,$$

h_1 étant une constante (¹). En intégrant par parties dans les deux membres, on trouve la nouvelle inégalité

$$(9) \qquad \int_{R_0}^{R} \frac{n'(x)\,dx}{x^{1+k}} < 2^k \int_{R_0}^{2R} \frac{n(x)\,dx}{x^{1+k}} + \varphi(R)$$

avec

$$\varphi(R) = \frac{1}{R^k}\left[\int_{R_0}^{R} \frac{n'(x)}{x}\,dx - 2^k \int_{R_0}^{2R} \frac{n(x)}{x}\,dx\right] + h_1.$$

La première intégrale figurant dans $\varphi(R)$ est moindre que

$$\log M'(R) + K\log r,$$

(¹) *Voir* mon article *Sur les fonctions entières d'ordre fini* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 1921).

$M'(r)$ désignant le maximum du module de $F'(z)$ pour $|z| = r$, cela résulte de la formule de M. Jensen appliquée à $F'(z)$. En s'appuyant sur la proposition IV, on obtient

$$\varphi(R) < 2\frac{\log M(R)}{R^k} + h_2.$$

Supposons alors que l'ordre ρ soit entier et que le genre soit $\rho - 1$. D'après le théorème III, $\varphi(R)$ reste borné si l'on prend $k = \rho$, et, d'autre part, l'intégrale du second membre de l'inégalité (9) est bornée (*voir* mon Mémoire cité ci-dessus); il en est donc de même de l'intégrale du premier membre. La série formée avec les puissances $-\rho$ des modules des zéros de $F(z)$ est convergente. En appliquant le théorème III on voit que le genre de $F'(z)$ est $\rho - 1$.

Le genre de la dérivée d'une fonction d'ordre entier ne peut surpasser le genre de la fonction.

On sait que MM. Wiman et Lindelöf ont donné des exemples de cas où le genre de la dérivée d'une fonction d'ordre ρ est effectivement $\rho - 1$. D'après mon Mémoire cité, pour que cette circonstance se produise il est nécessaire que le rapport $\log M(r) : r^\rho$ tende vers zéro tandis que l'intégrale

$$\int_\alpha^r \frac{\log M(x)}{x^{\rho+1}}\,dx$$

croît indéfiniment. Dans les autres cas le genre se conserve. Si une fonction entière $f(z)$ de genre $\rho - 1$ est telle que l'intégrale précédente diverge, sa dérivée est de genre $\rho - 1$ d'après le théorème précédent et les fonctions $f(z) - a$, $a \neq 0$, sont toutes de genre ρ d'après une proposition que j'ai donnée ailleurs ([1]). Les exemples de MM. Wiman et Lindelöf rentrent dans ce cas. Mais peut-il arriver que, *toutes les fonctions $f(z) - a$ étant de genre ρ, la dérivée $f'(z)$ soit de genre $\rho - 1$*? C'est là une question qui semble difficile à élucider, M. Collingwood m'a dit l'avoir résolue par la négative.

([1]) *Comptes rendus*, 18 avril 1922.

5. Je ferai encore une remarque au sujet du théorème de M. Hadamard sur le module minimum d'un produit canonique. On sait que cette proposition est une conséquence presque immédiate de celle relative au module maximum, mais que l'énoncé a une forme différente par suite de la nécessité d'exclure le voisinage des zéros. On peut donner aux deux énoncés une forme analogue en introduisant les valeurs moyennes. Considérons le facteur primaire de Weierstrass

$$E(u, p) = (1 - u)e^{u + \ldots + \frac{u^p}{p}}$$

et posons

$$\varphi(u) = |u| + \ldots + \frac{|u|^p}{p} + \log(1 + |u|),$$

de telle sorte que l'on a

(10) $$\log|E(u, p)| < \varphi(u).$$

On en déduit de suite

(11) $$\log|E(u, p)| > -\varphi(u) + \log(1 - |u|) - \log(1 + |u|) = -\varphi(u) - \log\left(\frac{1 + |u|}{1 - |u|}\right).$$

Pour calculer une limite supérieure du module du produit canonique

$$P(z) = \prod_1^{\infty} E\left(\frac{z}{a_n}, p\right)$$

on utilisera l'inégalité (10) pour les $n(2r)$ premiers termes et pour les autres l'égalité

(12) $$E(u, p) = e^{\theta |u|^{p+1}}, \qquad |\theta| < K, \qquad |u| \leqq \frac{1}{2},$$

qui sert dans la démonstration du théorème de Weierstrass. Si l'on désigne par $P(r)$ la limite supérieure calculée de cette façon, il est clair que l'on aura, en vertu des inégalités (11) et (12),

$$\log|P(z)| > -\log P(r) - \sum_1^{n(2r)} \log\left|\frac{r + |a_n|}{r - |a_n|}\right|.$$

Le second terme du deuxième membre de cette inégalité n'ayant

que des infinis logarithmiques on peut l'intégrer de zéro à r. Un calcul élémentaire montre que l'on a toujours

$$\int_0^r \log\left|\frac{x+\alpha}{x-\alpha}\right| dx \leqq r\log(3+2\sqrt{2}),$$

et, par suite, si $p(r)$ désigne le minimum de $|P(z)|$ pour $|z|=r$ lorsque ce minimum est plus petit que 1 et l'unité dans le cas contraire, on a

$$\int_0^r \log p(x)\,dx > -\int_0^r \log P(x)\,dx - rn(2r)\log(3+2\sqrt{2}).$$

En se reportant aux inégalités (10) et (12) on voit que $\log P(x)$ est supérieur à $hn(3x)$, h étant un nombre fixe, l'intégrale de cette fonction entre $\frac{2}{3}r$ et r est supérieure à $\frac{r}{3}hn(2r)$, et l'inégalité précédente s'écrit simplement

$$(13) \qquad \int_0^r \log p(x)\,dx > -\mathrm{H}\int_0^r \log P(x)\,dx.$$

C'est l'inégalité que je voulais obtenir, on en tirera aisément les propositions utiles pour la recherche du genre, par exemple, si $\log P(r)$ est moindre que εr^ρ, l'intégrale du second membre de (13) est moindre que $\varepsilon r^{\rho+1}$, $\log p(r)$ restera supérieur à $-\varepsilon r^\rho$ dans une portion finie de tout intervalle R, 2R.

L'inégalité (13) exprime que la valeur moyenne entre zéro et r de $\log\frac{1}{p(x)}$ est inférieure au produit par un nombre fixe de la valeur moyenne de $\log P(r)$. D'une façon plus générale et plus précise, on peut montrer que $M(r)$ étant le maximum du module d'une fonction entière pour $|z|=r$, $m(r)$ le minimum du module pour $|z|=r$ si ce nombre est moindre que 1 et 1 dans le cas contraire, à tout nombre k supérieur à 1 correspond un nombre fixe H, tel que l'on ait

$$\int_0^r \log m(x)\,dx > -\mathrm{H}\int_0^{rk} \log M(x)\,dx \qquad (r > R_k).$$

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XLVI.

TABLES ALPHABÉTIQUES

DU

TOME XLVI, 2e SÉRIE, LVIIe DE LA COLLECTION : 1922

PREMIÈRE PARTIE.

1° TABLE DES OUVRAGES ANALYSÉS, PAR NOMS DES AUTEURS.

(Le nom du rédacteur de l'analyse est indiqué en italique.)

2° TABLE DES AUTEURS D'ANALYSES.

3° TABLE DES MÉLANGES, PAR NOMS D'AUTEURS.

FIN DES TABLES DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XLVI.

65759 Paris. — Imp. GAUTHIER-VILLARS ET Cie, 55, quai des Grands-Augustins.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(SECONDE PARTIE.)

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Émile Picard*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, quai Conti, n° 25, Paris, VIe.

66750-22 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. É. PICARD ET P. APPELL,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BRILLOUIN, E. CARTAN, J. DRACH, E. GOURSAT, C. GUICHARD,
J. HADAMARD, G. KŒNIGS, G. LORIA, S. RINDI, H. VILLAT, V. VOLTERRA, ETC.,
PIERRE GAUJA, *secrétaire de la rédaction*,
ERN. LEBON, *secrétaire honoraire*.

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR M. G. DARBOUX,
CONTINUÉE DE 1871 A 1875 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY,
DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,
ET DE 1910 A 1917 PAR MM. G. DARBOUX ET E. PICARD.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XLVI. — ANNÉE 1922.

(LVII[e] VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET C[ie], ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1922



BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

T. XXXIV (1917) (¹).

Boussinesq (*J.*). — Poussée des terres : recherche des lois générales de l'état ébouleux produit dans un massif de sable par des déformations planes parallèles à un plan vertical (1-79).

Ce Mémoire s'occupe principalement de l'étude de l'équilibre-limite d'une masse sablonneuse, c'est-à-dire de l'état précédant immédiatement l'éboulement ; cette étude est simplifiée par l'hypothèse indiquée dans le titre sur la direction des déformations. Néanmoins le problème reste très compliqué : l'auteur, ayant formé les équations aux dérivées partielles de l'équilibre-limite dans le cas d'un profil supérieur rectiligne, montre que si l'on veut seulement avoir la direction des pressions principales, on est ramené à un système de deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre, dans le cas général. Il faut donc commencer par des cas particuliers, et l'auteur rappelle celui de Macquorn Rankine et Maurice Levy. Il passe ensuite à l'étude des cas voisins de celui-ci, cas dont il s'est déjà occupé auparavant; mais le travail actuel donne des formules plus simples. Les cas d'un mur plus ou moins incliné dans la phase contiguë au massif, que le mur de la solution de Maurice Levy, sont examinés successivement. M. Boussinesq donne ensuite diverses méthodes de calcul pratique et indique quelques expériences qui ont été faites comme vérification de la théorie.

(¹) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XLV, 1921, 2ᵉ partie, p. 18.

Picard (*Émile*). — La vie et l'œuvre de Gaston Darboux (81-93).

Biographie sommaire, indications sur son œuvre mathématique et les tendances d'esprit qu'elle révèle, et sur ses travaux d'histoire des sciences.

Delassus (*Étienne*). — Mémoire sur la théorie des liaisons finies unilatérales (95-179).

M. Delassus remarque qu'il n'existe pas encore de théorie pour indiquer, dans ces liaisons, quels sont les contacts qui persistent. Il existe tout au plus une théorie implicite, disant que, *si la liaison finie unilatérale est réalisée par des contacts non surabondants, chacun d'eux, au point de vue de sa persistance ou de sa cessation, suit la loi du contact unique indépendamment des autres contacts, c'est-à-dire persiste ou cesse suivant que sa réaction partielle est positive ou négative;* mais l'auteur prouve par des exemples que ce principe est faux; en outre, la théorie « implicite » ne détermine pas les contacts qui persistent dans le cas de la liaison surabondante. M. Delassus établit une théorie rationnelle, prouvant notamment qu'il y a toujours un mouvement possible et un seul. Sa théorie lui permet en outre de discuter les principes admis auparavant par d'autres auteurs, et de confirmer certains d'entre eux, tels que la condition de persistance de la liaison totale formulée par M. Appell.

Denjoy (*Arnaud*). — Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non sommables (*suite et fin*) (181-238).

L'auteur, donnant l'exemple de la fonction $x^2 \sin \frac{1}{x^2}$, dont la dérivée n'est pas sommable au sens de M. Lebesgue, définit la *totale indéfinie* d'une fonction φ donnée sur un intervalle ab. C'est, si elle existe, une fonction f qui : 1° *est continue;* 2° *est à variation résoluble;* 3° *sur une pleine épaisseur de ab admet φ pour dérivée approximative ou généralisée.* Si elle existe, f est déterminée à une constante près. M. Denjoy définit alors trois *opérations de la totalisation*, consistant en sommations de M. Lebesgue, combinées avec des additions et certains passages à la limite. Ces opérations, répétées une infinité dénombrable de fois, permettent en particulier de totaliser une dérivée ou un dérivé extrême de rang et de côté fixes ou variables. L'auteur termine son Mémoire en démontrant que la suite des opérations à effectuer ne peut être bornée, pour l'ensemble des dérivées, à aucun rang fini ni transfini. Une table des matières des quatre parties du Mémoire est donnée à la suite.

Garnier (*René*). — Étude de l'intégrale générale de l'équation VI de M. Painlevé dans le voisinage de ses singularités transcendantes (239-353).

L'équation VI de M. Painlevé est

$$\lambda'' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\lambda - 1} + \frac{1}{\lambda - t}\right)\lambda'^2 - \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{t - 1} - \frac{1}{t - \lambda}\right)\lambda' + 2\,\frac{\lambda(\lambda - 1)(\lambda - t)}{t^2(t - 1)^2}$$
$$\times \left[a + b + c + d + 1 - \left(a + \frac{1}{4}\right)\frac{t}{\lambda^2} + \left(b + \frac{1}{4}\right)\frac{t - 1}{(\lambda - 1)^2} - \frac{ct(t - 1)}{(\lambda - t)^2}\right],$$

a, b, c, d étant des constantes; on sait que sa solution générale est méromorphe dans tout le plan t, sauf aux trois points o, 1, ∞, qui jouent des rôles équivalents; M. Garnier se borne donc à étudier le point $t = 0$. Posant

$$t = t_0 e^{\mathrm{T}},$$

il considère la région où la partie réelle de T est négative. Nommant caractéristique toute branche d'intégrale suivie le long d'un rayon rectiligne issu de l'origine, situé dans la région, sa méthode consiste à construire, par approximations successives, ces caractéristiques; puis, ayant démontré qu'il a obtenu toutes celles qui sont possibles, à les associer de manière à représenter une intégrale. Pour construire les caractéristiques par approximations successives, M. Garnier remplace l'équation de M. Painlevé par le système

$$\frac{t^2(t-1)^2\lambda'^2}{\lambda^2(\lambda-1)^2(\lambda-t)^2} = \frac{4a-1}{\lambda^2} + \frac{4b+1}{(\lambda-1)^2} + \frac{4c}{(\lambda-t)^2} + \frac{4d-2}{\lambda(\lambda-1)} + \frac{4\alpha}{\lambda(\lambda-1)(\lambda-t)}$$

$$(\lambda - t)^2\alpha' = -(\lambda - t)\alpha - 2c\lambda(\lambda - 1),$$

dont les intégrales $\lambda(t)$ non constantes sont les mêmes que celles de l'équation de M. Painlevé. M. Garnier démontre sur les caractéristiques dont l'association forme une intégrale une proposition qu'il se propose d'appliquer ultérieurement à un problème de Riemann. Dans une dernière partie de son Mémoire, il vérifie les résultats obtenus sur deux cas où l'équation de M. Painlevé est réductible, et montre que les résultats énoncés sur le même sujet par M. Richard Fuchs sont sans valeur.

Picard (Émile). — Sur une équation fonctionnelle se présentant dans la théorie de la distribution de l'électricité avec la loi de Neumann (355-361).

Si le potentiel électrique est du type

$$\frac{e^{-kr}}{r} \qquad (k > 0),$$

considéré par Neumann, la distribution de l'électricité dans un conducteur conduit à l'équation

$$(1) \qquad \rho_s - \frac{\lambda}{2\pi}\iint f(r)\cos\psi.\rho_\sigma\, d\sigma = \mathrm{U}_s,$$

où

$$f(r) = -\frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-kr}}{r}\right),$$

et où ψ désigne l'angle que fait avec la normale intérieure en s la droite joignant le point s au point σ, et U_s une fonction donnée. M. Picard démontre ici que *les valeurs singulières de λ sont réelles et ont une valeur absolue supérieure à l'unité;* il avait seulement énoncé ce résultat dans un Mémoire antérieur. Dans la distribution de l'électricité, on doit faire $\lambda = 1$, de sorte qu'on peut utiliser le développement de ρ en série entière en λ.

GEORGES GIRAUD.

MEMORIE DELLA REALE ACCADEMIA DELLE SCIENZE DI TORINO;

serie 2ª; Torino, C. Clausen (1).

Tome LIII. 1903.

Jadanza (*N.*). — [T 3*a*] Alcuni sistemi diottrici speciali ed una nuova forma di teleobiettivi [Sur certains systèmes dioptriques spéciaux et sur une nouvelle forme de téléobjectif] (72-78).

Garbasso (*A.*). — [T 3*c*] Teoria elettromagnetica dell'emissione della luce [Théorie électromagnétique de l'émission de la lumière] (127-158).

Fubini (*G.*). — [J 4] Sui gruppi di trasformazioni geodetiche [Sur les groupes de transformations géodésiques] (261-313).

Une transformation infinitésimale

$$X = \Sigma_r \xi_r \frac{\partial}{\partial x_r}$$

est *géodésique* (transforment les géodésiques en géodésiques) pour l'espace S_n

$$ds^2 = \Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

sous des conditions qui renferment les dérivées secondes des ξ.

Avec des artifices remarquables, l'auteur trouve des autres équations aux dérivées partielles du premier ordre. Entre les conséquences que l'auteur tire des équations trouvées, citons les suivantes :

Un espace S_n admettant un groupe géodésique (engendré par des transformations infinitésimales géodésiques) à $n(n+2)$ paramètres est un espace à courbure constante, et le groupe correspondant est le groupe projectif des espaces à n dimensions.

En se fondant sur des résultats de Dini, généralisés par M. Levi-Cività, l'auteur trouve un autre type d'équations aux dérivées partielles du premier ordre pour les ξ et en fait l'application à la résolution du problème de Lie pour $n=2$, c'est-à-dire de la détermination des surfaces admettant un groupe géodésique. Ensuite, il résout le même problème pour $n=3$. Enfin, même recherche pour n quelconque.

---

(1) Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XXXVII_2, p. 90.

Tome LIV, 1904.

Severi (F.). — [M, 2] Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie [Sur les correspondances entre les points d'une courbe algébrique et sur certaines classes de surfaces] (1-49).

Si les points y correspondant à un point variable x de la courbe, pris avec x compté γ fois, forment un groupe variable dans une série linéaire, la correspondance s'appelle *à valence* γ.

Le groupe des points unis dans une telle correspondance appartient à la série linéaire qui est la somme de γ groupes canoniques et des séries contenant le point x compté γ fois et ses homologues dans la correspondance directe et dans l'inverse. Le nombre des coïncidences est

$$\alpha + \beta + 2\gamma p,$$

étant α, β les indices de la correspondance et p le genre de la courbe.

Soient T_1 une correspondance qui a une valence γ_1, et Y_1, Y'_1 les groupes des points homologues de a, a'. Alors, en faisant varier le point a, le groupe de ses homologues $+\gamma_1$ fois le point a même (c'est-à-dire l'homologue de a dans l'identité I) varie dans une série linéaire, ce qui s'exprime en disant que les deux groupes sont *équivalents* (comme appartenant à une même série linéaire) et en écrivant

$$Y_1 + \gamma_1 a \equiv Y'_1 + \gamma_1 a'.$$

Cela peut s'exprimer aussi en disant que T_1 et l'identité I sont *dépendantes* suivant les nombres $(1, \gamma_1)$. On trouve de même que les correspondances T_1, T_2 de valences respectives γ_1, γ_2 sont *dépendantes* suivant les nombres $(\gamma_2, -\gamma_1)$.

Cette notion de dépendance peut aussi s'établir entre un nombre quelconque de correspondances, et indépendamment du fait que celles-ci aient ou n'aient pas une valence. Étant Y'_i le groupe des homologues de a' dans T_i, la *dépendance* a lieu lorsqu'il est

$$\lambda_1 Y_1 + \ldots + \lambda_k Y_k \equiv \lambda_1 Y'_1 + \ldots + \lambda_k Y'_k$$

avec des λ positives ou négatives, qui ne soient pas toutes nulles. Autrement, les correspondances sont *indépendantes*.

Si l'on a k correspondances d'indices (α_1, β_1), ..., (a_k, α_k) dépendantes suivant les nombres λ_1, ..., λ_k, et ayant respectivement u_1, ..., u_k points unis, on a

$$\lambda_1 u_1 + \ldots + \lambda_k u_k = \lambda_1(\alpha_1 + \beta_1) + \ldots + \lambda_k(\alpha_k + \beta_k).$$

Sur une courbe de genre p, on ne peut avoir plus de $2p^2$ correspondances indépendantes. La démonstration résulte de la représentation des correspondances par des intégrales abéliennes (Hurwitz). Étant μ le plus grand nombre de correspondances indépendantes T_1, ..., T_μ, toute autre T constitue avec

celles-ci un ensemble de correspondances T, $T_1, \ldots, T_\mu$ dépendantes suivant les nombres $(1, \lambda_1, \ldots, \lambda_\mu)$, et, ayant posé

$$c_i = \alpha_i + \beta_i - u_i,$$

on a pour T

$$u = \alpha + \beta + c_1 \lambda_1 + \ldots + c_\mu \lambda_\mu.$$

Dans la seconde Partie, on étudie les surfaces représentant les couples de points d'une courbe ou de deux courbes. L'existence d'un nombre fini de correspondances indépendantes sur une courbe conduit à démontrer que, sur une surface représentant les couples de points de deux courbes, toute courbe s'obtient par somme et différence en partant d'un nombre fini de courbes de base et des courbes des deux faisceaux unisécants existant sur la surface. Analoguement, sur une surface représentant les couples de points d'une courbe, en partant d'un nombre fini de courbes de base et des courbes du système d'indice 2 et de degré 1. De là on déduit le théorème de Bezout pour ces surfaces.

Bisconcini (*G.*). — [T2$a\delta$] Sulle vibrazioni di una membrana che si possono far dipendere da due soli parametri [Sur les vibrations d'une membrane qui peuvent se faire dépendre de deux seuls paramètres] (51-80).

La relation entre le problème actuel et celui des potentiels dépendant de deux seules coordonnées traité par M. Levi-Cività (*voir* ces *Mémoires*, 2ᵉ série, t. XLIX, 1899) résulte du fait que l'équation

$$\Delta_2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

en y posant $z = it$ se change en

$$\Box f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = 0,$$

qui définit les vibrations d'une membrane. Dans le problème des potentiels, les lignes suivant lesquelles le potentiel est constant ne peuvent être que les trajectoires d'un groupe infini de similitudes ou bien les congruences rectilignes isotropes. Pour cela, l'auteur commence par déterminer dans le champ x, y, t les sous-groupes réels du groupe résultant de celui des similitudes lorsqu'on y fait $z = it$. Puis il détermine les trajectoires engendrées par les transformations infinitésimales correspondantes pour trouver ensuite l'équation des vibrations. Puis il traite le cas correspondant à celui des droites d'une congruence isotrope. Enfin, il considère aussi le cas correspondant à celui où les lignes équipotentielles sont de longueur nulle,

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} + Z \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

avec

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 0,$$

que M. Levi-Cività excluait, comme imaginaires, dans l'étude des potentiels, mais dont le cas correspondant pour les membranes peut être réel.

Perazzo (*U.*). — [Q 2 ref. P 4] Sulla incidenza di rette, piani e spazi ordinari in uno spazio a cinque dimensioni e su alcune corrispondenze birazionali fra piani e spazi ordinari [Sur l'incidence de droites, plans et espaces ordinaires dans un espace de cinq dimensions et sur certaines correspondances birationnelles entre plans et espaces ordinaires] (149-182).

Étude de variétés formées par les droites, plans et espaces de S_5. A remarquer, des réglées rationnelles du quatrième ordre et une réglée elliptique du sixième. Correspondances birationnelles, en particulier deux transformations du cinquième ordre entre deux espaces.

Levi (*B.*). — [Q 1] Fondamenti di metrica projettiva [Fondements de métrique projective] (281-354).

La coordination de la géométrie métrique à la géométrie projective, qui se trouve effectuée dans les *Vorlesungen* de Pasch au moyen de postulats, laisse de côté le cas de la géométrie elliptique. L'auteur donne un système de postulats comprenant les trois géométries ainsi que d'autres métriques, entre autres celles de Dehn (*Math. Ann.*, t. LIII) et la métrique du champ extérieur à une quadrique. Dans le Chapitre II, l'auteur établit les fondements de la géométrie projective, y compris la représentation par coordonnées. Le Chapitre III contient l'examen des postulats et de leur indépendance.

Les notions primitives adoptées sont celles de *point* et de *congruence de deux couples de points*.

Tome LV, 1905.

Morera (*G.*). — [R 5 *b*] Sulla attrazione degli ellissoidi e sulle funzioni armoniche ellissoidali di seconda specie [Sur l'attraction des ellipsoïdes et sur les fonctions harmoniques ellipsoïdales de deuxième espèce] (1-25).

Étant s_1 la plus grande racine de

$$\frac{x^2}{a^2+s}+\frac{y^2}{b^2+s}+\frac{z^2}{c^2+s}=1,$$

la fonction

$$U_n=\frac{1.3\ldots(2n+1)}{2^{n+1}\,n!}\int_{s_0}^{\infty}\frac{\left(1-\frac{x^2}{a^2+s}-\frac{y^2}{b^2+s}-\frac{z^2}{c^2+s}\right)^n}{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}\,ds,$$

où $s_0=s_1$ ou bien $s_0=0$, suivant que le point (x, y, z) est extérieur ou intérieur à l'ellipsoïde, est la fonction potentielle de l'ellipsoïde à courbes homo-

thétiques de densité

$$\frac{1.3\ldots(2n+1)}{2^{n+1}\,n!}\;\frac{\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\right)^{n-1}}{4\pi abc}.$$

En posant

$$U_{pqr}=\frac{\partial^n U_n}{\partial x^p\,\partial y^q\,\partial z^r}\qquad (p+q+r=n),$$

U_{pqr} est un polynome de degré n, et ces dérivées sont ce que l'auteur appelle les *fonctions harmoniques élémentaires de deuxième espèce*. Il démontre que, par une combinaison linéaire des $U_{pqr}(p+q+r\leqq n)$, on peut toujours former une fonction harmonique à l'intérieur, et qui sur l'ellipsoïde se réduit à une fonction rationnelle entière de degré n, arbitrairement donnée.

La démonstration se fonde sur un lemme algébrique. Étant $F(x_1 x_2 x_3)$ une forme ternaire de degré $2n$ et en posant

$$F_{pqr}=\frac{\partial^n F}{\partial x_1^p\,\partial x_2^q\,\partial x_3^r},$$

$$u_{pqr}=\frac{n!}{p!\,q!\,r!}\,x_1^p x_2^q x_3^r,$$

on peut considérer les F comme les dérivées partielles d'une certaine forme quadratique Φ par rapport aux u. En supposant en particulier

$$F=(a_1 x_1^2+a_2 x_2^2+a_3 x_3^2)^n, \tag{1}$$

le lemme consiste en ce que la forme quadratique Φ appartenant à (1) est toujours positive.

Pieri (*M.*). — [K7] Nuovi principii di Geometria projettiva complessa [Nouveaux fondements de Géométrie projective complexe] (189-235).

Les notions primitives sont au nombre de trois : *le point projectif* complexe, la classe de points *joignant deux de ces points*, et la classe de points appelée *chaîne de trois points*. Les postulats relatifs à ces notions sont au nombre de trente. Sur ces bases, l'auteur construit la géométrie projective complexe, y inclus l'*antiprojectivité* considérée par Juel (*Acta math.*, t. XIV) et Segre (*Atti* de Turin, t. XXV).

Amaldi (*U.*). — [P3] I gruppi continui reali di trasformazioni conformi dello spazio [Les groupes continus réels de transformations conformes de l'espace] (311-341).

En considérant dans l'espace S_4 le groupe des projectivités qui transforment en elle-même une sphère (de trois dimensions), ce groupe donne sur la sphère un groupe subordonné; de ce dernier, par représentation stéréographique sur l'espace ordinaire, on obtient le groupe conforme. A la suite de cette observa-

tion, l'auteur commence par déterminer un système complet de sous-groupes maxima pour le groupe projectif d'une quadrique, et puis, en particulier, d'une sphère réelle. Ces sous-groupes (pour le cas de la sphère) se réduisent au groupe transformant en elle-même une droite extérieure et aux groupes laissant en repos un point extérieur ou un point intérieur ou un point de la sphère. On arrive ainsi à la classification des groupes réels de mouvements euclidiens, elliptiques et hyperboliques que l'auteur fait par voie géométrique. Enfin, il trouve que tout sous-groupe réel du groupe conforme de l'espace, qui n'est pas équivalent à un groupe de mouvements et de similitudes, peut être transformé par une transformation conforme réelle en un (et un seul) de certains dix groupes dont il assigne les types.

Tome LVI, 1906.

Rien.

Tome LVII, 1907.

Amaldi (U.). — [P6e] Sui gruppi continui infiniti di trasformazioni di contatto dello spazio [Sur les groupes continus infinis de transformations de contact de l'espace] (141-220).

Groupes infinis de transformations de contact admettant un système invariant ∞' d'équations aux dérivées partielles

$$\Phi\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) = \text{const.}$$

Cette équation peut se réduire, par une transformation de contact, à la forme

$$y = \text{const.}$$

Alors les groupes considérés sont ceux qui transforment les unes dans les autres les ∞' variétés de ∞^4 éléments de surface, considérés aux points des plans parallèles au plan xz. Il y a deux catégories de ces groupes : ceux de la première laissent en repos toute variété $y = \text{const.}$; ceux de la seconde subordonnent dans les ∞' variétés $y = \text{const.}$, un groupe ∞', ∞^2, ∞^3 ou le groupe total en une variable, respectivement, et se partagent ainsi en quatre *classes*. De tous ces groupes, l'auteur assigne les types.

Pizzetti (P.). — [U10] Intorno al grado di approssimazione che si raggiunge nel risolvere i triangoli geodetici sopra una superficie qualunque [Sur le degré d'approximation qu'on obtient en résolvant les triangles géodésiques sur une surface quelconque] (255-286).

Tome LVIII, 1908.

Garbasso (A.). — [T3] Il miraggio [Le mirage] (1-57, deux planches).

Rolla (L.). — [T3] Su la riproduzione sperimentale del miraggio [Sur la reproduction expérimentale du mirage] (363-374, une planche).

Tome LIX, 1909.

Perazzo (U.). — [N_1, N_2] Sopra alcune varietà di rette e in particolare su vari tipi di complessi cubici [Sur certaines variétés de droites et en particulier sur divers types de complexes cubiques] (109-137).

Complexes, congruences et surfaces réglées correspondant à des variétés engendrées par des systèmes de droites, de plans et d'espaces, incidents à des espaces donnés dans S_5.

Giambelli (G.-Z.). — [Q2] Risoluzione del problema generale numerativo per gli spazi plurisecanti di una curva algebrica [Résolution du problème général énumératif pour les espaces plurisécants d'une courbe algébrique] (433-508).

Transformer en une somme de conditions caractéristiques la condition pour un espace de rencontrer plusieurs fois une courbe générale d'ordre n et de genre p.

Tome LX, 1910.

Boggio (T.). — [A3] Sulla risoluzione di una classe di equazioni algebriche che si presentano nella matematica finanziaria e attuariale [Sur la résolution d'une classe d'équations algébriques qui se présentent dans la mathématique financière et actuarielle] (107-138).

Équations de la forme

$$\sum_{1}^{n}{}_{i}\, a_i v^i = \text{A},$$

v étant l'inconnue et A, a_i positifs.

Comessatti (*A.*). — [M₁2] Sulle curve doppie di genere qualunque e particolarmente sulle curve ellittiche doppie [Sur les courbes doubles de genre quelconque et, en particulier, sur les courbes elliptiques doubles] (313-350).

Courbes algébriques contenant des involutions irrationnelles du deuxième ordre et de genre π, spécialement pour $\pi = 1$. Conditions d'identité birationnelle de deux de ces courbes.

Laura (*E.*). — [T2] Sopre i moti vibratori armonici semplici e smorzati di un mezzo omogeneo elastico ed isotropo [Sur les mouvements vibratoires harmoniques, simples et amortis d'un milieu homogène élastique et isotrope] (477-522).

Toute vibration amortie d'un solide élastique isotrope est donnée par la superposition de deux vibrations simples en différence de phase de $\frac{\pi}{2}$. La vibration amortie est déterminée d'une manière unique par les tensions superficielles. Suit l'étude des vibrations harmoniqnes appelées *caractéristiques*, suivant une dénomination de M. Somigliana. Puis l'auteur donne les formules de représentation des intégrales, et enfin des théorèmes analogues à celui de la moyenne que Gauss a donné pour les fonctions harmoniques.

Tome LXI, 1911.

Colonnetti (*G.*). — [T2] I sistemi elastici trattati col metodo delle linee d'influenza [Les systèmes élastiques traités par la méthode des lignes d'influence] (177-185, une planche).

Tome LXII, 1912.

Ricci (*C.-L.*). — [T2] L'ellisse di elasticità trasversale e le sue applicazioni nelle scienza delle costruzioni [L'ellipse d'élasticité transversale et ses applications dans la science des constructions] (1-51, une planche).

Colonnetti (*G.*). — [T2] L'equilibrio elastico dal punto di vista energetico [L'équilibre élastique au point de vue énergétique] (479-502).

Tome LXIII, 1913.

Stuyvaert (*M.*). — [N$_1$ 1*e*] Un complexe cubique de droites [en français] (1-18).

Zanotti Bianco (*G.*). — [U6] Le idee di Lagrange, Laplace, Gauss e Schiaparelli sull' origine delle comete [Les idées de Lagrange, de Laplace, de Gauss et de Schiaparelli sur l'origine des comètes] (59-110).

Garbasso (*A.*). — [T7] Eccitatori di Hertz con spettro d'emissione a più righe [Excitateurs de Hertz à spectre d'émission de plusieurs raies] (257-270, une planche).

Somigliana (*C.*) et *Vercelli* (*F.*). — [T4*a*] Sulla previsione matematica della temperature ne' grandi trafori alpini [Sur la prévision mathématique de la température dans les grands creusages des Alpes] (327-368, neuf tableaux de calculs et une planche).

SCIPIONE RINDI.

ACTA MATHEMATICA.

Tome 37, 1914.

Bernstein (*Serge*). — Sur la meilleure approximation de $|x|$ par des polynomes de degrés donnés (1-57).

M. Bernstein démontre que si E_{2n} est la meilleure approximation de $|x|$ dans l'intervalle $(-1, +1)$ par un polynome de degré $2n$, on aura d'une part

$$\frac{1}{2n+1} > E_{2n} > \frac{1}{4(1+\sqrt{2})(2n-1)},$$

et d'autre part

$$\lim_{n=\infty}(2n E_{2n}) = \lambda,$$

λ étant égal à 0,282, avec une erreur moindre que 0,004. Le Mémoire ne suppose pas connue la théorie générale publiée par l'auteur dans les *Mémoires publiés par l'Académie Royale de Belgique*, 1912.

Stäckel (*Paul*). — Periodische Funktionen und Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen (Fonctions périodiques et systèmes d'une infinité d'équations linéaires) (59-73).

M. Stäckel recherche à quelle condition la fonction

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$$

possède la période c, de valeur absolue plus petite que le rayon de convergence; cela le conduit au système d'une infinité d'équations linéaires

$$\sum_{t=1}^{\infty} a_{n+t} \frac{c^{t-1}}{t!} = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

auquel les théories ordinaires ne s'appliquent pas. L'auteur remarque qu'on obtient cependant des solutions en identifiant avec des séries telles que

$$\sum_{\nu=-\infty}^{+\infty} A_\nu e^{\frac{2\pi i \nu z}{c}}.$$

Il considère ensuite le cas où les a_n sont liés par des relations de récurrence à coefficients constants. (*Voir* plus loin le Mémoire de M. Oskar Perron.)

Steffensen (*J.-F.*). — Über eine Klasse von ganzen Funktionen und ihre Anwendung auf die Zahlentheorie (Sur une classe de

fonctions entières et sur son application à la théorie des nombres) (75-112).

Ce Mémoire est un abrégé de la thèse danoise de l'auteur (Copenhague, 1912). Il ne contient guère que les énoncés des théorèmes, les démonstrations pouvant, estime l'auteur, être facilement reconstituées sans l'original danois. Les fonctions entières considérées sont principalement des fonctions prenant des valeurs données quand la variable est entière; on les obtient par des formules telles que

$$g(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi} \sum \frac{(-1)^m g(m)}{x - m}$$

due à M. Hadamard, ou

$$f(x) = -\frac{\sin 2\pi x}{2\pi} \sum{}' \left(\frac{1}{m - x} - \frac{1}{m}\right) f(m)$$

due à l'auteur.

Wigert (S.). — Sur quelques fonctions arithmétiques (113-140).

Ce travail est consacré à la fonction $\sigma(n)$ telle que $n\sigma(n)$ soit la somme des diviseurs de n. M. Wigert démontre d'abord que la plus grande des limites, pour n infini, de

$$\frac{\sigma(n)}{\log \log n}$$

est e^C, où C est la constante d'Euler. Il étudie ensuite diverses fonctions liées à $\sigma(n)$, notamment les fonctions

$$\sum_{n \leqq x} \sigma(n)(x - n)^k,$$

dont il donne une représentation analytique.

Young (Grace Chisholm). — A Note on Derivates and Differential Coefficients (Note sur les dérivés et sur les coefficients différentiels) (141-154).

Le principal théorème obtenu dans ce Mémoire est que, *sauf aux points d'un ensemble dénombrable, le dérivé inférieur d'un certain côté ne surpasse pas le dérivé supérieur de l'autre côté.* L'auteur en déduit la définition d'un *dérivé symétrique moyen* qui existe partout, sauf peut-être aux points d'un ensemble dénombrable.

Hardy (G.-H.) and Littlewood (J.-E.). — Some Problems of Diophantine Approximation (Quelques problèmes d'approximation diophantine) (155-191 et 193-239).

Le premier de ces deux Mémoires est consacré principalement à la démonstration du théorème suivant :

Soient $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ des nombres irrationnels linéairement indépendants,

$$\alpha_{p,q} \qquad (p = 1, 2, \ldots, k; \; q = 1, 2, \ldots, m)$$

des nombres donnés, ε un nombre positif arbitraire; il est possible de trouver des entiers $n_{p,q}$ et s tels que

$$|s^p \theta_q - n_{p,q} - \alpha_{p,q}| < \varepsilon \qquad (p = 1, 2, \ldots, k; \; q = 1, 2, \ldots, m).$$

Dans le second Mémoire sont étudiées les séries

$$2\Sigma q^{\left(n-\frac{1}{2}\right)^2}, \quad 1 + 2\Sigma q^{n^2}, \quad 1 + 2\Sigma(-1)^n q^{n^2}$$

dans le cas où $|q| = 1$.

Rémoundos (*Georges*). — Sur les familles de fonctions admettant des valeurs exceptionnelles dans un domaine (241-300).

L'auteur établit des théorèmes analogues à ceux de M. Landau sur les familles de fonctions algébroïdes finies dans un domaine qui admettent deux valeurs exceptionnelles, ou un domaine exceptionnel, ou une ligne exceptionnelle. Dans le cas de fonctions ayant un domaine exceptionnel, ou une ligne exceptionnelle, il montre qu'elles forment une famille *normale*, ce mot ayant un sens voisin de celui adopté par M. Montel. L'auteur généralise ensuite des théorèmes connus sur la convergence des séries de fonctions holomorphes, et fait quelques applications aux fonctions ayant une infinité de branches.

Perron (*Oskar*). — Periodische Funktionen und Systeme von unendlich vielen linearen Gleichungen (Auszug aus einem Schreiben an Herrn Stäckel) [Fonctions périodiques et systèmes d'une infinité d'équations linéaires (extrait d'une lettre à M. Stäckel)] (301-304).

Reprenant la question posée par M. Stäckel (*voir* plus haut) sur le cas où les a_n sont liés par une relation de récurrence à coefficients constants, M. Perron en donne la solution complète.

Wiman (*A.*). — Über den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylor'schen Reihe (Sur la dépendance entre la plus grande valeur d'une fonction analytique et le plus grand terme de la série de Taylor correspondante) (305-326).

Pour $|z| = r$, soient $M(r)$ la valeur absolue maximum d'une fonction entière, $m(r)$ la valeur absolue maximum des termes de son développement en série de Taylor. L'auteur démontre que, pour certaines valeurs de r croissant

indéfiniment, on a

$$M(r) < m(r)[\log m(r)]^{\frac{1}{2}+\varepsilon}.$$

M. Wiman trouve aussi des résultats analogues pour des fonctions non entières, et des résultats plus précis, soit pour les fonctions d'ordre fini, soit, à l'aide des fonctions $\log_2 m(r)$, $\log_3 m(r)$, etc., pour les autres fonctions entières.

Nörlund (*N.-E.*). — Sur les séries de facultés (327-387).

Considérons la série

$$(1)\qquad \Omega(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{a_{s+1}\, s!}{x(x+1)\dots(x+s)},$$

où $x = \sigma + i\tau$. Ces séries sont convergentes pour σ assez grand. M. Nörlund démontre l'existence d'un nombre Θ tel que, pour $\omega > \Theta$, on ait également un développement

$$(2)\qquad \Omega(x) = \sum_{s=0}^{+\infty} \frac{c_{s+1}\, s!}{x(x+\omega)\dots(x+s\omega)},$$

ce développement étant impossible pour $\omega < \Theta$. Il donne alors des caractères simples pour les fonctions qui, ω étant assez grand, admettent un développement tel que (2), et pour l'abscisse de convergence. L'étude de la multiplication des séries de facultés et de la différentiation d'une série de facultés termine ce Mémoire dans lequel M. Nörlund s'attache à faire ressortir la commodité de ces séries dans maintes questions d'analyse.

GEORGES GIRAUD.



THE QUARTERLY JOURNAL
OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS.

Vol. XLII, 1911.

Forsyth (*A.-R.*). — Equations in plane geometry expressed by means of complex variables [Équations en géométrie plane exprimées au moyen de variables complexes] (1-40).

Le point x, y est représenté par le nombre complexe $z = x + iy$. Si z est fonction d'un paramètre réel, le point x, y décrit une ligne. Par exemple $z - z_1 = c(z - z_2)$, où c est un paramètre réel, représente la droite qui joint les points z_1 et z_2. De même $z - z_1 = \rho e^{i\theta}(z - z_2)$, où ρ et θ sont des paramètres réels reliés par une équation de la forme

$$P\rho^2 - (P - S)\rho\cos\theta - R\rho\sin\theta + S = 0,$$

représente une droite. L'équation

$$\lambda_1(z - z_1) + \lambda_2(z - z_2) - \lambda_3(z - z_3) = 0,$$

où λ_1, λ_2, λ_3 sont des paramètres réels reliés par

$$\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 1,$$

$$\frac{|z_2 - z_3|^2}{\lambda_1} - \frac{|z_3 - z_1|^2}{\lambda_2} - \frac{|z_1 - z_2|^2}{\lambda_3} = 0$$

représente le cercle passant par les points z_1, z_2, z_3.

L'auteur traite ensuite par cette méthode des coniques, puis des cubiques.

Watson (*G.-N.*). — The singularities of functions defined by Taylor's series [Les singularités de fonctions définies par des séries de Taylor] (41-53).

Soit la série

$$\sum_{m=0}^{\infty} g_m e^{im\left[k \log m + c_0 + \frac{c_1}{m} + \frac{\zeta_m}{m^2}\right]} x^m,$$

où g_m, k, c_0, c_1, ζ_m sont réels et assujettis à

$$1 + \frac{\alpha - \gamma}{m} \leqq \frac{g_{m-1}}{g_m} \leqq 1 + \frac{\alpha + \gamma}{m},$$

$$\gamma = \frac{1}{8},$$

$$\zeta_m < c_2,$$

pour les valeurs de m plus grandes qu'un certain entier s. La fonction définie par cette série admet le cercle $|x| = 1$ pour coupure.

Young (*W.-H.*). — On functions of bounded variation [Sur les fonctions à variation bornée] (54-85).

Les résultats obtenus par des auteurs précédents, notamment par Lebègue, sont rappelés avec des démonstrations souvent simplifiées. Toute fonction à variation bornée a une dérivée finie, sauf pour des valeurs de x formant un ensemble de mesure nulle. Toute fonction qui est une intégrale est l'intégrale de ses nombres dérivés. Toute fonction continue qni a un nombre dérivé fini est l'intégrale de ce nombre défini. Les nombres dérivés d'une fonction à variation bornée sont sommables. Pour une fonction monotone croissante, l'excès de la fonction sur l'intégrale commune de ses nombres dérivés est une fonction monotone croissante.

Glaisher (*J.-W.-L.*). — On a class of relations connecting any

n consecutive Bernoullian functions [Sur une classe de relations entre n fonctions de Bernoulli consécutives] (86-153).

La fonction de Bernoulli $V_n(x)$ est définie par

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n V_n(x)}{n!},$$

et la fonction $U_n(x)$ par

$$\frac{te^{xt}}{e^t+1}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{n!}U_n(x).$$

Les formules développées ici offrent cette particularité qu'elles ne contiennent que les fonctions depuis l'indice $\frac{n}{2}$ ou $\frac{n+1}{2}$ jusqu'à l'indice n. On en déduit des relations du même genre entre les nombres de Bernoulli, ceux d'Euler, etc.

Exemple :

$$(2n+1)V_{2n}(x)+\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{2n-1}{3}V_{2n-2}(x)+\ldots+(n+2)V_{n+1}(x) \text{ ou } +V_n(x)$$
$$=\frac{1}{2}\frac{d}{dx}[x^n(x-1)^n(2x-1)]$$

qui, pour $x=0$, donne

$$(2n+1)B_n-\frac{n(n-1)}{1.2}\frac{2n-1}{3}B_{n-1}+\ldots+(-1)^{\frac{1}{2}(n-1)}(n+2)B_{\frac{n+1}{2}} \text{ ou } (-1)^{\frac{1}{2}n}B_{\frac{n}{2}}$$
$$=0.$$

Dickson (*L.-E.*). — Note on modular invariants [Note sur les invariants modulaires] (158-161).

Soit B une forme à m variables, à coefficients entiers, invariante (mod p premier) par les substitutions linéaires homogènes d'un groupe G.

Soit f un facteur de B, irréductible (mod p). Appliquons à f toutes les transformations de G, ne considérons pas comme distincts deux résultats obtenus s'ils ne diffèrent que par un facteur constant. Soient $f_1=f$ et $f_2, f_3, \ldots, f_g$ les résultats obtenus. Le produit $f_1, f_2, \ldots, f_g$ est un facteur de B et est un invariant relatif de G qu'on appellera *élémentaire*. Tous les invariants de G sont des produits des f. Ce résultat n'est d'ailleurs démontré que dans des cas particuliers.

Dickson (*L.-E.*). — On non vanishing forms [Sur les formes non annulables] (162-176).

Une forme $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est dite *non annulable* dans un certain domaine lorsqu'elle ne s'annule dans ce domaine que pour les valeurs

$$x_1=x_2=\ldots=x_n=0.$$

Le domaine considéré dans ce travail est celui des entiers (mod 2). Alors, si $F(x_2, x_2, \ldots, x_n)$ est une forme non annulable, la fonction obtenue, en rem-

plaçant toute puissance de x_2 par x_2 est $\equiv$ (mod 2) à

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) - 1.$$

Le problème de la séparation de ces formes en classes non équivalentes est traité complètement pour la forme à 3 variables de degré 4, et en partie pour la forme à 3 variables de degré 6.

Basset (*A.-B.*). — The connection between the singularities of surfaces and double refraction [Rapports entre les singularités des surfaces et la double réfraction] (171-176).

La théorie des singularités des surfaces fournit une preuve convaincante de l'exactitude de la théorie de la double réfraction de Fresnel. Car dans toute autre théorie que cette dernière, la surface des ondes posséderait des singularités donnant naissance à certains phénomènes optiques, lesquels n'ont jamais été observés.

Miller (*G.-A.*). — Effect on the produit when its factors are permuted in every possible manner [Effet sur le produit quand ses facteurs sont permutés de toutes les manières possibles] (177-180).

Soient n opérateurs d'un groupe :

1° Les $n!$ produits qu'on peut former avec ces n opérateurs peuvent-ils être tous distincts? Réponse : oui.

2° Quel est le plus grand nombre d'ordres distincts possibles pour ces produits? Réponse : $(n-1)!$

Et l'on apprend à former des groupes pour lesquels il en est ainsi.

Hardy (*G.-H.*) *and Chapman* (*S.*). — A general view of the theory of summable series [Vue générale de la théorie des séries sommables] (181-215).

Les auteurs montrent que les méthodes de sommation connues (Cesàro, Riesz, Leroy, Borel) peuvent être considérées comme des cas particuliers de la suivante. Soit $f(n, p, v)$ satisfaisant aux conditions suivantes :

$f = 0$ pour $v > |n|$;
f tend vers une limite pour $n \to +\infty$ et pour $n \to -\infty$;
f tend vers 1 pour $p \to \infty$;

$$\lim_{v \to \infty} \lim_{n \to \infty} f = 0;$$
$$\lim_{v \to \infty} \lim_{n \to -\infty} f = \infty;$$
$$\lim_{p \to \infty} \lim_{n \to +\infty} f = 1;$$
$$\lim_{p \to \infty} \lim_{n \to -\infty} f = 1.$$

Soit aussi une série Σu_ν. On définit $S(n, p)$ par

$$S(n, p) = \sum_{\nu=0}^{\nu=[n]} u_\nu f(n, p, \nu)$$

et l'on définit alors la somme $s = \Sigma u_n$ par l'une ou l'autre des équations

$$s = \lim_{p \to \infty} \quad \lim_{n \to \infty} S(n, p)$$

ou

$$s = \lim_{p \to \infty} \quad \lim_{n \to -\infty} S(n, p)$$

si l'une ou l'autre de ces limites existe.

Ces considérations permettent une vue plus claire des méthodes connues. Elles permettent de les classer. Elles conduisent à des généralisations de propriétés connues et à de nouvelles questions.

Nicholson (*J.-W.*). — Notes on Bessel functions [Notes sur les fonctions de Bessel] (216-224).

Démonstration de diverses formules. Par exemple :

$$K_n(x) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\alpha^n Y_n(\alpha x)}{1+\alpha^2}\, d\alpha \qquad (n \text{ entier} \geqq 0).$$

Basset (*A.-B.*). — Singular tangents to surfaces [Tangentes singulières aux surfaces] (p. 225-236).

Revision des résultats un peu obscurs donnés par Salmon.

N étant le degré de la surface, il y a en général

$$5N(N-4)(7N-12)$$

tangentes touchant la surface en 5 points confondus, il y en a

$$2N(N-4)(N-5)(3N-5)(N+6)$$

touchant la surface en 4 points confondus et en deux autres points confondus, etc.

Les tangentes qui touchent la surface en 4 points confondus engendrent une surface réglée de degré

$$2N(N-3)(3N-2), \quad \ldots.$$

Richards (*T.-J.*). — A geometrical proof of some of the properties of nodal quartics [Preuve géométrique de quelques propriétés des quartiques à points doubles] (236-240).

Repose sur la transformation suivante. Étant donnés une conique C et un point O, à tout point P du plan on fait correspondre le point P′ situé sur la

droite OP et conjugué de P par rapport à la conique. Une courbe d'ordre n se transforme en général en une courbe d'ordre $2n$ ayant des points d'ordre n au point O et aux deux points de contact des tangentes menées de O. On en déduit certaines propriétés des quartiques à points doubles, par exemple : les six points de contact des tangentes menées à une quartique ayant un point double, par ce point double, sont sur une conique.

Allan Cunningham and Woodall (*H.-J.*). — On hautpt exponents of 2 [Sur les exposants de 2 par rapport à un module] (241-250).

Introduction à une Table donnant ces exposants pour les modules premiers depuis 10 000 jusqu'à 30 000; suite de la Table parue au Volume XXXVII.

Milne (*William-P.L.*). — The cross ratio of the four tangents to a cubic [Le rapport anharmonique de quatre tangentes à une cubique] (251).

Démonstration élémentaire de ce fait que les quatre tangentes à une cubique issues d'un point variable de cette cubique ont un rapport anharmonique constant.

Odell Lovett (*Edgar*). — Generalizations of the problem of several bodies, its inversion, and an introductory account of recent progresses in its solution [Généralisation du problème des n corps, son inversion et un compte rendu préliminaire des récents progrès faits vers sa solution] (p. 252-315).

Les vingt-quatre premières pages de ce Mémoire constituent le compte rendu annoncé dans le titre. La suite contient quelques résultats nouveaux. Il s'agit de trouver les forces d'un système conservatif central, capables de maintenir un système de m points materiels sur des trajectoires données dans un espace à n dimensions. Les composantes des vitesses sont déterminées seulement dans le cas où $m = \frac{1}{2}n(n+1)$. Les forces sont déterminées dans le cas de $m = 2n - 1$. Il en résulte que les vitesses et les forces sont déterminées simultanément dans le cas de $m = n = 1$ et dans celui de $m = 3$, $n = 2$. Dans ce dernier cas, l'auteur construit de nouveaux problèmes intégrables sur trois corps soumis à des forces dépendant seulement de leurs masses et de leurs distances.

Whitehead (*C.-S.*). — On a generalization of the functions *berx*, *beix*, *kerx*, *keix* [Sur une généralisation des fonctions *berx*, *beix*, *kerx*, *keix*] (316-342).

Ces fonctions, généralisations des fonctions *berx*, *beix*, de L. Kelvin, et des

fonctions *kerx* et *keix* de Russel, sont définies comme suit :

$$ber_r x + i\, bei_r\, x = J_r(\alpha x),$$
$$her_r x + i\, hei_r x = J_r(\alpha x) + i Y_r(\alpha x),$$

où $\alpha = e^{-\frac{\pi i}{4}}$, J_r est la fonction de Bessel

$$J_r(\alpha x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s \left(\frac{1}{2}\alpha x\right)^{r+2s}}{s!\,\Gamma(r+s+1)};$$

Y_r est défini par

$$Y_r(\alpha x) = \frac{1}{\sin(r\pi)}\left[\cos r\pi\, J_r(\alpha x) - J_{-r}(\alpha x)\right].$$

Relations entre ces fonctions, développements suivant les puissances de x, croissantes ou décroissantes.

Muir (*Thomas*). — A fifth list of uritings on determinants [Une cinquième liste d'écrits sur les déterminants] (343-378).

Fait suite aux quatre listes déjà parues dans le *Quaterly Journal*. Elle comprend la suite de la quatrième liste, et un supplément aux quatre premières. Suit un Index des noms d'auteurs pour la quatrième et la cinquième liste.

Bennett (*G.-T.*). — Mutually inscribed tetrahedra [Tétraèdres inscrits l'un dans l'autre] (379-386).

L'auteur obtient par des moyens élémentaires la figure formée par seize points et seize plans, tels que par chaque point passent six des plans et dans chaque plan se trouvent six des points. On en déduit une infinité de couples de tétraèdres inscrits l'un dans l'autre.

E. Cahen.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

6e série, tome IX, 1913.

Sire (*J.*). — Sur les fonctions entières de deux variables d'ordre apparent total fini et à croissance régulière par rapport à l'une des variables (1-37).

Complément à une thèse parue dans le *Circolo Matematico di Palermo* (1) et solution d'un cas particulier d'un problème posé par M. Borel (2).

(1) Tome XXI, p. 1-91.

(2) E. Borel, *Leçons sur les Fonctions entières*, p. 112.

Vessiot (*E.*). — Sur la propagation par ondes et sur le problème de Mayer (39-76).

M. Vessiot a longuement étudié les conséquences analytiques du principe d'Huygens considéré comme définissant la propagation infinitésimale des ondes dans un milieu à un nombre quelconque de dimensions, et de nature quelconque; il s'est occupé spécialement des rapports de cette propagation par ondes avec la théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre et des systèmes canoniques, avec le calcul des variations et avec la dynamique analytique.

Ce Mémoire est un complément aux travaux qui viennent d'être énumérés. C'est l'étude du cas le plus général possible, celui où les ondes élémentaires ont $\infty^{n-\alpha-1}$ points et ∞^{n-1} plans tangents.

Une question de minimum intéressante (problème de Mayer) tient une large place dans ce travail.

Nörlund (*N.-E.*). — Sur une classe d'intégrales définies (77-88).

Cette Note est consacrée à l'étude d'équations aux différences finies et à la formation de systèmes fondamentaux de solutions qui se représentent par certaines intégrales définies étendues sur des produits de fonctions Γ, intégrales rencontrées précédemment par M. Pincherle.

Duhem (*P.*). — Sur le diamagnétisme (89-164).

L'étude thermodynamique des corps diamagnétiques a suscité un certain nombre de paradoxes embarrassants; de grands esprits ont, en ce chapitre de la Physique, énoncé des erreurs, dont la principale fût que le diamagnétisme ne peut se rencontrer dans la nature; car on ne peut traiter, comme on l'a fait, du mouvement du magnétisme sur un corps en faisant abstraction des courants électriques dont il est le siège.

Tout raisonnement correct sur le mouvement du magnétisme (et les problèmes de stabilité d'équilibre sont des problèmes de mouvement) exige qu'on recoure aux lois de l'Électrodynamique et de l'Électromagnétisme; l'emploi de ces lois a tôt fait de montrer l'inexactitude des raisonnements qui prétendaient s'en passer et de faire évanouir les propositions paradoxales auxquelles ces raisonnements avaient conduit.

Teixeira (*G.*). — Extrait d'une lettre à M. Haton de la Goupillière (165-170).

Démonstration d'intéressantes propositions de Géométrie analytique :

1. Les foyers d'une courbe sont aussi les foyers de sa développoïde (la développoïde est l'enveloppe d'une droite faisant en un point de la courbe un angle constant avec la tangente).

2. La polaire d'une courbe quelconque par rapport à un cercle ayant son centre en un foyer de cette courbe passe par les points circulaires à l'infini.

Maillet (*E.*). — Sur les systèmes de réservoirs et divers problèmes d'Algèbre et d'Analyse corrélatifs (171-231).

Étude de cette question d'une extrême généralité, ainsi que le sont d'ordinaire les travaux de M. Maillet : soient n objets ou réservoirs $S_1, \ldots, S_n$ qui jouissent d'une propriété ou d'un état défini pour chacun par une certaine quantité caractéristique variable $z_1, \ldots, z_n$, qui s'influencent réciproquement, et dont chacun peut subir, en outre, des actions extérieures z_i ou du temps t; quelles sont les variations de $z_1, \ldots, z_n$?

M. Maillet, pour des cas étendus : 1° établit les systèmes d'équations différentielles et implicites du problème général ; 2° montre que, avec une alimentation limitée, les quantités $z_1, \ldots, z_n$ restent limitées, sous certaines conditions; 3° étudie la stabilité du régime permanent, les petites perturbations périodiques et les régions voisines de ce régime.

Il s'agit ici d'une suite à des études qui ont été déjà signalées dans le *Bulletin* lors de l'Analyse de ce même *Journal*, année 1909.

Platrier (*Ch.*). — Sur les mineurs de la fonction déterminante de Fredholm et sur les systèmes d'équations intégrales linéaires (233-304).

Innombrables sont les travaux auxquels l'équation étudiée par Fredholm

$$\int_a^x b(x, s)\,ds = c(x)$$

a donné naissance, ainsi que l'équation plus générale

$$a(x)\,\varphi(x) - \lambda \int_\alpha^\beta b(x, s)\,\varphi(s)\,ds = c(x),$$

dont Abel avait déjà envisagé un cas particulier.

En son temps, l'auteur de ce Mémoire a apporté une contribution intéressante à ce beau Chapitre, en certains points définitif, de l'Analyse.

Il a étudié notamment la résolvante d'un noyau donné et divers systèmes d'intégrales linéaires.

Gevrey (*M.*). — Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique (305-471).

Ce Mémoire est consacré à l'étude de la belle question des équations aux dérivées partielles du type parabolique; la plus simple est l'équation de la chaleur

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial z}{\partial y}; \tag{1}$$

c'est, parmi les équations à deux variables du type paraboliqne, l'analogue de l'équation de Laplace dans les équations du type elliptique.

MM. Holgrem [1] et Levi [2] ont traité l'équation (1) en 1907 et 1908, en s'inspirant des théories modernes relatives aux équations intégrales et en particulier de la méthode employée par M. Picard dans son *Mémoire sur les équations aux dérivées partielles* [3].

M. Gevrey étudie l'équation (1) et l'équation plus générale

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = f(x, y),$$

en s'occupant spécialement de la délicate question de la *résolution du problème aux limites*.

Puis, rappelant que M. Hadamard a donné en 1911 la solution fondamentale de l'équation

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a\frac{\partial z}{\partial x} + b\frac{\partial z}{\partial y} + cz = 0 \qquad (b > 0),$$

en la ramenant au type

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial y} = cz,$$

par un procédé de réduction spécial au cas de deux variables, M. Gevrey fait l'extension au cas de plusieurs variables de la méthode de M. Hadamard.

6e série, tome X, 1914.

Roche (L.). — Sur la surface des ondes dans la polarisation rotatoire magnétique et dans quelques phénomènes plus généraux (1-95).

M. Roche répond à la question suivante, posée par M. Boussinesq : étudier certaine biréfringence spéciale, engendrée dans un corps isotrope transparent par un champ magnétique et l'altération qu'elle produit dans la forme circulaire des trajectoires pour des ondes inclinées sur l'axe du champ.

L'altération dont il s'agit concerne l'inégalité créée par le champ magnétique entre les trois coefficients a, b, c figurant dans les trois équations du mouvement de l'éther, et dont le troisième c, corrélatif à l'axe du champ pris pour Oz, cesse d'être égal aux deux premiers a et b. Cette inégalité a pour effet de rendre les corps biréfringents à la manière d'un cristal uniaxe, dont l'axe optique ou principal coïnciderait avec la ligne des pôles de l'aimant.

Ce fait a suggéré à l'auteur l'idée d'une généralisation à deux degrés, largement utilisée.

Médaille de Weierstrass (1916). — Règles posées pour le concours (p. 96).

---

[1] *Arkiv für Matematik*, Bd III, IV, 1907-1908.

[2] *Annali di Matematica*, 1908.

[3] *Journal de Mat. pures et app.*, 1890.

Jordan (*C.*). — Des polynomes invariants par une substitution linéaire (97-104).

Une substitution linéaire S étant mise sous une certaine forme, qui est le produit de deux autres substitutions, il en résulte que tout polynome F invariant par la substitution S est une somme de formes invariantes Φ homogènes par rapport à chacune des séries variables qui figurent dans S, et isobares; réciproquement, tout polynome invariant pourra être obtenu par ce procédé. *Voir* aussi p. 187.

Gevrey (*M.*). — Sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique (105-148).

Fin du Mémoire analysé précédemment (année 1913). A signaler l'étude du problème du raccordement.

Cartan (*E.*). — Les groupes projectifs continus réels qui ne laissent invariante aucune multiplicité plane (149-186).

L'auteur a indiqué par ailleurs (¹) comment on peut former tous les groupes linéaires continus ne laissant invariante aucune multiplicité plane, en supposant que les paramètres et les variables sont complexes.

Il s'occupe ici du cas où les paramètres sont réels et les variables complexes, puis du cas où paramètres et variables sont réels.

Les résultats ont des applications relatives à la théorie des groupes; ils en ont aussi pour la représentation des points imaginaires, par des figures réelles.

Prix Léon Marie (annuel. 500^{fr}) (p. 188). — Règlement du concours. — L'Institut des Actuaires français, 5, rue Las-Cases, Paris, est chargé de décerner le prix.

Le Roux (*J.*). — Sur le problème de Dirichlet (189-230).

Beaucoup de théories mathématiques et de problèmes d'application conduisent à envisager les fonctions qui dépendent de toutes les valeurs que prennent des fonctions arbitraires dans un certain domaine.

Les fonctions de cette nature ont été l'objet de recherches de MM. Volterra, Arzela, Hadamard.

Considérant l'intégrale de Dirichlet et l'équation de Laplace, chacune comme limite d'une somme finie, M. J. le Roux étudie la variation de cette somme par un procédé qui consiste à déduire le passage à la limite de la variation, ce qui lui permet d'envisager les cas où l'intégrale limite n'existerait pas.

Villat (*H.*). — Sur la validité des solutions de certains problèmes d'Hydrodynamique (231-290).

La théorie du mouvement discontinu des fluides a donné lieu à de nombreux

(¹) *Bulletin de la Société mathématique de France*, t. XLI, 1913, p. 53-96.

travaux, parmi lesquels ceux de M. Villat font autorité, surtout en ce qui concerne le problème de l'écoulement d'un courant fluide, illimité ou non, autour d'un obstacle de forme donnée, les parois, s'il y en a, ayant aussi des formes données à l'avance.

Mais, en raison de difficultés signalées par M. Brillouin, les solutions auxquelles on arrive restent illusoires, car il se présente diverses impossibilités très difficiles à déceler *a priori*.

M. Villat établit quelques conditions, d'une application pratique très aisée, concernant la fonction arbitraire dont dépend la forme de l'obstacle supposé placé dans le courant, conditions telles que la solution correspondante est générale et acceptable. Il étudie d'abord le cas du fluide indéfini, puis celui, beaucoup plus complexe, du fluide limité par deux parois.

Il insiste notamment sur les obstacles convexes en forme de proue, d'où les lignes de glissement se détachent avec un rayon de courbure non nul, ce qui est le plus intéressant pour l'application pratique, et il énonce des cas étendus où les vitesses et les lignes de glissement sont toujours acceptables.

Liénard et Chipart. — Sur le signe de la partie réelle des racines d'une équation algébrique (291-346).

Signalons une des rares études d'Algèbre parue depuis les travaux de Laguerre; les auteurs se sont trouvés, à propos de recherches de Physique mathématique et de Mécanique rationnelle, en présence de ce problème intéressant :

« Etant donnée une équation algébrique à coefficients réels, trouver les conditions pour que ses racines soient de la forme $-K^2+\beta\sqrt{-1}$, K étant essentiellement différent de zéro et β pouvant prendre une valeur quelconque, zéro compris. »

Appelant *quantités pseudo-positives* les expressions

$$a^2+bi \quad (a^2 \text{ positif; } b \text{ positif, négatif ou nul})$$

et *pseudo-négatives* les expressions

$$-a^2+bi \quad (a^2 \text{ positif; } b \text{ positif, négatif ou nul}),$$

les racines d'une équation se classent dans l'une des catégories : pseudo-positives, pseudo-négatives, nulles, purement imaginaires.

Les auteurs donnent les conditions pour que les racines de l'équation soient pseudo-négatives.

A rapprocher de travaux simultanés de Routh sur la même question, comme le font MM. Liénard et Chipart.

Peut-être la question mériterait-elle d'attirer de nouveau l'attention des algébristes.

Duhem (P.). — Le problème général de l'Électrodynamique pour un système de corps immobiles (347-416).

Ce n'est pas précisément une suite au Mémoire analysé plus haut (année 1913),

mais l'étude par des procédés différents (un autre biais, dit modestement le grand physicien) du cas où, au lieu d'un seul corps diamagnétique homogène, on se trouve en présence de systèmes composés de plusieurs corps de nature différente.

La méthode suivie ici consiste à tracer la voie qu'il conviendrait de prendre si l'on voulait résoudre de manière effective le problème général de l'Électrodynamique, tel que la théorie de von Helmholtz le pose pour un système de corps immobiles.

La solution de ce problème se ramène à la détermination de quatre fonctions, la fonction potentielle électrostatique et les trois fonctions de Helmholtz, problèmes qui dépendent eux-mêmes de l'intégration d'équations aux dérivées partielles du deuxième et du troisième ordre.

7[e] série, tome I, 1915.

Pérès (*J.*). — Sur les fonctions permutables de première espèce de M. Volterra (1-97).

La théorie des fonctions permutables de première espèce, c'est-à-dire telles que

$$\int_x^y f(x, \xi)\, \varphi(\xi, y)\, d\xi = \int_x^y \varphi(x, \xi)\, f(\xi, y)\, d\xi,$$

a été développée par M. Volterra, qui en a indiqué les applications à la théorie des fonctions intégrales (¹), puis par M. Vessiot (²).

Le but de ce Mémoire est la détermination des fonctions permutables avec une fonction donnée, en partant des premières notions concernant le sujet, ce qui permet de suivre aisément l'auteur.

Cette correspondance entre fonctions semble promettre des résultats assez intéressants pour que M. Volterra en ait fait l'objet de *Leçons* à l'Université de Rome.

Duhem (*P.*). — Note sur le problème général de l'Électrodynamique (99-103).

Rectifications concernant le Mémoire analysé plus haut (année 1914).

Denjoy (*A.*). — Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues (105-240).

Étude des nombres dérivés des fonctions continues les plus générales.

Conclusion essentielle : Si l'on néglige un ensemble de mesures certainement nulles, en un point quelconque, les dérivés extrêmes d'une même fonction continue se groupent suivant l'un des quatre modes suivants : 1° les dérivés

---

(¹) *Rend. Lincei*, 1910-1911 (premiers semestres).

(²) *Comptes rendus*, 1912 (1[er] semestre).

extrêmes sont $+\infty$ et $-\infty$ pour chaque côté; 2° le dérivé supérieur droit est $+\infty$, le dérivé inférieur gauche est $-\infty$, les deux autres dérivés extrêmes étant finis et égaux; 3° il existe une dérivée bilatérale finie; 4° les nombres dérivés extrêmes ont les mêmes valeurs qu'au second cas, les côtés étant échangés.

Ce Mémoire a pour base l'étude des *Leçons sur l'Intégration*, de M. Lebesgue [1], et les *Leçons sur les Fonctions discontinues*, de M. Baire [1]. Il pourra être utile de leur joindre les *Leçons professées au Collège de France*, de M. de la Vallée Poussin [1] : car ces questions ne sont pas de celles qu'il soit possible de suivre sans profondes réflexions.

Goursat (*E.*). — Sur quelques points de la théorie des invariants intégraux (241-259).

M. Goursat complète ici les résultats d'un Mémoire antérieur (même *Journal*, 1908).

Il montre que : de tout invariant intégral absolu I_p d'un système

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n} = dt,$$

on peut en général déduire un invariant I_{p-1} attaché aux caractéristiques de ce système.

Obtient-on par ce procédé tous les invariants intégraux attachés aux caractéristiques ?

Un invariant intégral étant donné, comment reconnaître s'il est attaché aux caractéristiques ?

L'auteur donne une solution très simple de ces deux questions.

Woronetz (*P.*). — Sur le mouvement d'un point matériel, soumis à une force donnée, sur une surface fixe et dépolie (261-275).

Dans cette Note, M. Voronetz obtient, d'abord au moyen des coordonnées curvilignes u, v de Gauss, l'équation différentielle de la trajectoire d'un point matériel M, soumis à une force Φ et contraint à se mouvoir sur une surface fixe dépolie; ensuite il suppose que le mouvement du point M ait lieu sur S parfaitement polie, sous l'action de la même force Φ : c'est ce qu'il appelle « problème non troublé »; enfin, il considère les constantes d'intégration du problème non troublé comme variables dans le problème « troublé » (S dépolie), et il développe les équations différentielles qui définissent ces nouvelles variables en fonction du temps t.

Boussinesq (*J.*). — Comment le débit d'un tuyau de conduite affecté d'un rétrécissement notable mais graduel, peut se déduire de l'abaissement de pression qui s'y produit le long de la partie rétrécie (277-283).

Il résulte des observations de l'ingénieur américain Clemens Hershell, con-

---

(1) Collection Borel, Gauthier-Villars, Paris.

firmé par d'autres plus récentes, que le débit d'une conduite affecté d'un rétrécissement notable mais graduel, se déduit facilement, au centième près, de la différence des deux pressions.

M. Boussinesq a remarqué la présence d'un paradoxe dans cette théorie. Il l'explique en montrant qu'il a son origine dans deux petites erreurs de calcul, de sens contraires.

Boussinesq (*J.*). — Rapport du prix Boileau d'hydraulique pour l'année 1915 (285-289).

Un seul candidat : M. Umberto Puppini. M. Boussinesq analyse le Mémoire présenté par M. Puppini (*Le principe de réciprocité pour les nappes artésiennes*) et conclut à ce que le prix lui soit attribué.

Boussinesq (*J.*). — Complément à un Mémoire du deuxième fascicule du *Journal de Mathématiques* pour 1912, sur la théorie géométrique des déplacements bien continus des corps déformables : remarques et calculs montrant que la complication des formules pour les grands déplacements est due non aux déformations, mais aux rotations (291-296).

Afin de mieux apprécier le degré de complication que les rotations introduisent dans le sujet, M. Boussinesq traite en détail le cas, de beaucoup le plus simple, où les deux coordonnées x, y, avec les deux déplacements ξ, η, sont seules à considérer.

Jager (*F.*). — Sur les marées d'un bassin à parois verticales (297-352).

Ce travail important a pour principal objet l'étude des marées proprement dites, c'est-à-dire des oscillations contraintes d'un bassin limité par des parois verticales, en tenant compte de la force centrifuge composée, due à la rotation de la Terre.

L'attraction exercée sur lui-même par le bourrelet liquide est négligée, ainsi que le frottement; la croûte terrestre est supposée indéformable.

Le problème est mis en équation selon la méthode de Poincaré. La démonstration de l'existence de la solution est obtenue à l'aide des équations de Fredholm ; à cet effet, une méthode introduite par M. Picard dans son Mémoire *Sur la solution du problème général de Dirichlet*, est utilisée.

Une bibliographie bien étudiée, et réduite aux principaux travaux, aidera à l'étude de cette question.

Gonggryp (*B.*). — Quelques théorèmes concernant la relation entre les zéros d'un polynome et ceux d'un polynome de degré inférieur (353-365).

De nombreux mathématiciens se sont efforcés d'étendre le théorème de Rolle aux racines imaginaires des équations.

D'après l'auteur de cette Note : aucun des zéros de la dérivée $f'(z)$ d'un polynome $f(z)$ ne peut se trouver en dehors du polygone limite des zéros de $f(z)$. Il en résulte : quand tous les zéros du polynome $f(z)$ sont situés en dehors d'un cercle, décrit de l'origine comme centre avec un rayon R, tous les zéros de $nf(z) - zf'(z)$ se trouvent aussi en dehors du même cercle.

Bohlin (*K.*). — Sur le développement des intégrales du problème des trois corps (367-406).

Ce travail de grande envergure est la mise au net, si l'on peut dire, d'importantes études de l'auteur relatives au mouvement d'un corps C de masse nulle, attiré par deux autres corps A, B, dont chacun décrit autour de l'autre une orbite circulaire.

En prenant pour origine des coordonnées le centre de gravité des corps A et B; en désignant par r le rayon vecteur du corps C et par v la longitude du rayon vecteur r par rapport à la situation de la ligne AB à l'origine du mouvement; en représentant par x, y les coordonnées rectilignes correspondantes, par w la longitude du rayon vecteur AB par rapport à la même direction initiale, M. Thye a calculé des valeurs de ces coordonnées s'accordant, à cinq décimales près au moins, avec des résultats obtenus précédemment par v. Haerdtl.

De l'orbite ainsi déterminée, M. Bohlin déduit les expressions analytiques qui représentent le mouvement dans le problème des trois corps dont il s'agit.

L'orbite relative est une courbe de forme triangulaire, pour laquelle les formules

$$r = A[1 - e_1 \cos u - e_2 \cos v],$$
$$nt = u - e'_1 \operatorname{Si} u - e'_2 \operatorname{Si} v,$$
$$nt = v - e''_1 \operatorname{Si} u - e''_2 \operatorname{Si} v$$

fournissent déjà, avec des valeurs convenables des excentricités, une représentation assez approchée. Les valeurs des excentricités sont différentes pour le rayon vecteur r et pour chacune des équations képlériennes généralisées de nt. Il devient pourtant nécessaire d'ajouter des éléments variables, notamment longitude de périhélie, longitude d'époque, et d'autres pour lesquels l'auteur a déduit, par des calculs numériques à un certain degré schématiques, des développements de forme autologue, procédant suivant les multiples des anomalies u, v. Quatre tableaux jouent les traits des fonctions élémentaires des deux variables, qui sont employées pour la représentation dont il s'agit.

Les formules obtenues ont sur les développements antérieurement usités l'avantage de pouvoir être étendus à des puissances très élevées des excentricités et des autres éléments.

7e série, tome II. 1916.

Globa-Mikhaïlenko (*B.*). — Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation (1-78).

L'auteur apporte ici une importante contribution au problème posé et illustré par les travaux des plus grands mathématiciens.

On s'est à l'origine, dès la découverte de l'attraction universelle, proposé de trouver les figures d'équilibre d'une masse liquide et homogène qui tourne uniformément autour d'un axe fixe et dont les particules s'attirent d'après la loi de Newton.

Une autre question, encore plus ardue, est de reconnaître si les figures obtenues sont stables ou instables, ce dernier cas n'étant pas acceptable, évidemment, au point de vue physique.

L'introduction, conjointement à l'attraction, des forces capillaires qui produisent une faible pression superficielle, proportionnelle à la courbure moyenne de la surface, fait l'originalité de ce travail en raison de cette conclusion : ces forces rendent impossibles les figures ellipsoïdales d'équilibre.

Au contraire, quand ces seules forces interviennent, c'est-à-dire quand l'attraction newtonienne n'existe pas (liquides de Plateau), les figures d'équilibre du repos se transforment en anneaux quand on les fait tourner autour de leur axe.

Humbert (*G.*). — I. Sur la méthode d'approximation d'Hermite (79-103). — II. Sur les fractions continues ordinaires et les formes quadratiques binaires indéfinies (104-154). — III. Remarques sur certaines suites d'approximation (155-167).

I. Hermite a indiqué une méthode remarquable pour l'approximation d'un nombre irrationnel positif ω. Humbert étudie cette méthode, que l'emploi d'une *interprétation géométrique* simple rend d'une lumineuse clarté. Il résout les problèmes suivants :

1° Étant données deux fonctions d'Hermite consécutives, trouver la suivante, c'est-à-dire former directement la suite d'Hermite;

2° Reconnaître si une fraction donnée appartient à cette suite :

3° Étudier la liaison entre les réduites ordinaires de ω et les fractions d'Hermite.

Humbert est de plus conduit à un développement de ω, analogue au développement en fraction continue, dont il expose les propriétés priucipales.

II. Ce travail est divisé en trois parties :

1° Exposé d'une interprétation géométrique des fractions continues (dérivée de travaux de Stephen Smith), analogue à celle qui est utilisée dans le Mémoire I; cette interprétation conduit à une démonstration très simple du théorème de Lagrange sur la périodicité et rend intuitives plusieurs propriétés des réduites ;

2° Étude du nombre de certaines formes réduites équivalant à une forme quadratique binaire indéfinie f, à coefficients entiers ;

3° Calcul du nombre des réduites d'Hermite équivalant à f.

III. Démonstrations simples de propositions dues à M. Hurwitz, d'une autre proposition due à M. Markoff et complément à ces propositions.

Cet ensemble de travaux, qui pourrait servir de base à un beau chapitre de l'Algèbre, ajoute à nos regrets d'avoir vu disparaître prématurément le savant mathématicien que fut Humbert.

Kelleher (*S.-B.*). — Des limites des zéros d'un polynome (169-171).

La fonction entière

$$1 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$$

n'a pas de zéros à l'intérieur du cercle de rayon

$$1 : (1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots)^{\frac{1}{2}}$$

si la série

$$1 + |a_1|^2 + |a_2|^2 + \ldots$$

est convergente.

Bohlin (*K.*). — Sur le développement des intégrales du problème des trois corps (173-200).

Fin du Mémoire analysé précédemment (année 1915).

De Montessus de Ballore (*R.*). — Sur les courbes gauches algébriques (201-252).

I. Une courbe gauche étant représentée par des équations de la forme

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad z\chi(x, y) - \psi(x, y) = 0,$$

on peut étudier complètement ses singularités en partant des singularités des courbes planes

$$\varphi = 0, \qquad \chi = 0, \qquad \psi = 0.$$

II. Extension à des courbes gauches ayant des singularités et aux courbes gauches ayant des points à l'infini d'une célèbre proposition d'Halphen relative aux courbes gauches dépourvues de singularités et de points à l'infini; application à la courbe

$$x^2 + y^2 - y = 0, \qquad z = \frac{(2y - 1)(x^3 + y^3 - 2x)}{(x - y)[x(x^2 + y^2) + x^2 - y^2]},$$

qui a des points à l'infini.

Jordan (*C.*). — Sur les groupes linéaires (mod p) à invariant quadratique (253-280).

M. Dickson [1] a déterminé l'ordre et la structure des groupes de substitutions linéaires (mod p), p premier, qui laissent invariante une forme quadratique $F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \bmod p$.

Il restait toutefois une lacune, que précise Jordan, à combler : le R. P. de Séguier a pu le faire [2] (*voir* l'Analyse du Mémoire suivant) et, en conséquence, la théorie de M. Dickson peut être considérée comme achevée.

Elle est cependant susceptible de simplifications : c'est ce que montre Jordan.

---

[1] *Linear Groupes*, Teubner, Leipzig, 1901.

[2] *Comptes rendus Acad. Sc.*, 1913.

De Séguier (*J.-A.*). — Sur les groupes à invariant bilinéaire ou quadratique dans un champ de Galois (281-366).

Le R. P. de Séguier étudie d'abord la théorie des groupes linéaires à invariant quadratique dans un champ de Galois, en prenant cet invariant sous la forme d'une somme de rectangles augmentée d'une forme quadratique à une ou deux variables.

Cette méthode est due à Jordan.

A l'aide de la même méthode, le R. P. de Séguier étudie ensuite le groupe linéaire à invariant hermitien, puis le groupe linéaire à invariant bilinéaire gauche.

Il arrive à de nouveaux et remarquables résultats.

7e série, tome III, 1917.

Montel (*P.*). — Sur la représentation conforme (1-54).

La représentation conforme d'un domaine D, limité par un seul contour C et contenu dans le plan de la variable Z, sur un domaine D' limité par un seul contour C', se ramène à la représentation conforme de chacun de ces domaines sur un cercle d de rayon *un*, limité par une circonférence c et contenu dans le plan des z.

L'auteur s'occupe d'abord de la représentation conforme d'un domaine simplement connexe D sur le cercle d; il montre la possibilité de la représentation conforme pour un domaine simplement connexe quelconque dont la frontière ne se réduit pas à un seul point.

Il apporte ensuite quelques compléments à l'étude que MM. Carathéodory et Lindelöf ont faite de la correspondance entre les points frontières d'un domaine simplement connexe D, limité par une frontière C, et la circonférence c d'un cercle d correspondant à D.

Barrau (*J.-A.*). — Mouvements algébriques dans le plan (55-76).

La position d'un plan mobile (x, y) dans le plan fixe (X, Y) est donnée par les relations

$$(1, 2) \qquad X = xc + ys + a, \qquad Y = xs - yc + b$$

$$(c = \cos\varphi, \ s = \sin\varphi),$$

$$(3) \qquad c^2 + s^2 = 1.$$

Un mouvement est déterminé si a, b sont connus en fonction du temps t: si c, s, a, b sont liés par des relations

$$(4, 5) \qquad f_1(c, s, a, b) = 0, \qquad f_2(c, s, a, b) = 0.$$

La trajectoire $F(X, Y) = 0$ du point $x = x_1, y = y_1$ du plan mobile dans le plan fixe est obtenue par l'élimination de c, s, a, b entre les équations (1) à (5).

On peut considérer la suite des valeurs de s, c, a, b comme une courbe dans un espace à quatre dimensions, ce qui permet de donner à toute la géométrie de l'espace à *quatre* dimensions une *interprétation* cinématique dans le plan ordinaire de l'espace à *deux* dimensions.

Montessus de Ballore (*R. de*). — Sur les quartiques gauches de première espèce, leurs représentations paramétriques et leur classification (77-169).

I. Représentation paramétrique des quartiques (ou biquadratiques) gauches, de première espèce, qui sont les intersections de deux surfaces du second ordre à l'aide des fonctions sn, cn, dn; calcul dans les divers cas possibles des fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 utilisées pour cette représentation :

$$\frac{x}{f_1(\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u)} = \frac{y}{f_2(\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u)} = \frac{z}{f_3(\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u)} = \frac{t}{f_4(\operatorname{sn} u, \operatorname{cn} u, \operatorname{dn} u)}.$$

Cas de dégénérescences. Remarque de M. Vogt.

II. Classification, précisant et complétant les classifications antérieures, basée sur les résultats qui précèdent.

Hamy (*M.*). — Sur un cas particulier de diffraction des images des astres circulaires.

L'auteur étudie le problème suivant :

Un astre circulaire, de diamètre 2ε, *étant observé au foyer d'une lunette diaphragmée par une fente rectiligne, trouver les variations de l'intensité lumineuse, le long de l'axe de symétrie de l'image parallèle au grand côté h de la fente, dans une direction faisant l'angle* φ *avec la droite allant de l'observateur au centre de l'astre.*

Cette question se pose à propos d'une méthode expérimentale imaginée par M. Hamy pour mesurer le diamètre, mal connu encore, du Soleil et en étudier les variations, méthode consistant à observer l'astre au foyer d'une lunette dont l'objectif est recouvert d'un écran opaque, percé d'une fente de grande longueur.

Hancock (*M.*). — Problèmes de Géométrie arithmétique (217-245).

La géométrie arithmétique, ou géométrie des nombres, désigne la théorie où des théorèmes numériques sont inspirés, expliqués, illustrés par des notions géométriques.

La géométrie arithmétique peut se borner aux nombres naturels rationnels ou entiers (Gauss) ou s'élever aux nombres algébriques, transcendants (Minkowski).

M. H. Hancock s'occupe ici des nombres naturels entiers.

Le principe qu'il met en œuvre est de compter combien de fois un phénomène donné peut se présenter dans une construction géométrique convenablement choisie.

Quand ce calcul pouvant être effectué de deux manières, conduit à des formules non identiques, l'équation qui exprime l'identité des deux résultats correspond à l'énoncé d'une proposition arithmétique.

C'est ainsi que l'auteur retrouve très élégamment cette proposition due à Sylvestre :

La probabilité pour que trois nombres entiers choisis au hasard n'aient pas de diviseur commun est $\frac{5}{6}$.

Burstall (*F.-W.*). — Congruence se rapportant aux nombres de Bernoulli et d'Euler au module p^{i+1} (247-264).

Kummer a donné une congruence générale se rapportant aux nombres de Bernoulli et d'Euler. L'auteur de cette Note développe cette congruence et lui donne des formes plus générales, à l'aide d'une nouvelle congruence qui traite des différences de zéro, attendu que ces différences se prêtent facilement à l'étude des fonctions périodiques dans la théorie des nombres.

Jordan (*C.*). — Mémoire sur les groupes résolubles (263-374).

L'objet principal du célèbre *Traité des substitutions* de C. Jordan est la solution des questions suivantes :

Problème A. — *Construire les groupes résolubles maxima de substitutions entre n lettres.*

Problème B. — *Construire les groupes résolubles primaires maxima contenus dans le groupe des substitutions linéaires homogènes à n variables* (mod p).

Problème C. — Opérer la même construction en n'employant que des substitutions assujetties à reproduire à un facteur près une forme Φ (mod p) (quadratique si $p = 2$, bilinéaire gauche à deux systèmes de variables cogrédientes si p est impair) et de discriminant $\neq 0$ (mod p).

C. Jordan avait obtenu la solution simultanée de ces trois problèmes par l'établissement d'une échelle de récurrence qui les ramène les uns aux autres jusqu'au moment où le résultat peut être écrit immédiatement.

Dans un Mémoire postérieur (*Memorie della Pontificia Accademia Romana dei Nuovi Lincei*, vol. XXVI), C. Jordan avait simplifié son analyse et l'avait étendue au cas où, dans le problème C, on suppose soit Φ quadratique et p impair, soit Φ bilinéaire et $p = 2$.

C'est la discussion exposée dans le Mémoire des *Nuovi Lincei*, qui est reprise et complétée ici.

R. de Montessus de Ballore.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Tome XXXV (1918) [1].

Boussinesq (J.). — Complément à un récent Mémoire des *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* sur la poussée des terres et l'état ébouleux [2], avec quelques idées générales sur la Mécanique des semi-fluides, et application de ces idées aux corps plastiques (1-128).

M. Boussinesq considère ici le cas où la surface libre ou la paroi cessent d'être planes, mais restent cylindriques, et le cas où l'on introduit une seconde paroi en arrière de la première. Il cite comme exemple important, mais sans doute difficile à calculer, d'état ébouleux l'écoulement du sable dans un sablier, et indique une explication du fait que les massifs pulvérulents étouffent le son. Après quelques aperçus sur la mécanique des semi-fluides en général, contenant aussi d'intéressants résultats sur les corps *durs* et *cassants*, M. Boussinesq s'attache à expliquer les lois par lesquelles Tresca a représenté les résultats de ses expériences sur le poinçonnage des métaux.

Gevrey (Maurice). — Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles (premier Mémoire) (129-190).

M. Gevrey, généralisant une notion introduite à propos des équations du type parabolique, nomme fonctions de classe α celles dont la dérivée $n^{\text{ième}}$ est inférieure en valeur absolue à $M\frac{\Gamma(\alpha n)}{R^n}$, notion qui s'étend ensuite aux fonctions de plusieurs variables. Soient

$$F(x, y, z, p, q, r, s, t) = 0, \quad (1)$$

$$f(x, y, z, p, q, r) = 0 \quad (2)$$

des équations du type elliptique et du type parabolique

$$4F'_r F'_t - F'^2_s > 0, \quad f'_q f'_r \neq 0.$$

On suppose que F et f sont, ou de classe α en x et continues en y, ou de classe β en y et continues en x, ou de classe α en x et β en y, et, dans tous les cas, de classe γ en (z, p, q, r, s, t) $(\alpha, \beta, \gamma \geqq 1)$. *Dans ces conditions, toute solution régulière de ces équations sera de même nature que f ou que* F *par rapport à x et y.*

En outre, si l'équation (1) admet, dans le cas où $\alpha = \beta = \gamma = 1$, d'un certain côté d'une droite AB parallèle à Oy, une solution régulière se réduisant sur Oy à une fonction analytique de y, cette solution est prolongeable analytiquement

[1] Voir *Bull. des Sc. math.*, t. XLVI, 1922, 2e partie, p. 5.
[2] *Ibid.*

au delà de AB. Ce résultat n'est d'ailleurs valable que sous certaines hypothèses, énoncées au début par M. Gevrey, comme le montrent les équations

$$(rt - s^2)(1 + p^2 + q^2)^{-2} = R^{-2},$$

$$[1 + p^2)t - 2pqs + (1 + q^2)r](+ p^2 + q^2)^{-\frac{3}{2}} = 2R^{-1},$$

qui admettent toutes deux la solution

$$z = -\sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

nulle sur le cercle de centre O et de rayon R, et cependant non prolongeable au delà. Un résultat analogue est obtenu pour l'équation (2).

Lebesgue (Henri). — Remarques sur les théories de la mesure et de l'intégration (191-250).

Comparaison entre les procédés de M. Borel et ceux de M. Lebesgue; indications sur les conséquences de la découverte par MM. Lusin et Souslin du fait que la projection sur un axe d'un ensemble mesurable B peut être un ensemble non mesurable B : discussion sur des questions de priorité.

Villat (Henri). — Sur un calcul de résistance dans un courant fluide limité par un mur (251-312).

M. Villat montre que la composante de la résistance directement opposée au courant, dont il a donné antérieurement une expression, peut recevoir une forme explicite, débarrassée de tout signe de quadrature. Il donne ensuite quelques applications d'où il résulte notamment que la présence du mur peut modifier la résistance éprouvée par l'obstacle plongé dans le fluide, soit en l'augmentant, soit en la diminuant : cela dépend de l'orientation de l'obstacle sur la direction du mur.

Leau (Léopold). — Sur la mesure des ensembles linéaires (313-392).

M. Leau donne de la mesure des ensembles *de certaines familles* une définition qui se réduit à celle de MM. Borel et Lebesgue quand celle-ci donne une mesure positive, mais qui en diffère dans le cas où la mesure (de Borel-Lebesgue) serait nulle. Pour cela, M. Leau étudie les ensembles bornés situés dans un même *milieu de translation* : un *milieu de translation* est, par définition, un ensemble qui peut être superposé à lui-même par certaines translations (ou périodes) aussi petites que l'on veut.

La notion de mesure est ensuite étendue aux *milieux homogènes* (milieux de translation admettant pour période la différence d'abscisses de deux quelconques de leurs points) et à des milieux de translation plus généraux, c'est-à-dire à certaines familles d'ensembles non bornés.

Enfin M. Leau étend la notion de mesure à l'ensemble des ensembles mesurables faisant partie des milieux qu'il vient d'étudier.

GEORGES GIRAUD.

ATTI DEL REALE ISTITUTO VENETO DI SCIENZE, LETTERE ED ARTI.

T. LXXVIII (1918-1919).

Favaro (A.). — Oppositori di Galileo. — III. Cristoforo Scheiner [Oppositeurs de Galilée. — III. Christophe Scheiner] (1-107).

Severi (F.). — Sulle correzioni al tiro d'artiglieria dipendenti dalle variazioni di densità dell' aria [Sur les corrections au tir d'artillerie dépendant des variations de densité de l'air] (227-322).

Da Rios (L.-S.). — Interpretazione dinamica dei movimenti indotti in un liquido da un campo vorticoso [Interprétation dynamique des mouvements déterminés dans un liquide par un champ tourbillonnaire] (331-336).

Dans un liquide où ont lieu des tourbillons, l'auteur suppose qu'aient origine des forces ordinaires de masse. Dans le cas d'un unique tube tourbillonnaire, il propose un contrôle expérimental de cette hypothèse.

Cattaneo (P.). — Sulla congruenza $x^{n-1} \equiv (\mathrm{mod}\; n)$ [Sur la congruence $x^{n-1} \equiv 1 \;(\mathrm{mod}\; n)$] (337-344).

Cas de n quelconque.

Del Vecchio (E.). — La soluzione fondamentale per $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ [La solution fondamentale pour $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$] (359-382).

Il s'agit de la fonction qui, par rapport à l'équation donnée, se comporte comme la fonction

$$\frac{e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4(\eta-y)}}}{\sqrt{\eta-y}}$$

par rapport à l'équation de la chaleur. La fonction en question est

$$F_{20}(\xi-x,\eta-y) = \int_0^\infty d\mu\, e^{-\frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}(\eta-y)} \cos\left[\frac{\mu^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2}}(\eta-y) - \mu(\xi-x)\right].$$

Favaro (A.). — A proposito della ristampa di alcuni documenti relativi al processo di Galileo [A propos de la réimpression de quelques documents relatifs au procès de Galilée] (557-567).

Palatini (*A.*). — Moti einsteiniani stazionari [Mouvements einsteiniens stationnaires] (589-606).

Les trajectoires d'un point matériel libre qui se meut dans un champ einsteinien stationnaire coïncident avec un faisceau de trajectoires des points d'un système dynamique irréversible ayant trois degrés de liberté.

Serini (*R.*). — Sulle leggi ereditarie che conservano i massimi [Sur les lois héréditaires conservant les maxima] (783-788).

T. LXXIX (1919-1920).

Favaro (*A.*). — Oppositori di Galileo. — IV. Claudio Berigardo [Oppositeurs de Galilée. — IV. Claude Bérigardo] (39-92).

Da Rios (*L.-S.*). — Sulle conclusioni del Weingarten intorno ai vortici [Sur les conclusions de Weingarten au sujet des tourbillons] (93-98).

Weingarten trouva qu'en des points voisins à des filets tourbillonnaires très minces, la pression est négative et très grande en valeur absolue. L'auteur prouve qu'à la suite de l'hypothèse faite par lui dans sa Note du Tome précédent (p. 331) on peut avoir des filets tourbillonnaires sans qu'il s'ensuive une pression négative.

Bordiga (*G.*). — Elia Millosevich. Commémoration (23-27).

Pensa (*A.*). — Geometria assoluta delle formazioni geometriche in un S_n euclideo [Géométrie absolue des formations géométriques dans un S_n euclidien] (275-292), Note II (737-761).

Palatini (*A.*). — ds^2 einsteiniani in rappresentazione conforme con lo spazio euclideo [ds^2 einsteiniens représentables conformément sur l'espace euclidien] (321-325).

Ce sont seulement ceux qui correspondent aux solutions longitudinales de Levi-Cività, lesquels renferment comme cas particuliers les espaces de Schwarzschild.

Favaro (*A.*). — Note vinciane [Note sur L. de Vinci] (405-432).

Parvopassu (*C.*). — Sulla resistenza al traino dei veicoli [Sur la résistance au traînement des véhicules] (609-627).

Voir aussi une Note de M. Levi-Cività sur ce sujet dans le Tome LXXIII de ces *Rendiconti*.

Severi (*F.*). — Una rapida ricostruzione della geometria sopra

una curva algebrica [Une rapide reconstruction de la géométrie sur une courbe algébrique] (929-938).

L'auteur réussit à employer la tractation de Brill et Nöther en la délivrant de l'usage du théorème $Af + B\varphi$ et de l'analyse des singularités au moyen de transformations quadratiques successives. Les notions employées par l'auteur sont les suivantes : transformations birationnelles; séries linéaires g_n^r simples et composées; séries linéaires complètes et partielles; unicité de la série linéaire complète individuée par un groupe donné de points; image projective d'une g_n^r simple au moyen de la série linéaire des sections hyperplanes d'une courbe C d'ordre n appartenant à un espace S_r.

Viaro (B.). — Sulla risoluzione dell' equazione di Keplero [Sur la résolution de l'équation de Kepler (965-979).

Antoniazzi (A.-M.). — Di un rapido procedimento didattico per la trattazione dei principali problemi dell' Astronomia [Sur une méthode didactique rapide pour traiter les principaux problèmes de l'Astronomie] (1187-1246).

Emploi du calcul vectoriel.

T. LXXX (1920-1921).

Favaro (A.). — Oppositori di Galileo. — VI. Maffeo Barberini [Oppositeurs de Galilée. — VI. Maffeo Barberini] (1-46).

D'Arcais (F.). — Sviluppo di funzioni di variabile complessa in serie di facoltà analitiche [Développement de fonctions d'une variable complexe en série de facultés analytiques] (105-124).

Aliprandi (G.). — Sul numero delle radici primitive (mod p) [Sur le nombre des racines primitives (mod p)] (321-326).

Ces racines sont données par tous et seulement les résidus non quadratiques lorsque, $p-1$ étant résidu, p est de la forme $2^\alpha+1$. Elles sont données par tous et seulement les résidus non quadratiques, à l'exception de $p-1$, lorsque, $p-1$ étant non résidu et $p = a^\alpha b^\beta \ldots + 1$, est satisfaite la condition

$$\varphi(p-1) = \frac{p-3}{2}.$$

Bompiani (E.). — Del parallelismo in una varietà qualunque [Sur le parallélisme dans une variété quelconque]. Ire Partie (355-386), IIe Partie (839-859).

Soient P un point d'une V_n, ξ_1, ξ_2 deux directions sortant du point P et g la

géodésique déterminée par P et ξ_1. En P′, point infiniment rapproché de P sur g et *dans la surface géodésique déterminée par* (P, ξ_1, ξ_2), on construit la direction formant avec g l'angle (ξ_1, ξ_2); puis en P″, infiniment rapproché de P′, et *dans la surface géodésique* (P', ξ_1, ξ_2) la direction analogue, et ainsi de suite. On arrive ainsi à un point quelconque Q de g et l'on obtient la *parallèle* à ξ_2 en Q (*parallèle de Levi-Civita*).

Si, au lieu de changer la surface géodésique d'un point à l'autre, on fait la construction toujours dans la première surface géodésique (P, ξ_1, ξ_2), on obtient en Q une autre ligne (*la parallèle de Severi*).

Dans l'expression de l'angle (LS) de ces deux lignes, il entre un invariant J de V_n que l'auteur appelle *courbure de direction*. Étant K la courbure riemannienne, les variétés pour lesquelles on a

$$J = K^2,$$

et pour lesquelles les deux parallélismes se confondent entre eux, sont à courbure moyenne de Ricci constante en tout point. Les deux invariants J et K peuvent être remplacés avec avantage par un vecteur invariant que l'auteur appelle *vecteur riemannien.*

Dans la seconde Partie, on commence par traiter la question suivante. Si une direction sortant de P sur V_n subit un déplacement parallèle (de Levi-Civita) suivant un circuit infiniment petit passant par P, lorsqu'on revient en P elle aura généralement changé. Les formules donnant ce changement de direction ont été trouvées par Pérès (*Rendiconti des Lincei*, t. XXVIII, 1919). En considérant l'étoile formée par toutes les directions de V_n en P, on voit que cette étoile, après le mouvement, est congruente avec l'étoile primitive. Les deux directions ξ, η considérées en P déterminent l'orientation d'une *petite face* en V_n. Si n est impair, la transformation de l'étoile considérée précédemment produit une rotation de la petite face, ce qui n'a pas lieu généralement lorsque n est pair. La recherche de l'axe de rotation se fait, pour $n > 3$, au moyen de certains pfaffiens qui constituent une extension des symboles de Ricci. En étudiant la déviation d'une direction, on trouve, relativement aux petites faces et aux directions, des invariants, dont quelques-uns sont de ceux que l'on rencontre dans la théorie de la relativité.

Comessatti (*A.*). — Osservazioni di Geometria della retta in uno S_r [Observations de Géométrie de la droite dans un S_r] (387-405).

L'auteur emploie la représentation sur la variété V_d, appelée *grassmannienne*, que l'on obtient en interprétant les coordonnées

$$x_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$$

de la droite comme coordonnées d'un point d'un hyperespace. Suit une étude des systèmes linéaires *surabondants* de droites. Un système K_t est *linéaire* si la variété V_t correspondante est l'intersection complète de la grassmannienne V_d avec un espace linéaire, c'est-à-dire s'il est représenté par un certain nombre d'équations linéaires entre les x_{ik} (représentant autant de complexes linéaires indépendants); mais il peut arriver que K_t appartienne à un nombre de complexes linéaires indépendants supérieur à celui qui suffit pour le déterminer. Un tel système K_t est appelé par l'auteur un système *surabondant.*

Chisini (*O.*). — Le singolarità di un ramo superlineare di curva piana definite mediante un prodotto di sostituzioni [Les singu-

larités d'une branche superlinéaire de courbe plane, définies par un produit de substitutions] (419-440).

Si une fonction algébrique $y(x)$ varie avec continuité et dans le point $x=0$ viennent à se confondre

μ points de diramation relatifs au cycle $(12, \ldots, \nu)$,
μ_1 » » $(12, \ldots, \nu_1)$,
....,
μ_{m-1} points de diramation relatifs au cycle $(12, \ldots, \nu_{m-1})$,

étant ν_1 le plus grand diviseur commun de ν et μ; ν_2 celui de ν_1 et μ_1, ... et ν_{m-1}, μ_{m-1} premiers entre eux, on a à la limite un développement de y en série de puissances de $x^{\frac{1}{\nu}}$, où les exposants des *termes caractéristiques* sont

$$\frac{\mu}{\nu}, \quad \frac{\mu+\mu_1}{\nu}, \quad \ldots, \quad \frac{\mu+\mu_1+\ldots+\mu_{m-1}}{\nu}.$$

Réciproquement, toute branche qui a ces termes caractéristiques peut s'obtenir par un semblable passage à la limite et peut, par conséquent, se représenter par le produit des substitutions

$$(12, \ldots, \nu_{m-1})^{\mu_{m-1}} \ldots (12, \ldots, \nu_1)^{\mu_1} (12, \ldots, \nu)^{\mu}.$$

Finzi (A.). — Sulla rappresentabilità conforme di due varietà ad n dimensioni l'una sull altra [Sur la représentation conforme d'une variété de n dimensions sur une autre] (777-789).

Si, entre les éléments linéaires des deux variétés

$$ds^2 = \Sigma a_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$
$$ds'^2 = \Sigma a'_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

on pose la relation

$$ds'^2 = e^{2\tau}.ds^2,$$

on trouve, pour qu'on puisse déterminer la fonction τ, des relations entre les symboles de Riemann. L'auteur traite d'abord le cas de la représentation sur un espace euclidien, et puis le cas complètement général. Il y a un système triple covariant qui doit être le même pour les deux variétés et qui, lorsque l'une d'elles est un espace euclidien, est nul identiquement.

Brusotti (L.). — Sui centri critici di un fascio reale di curve piane algebriche [Sur les centres critiques d'un faisceau réel de courbes planes algébriques] (791-820).

Un *centre critique* est un point qui est double pour *une* (seule) courbe du faisceau. Il y a des faisceaux réels, algébriquement génériques, d'ordre n, qui ont pr points de base réels et $2(n-1)^2+qs$ centres critiques réels, lorsqu'il est

$$p \equiv q+1 \equiv r \equiv s+1 \equiv n \pmod 2,$$
$$p \leqq q+1 \leqq n,$$
$$r \leqq s+1 \leqq n.$$

Autres propositions, conséquences de ce théorème. Suit un théorème analogue, mais plus général, où entre le nombre des centres critiques tac-nodaux.

Cattaneo (*P.*). — Sullo sviluppo in frazione continua delle radici quadrate dei numeri razionali [Sur le développement en fraction continue des racines carrées des nombres rationnels] (1007-1015).

On a

$$\sqrt{\frac{m}{n}} = [r : s_1, s_2, \ldots, s_2, s_1, 2r].$$

Démonstration de la proposition réciproque, c'est-à-dire que toute fraction continue périodique mixte de cette forme est la racine carrée d'un nombre rationnel.

Bompiani (*E.*). — Studi sugli spazi curvi. La seconda forma fondamentale di una V_m in V_n [Études sur les espaces courbes. La seconde forme fondamentale d'une V_m en V_n] (1113-1145).

La méthode de l'auteur se rattache à la notion de parallélisme Levi-Civita considérée dans la note de la page 355 (*voir* ci-dessus). Soit δ une direction de V_m par un point P; si on la transporte parallèlement suivant une autre direction PP′ ou d, en faisant le transport une fois dans V_n et une autre dans V_m, on a deux directions par P′ qui sont généralement différentes, et qu'on appellera δ_a, δ_b respectivement. L'expression du carré de la distance entre les extrêmes des éléments δ_a et δ_b est une forme différentielle du quatrième degré que l'auteur appelle *seconde forme fondamentale* de V_m en V_n, et qui posée égale à zéro donne les directions asymptotiques. Les questions traitées ensuite sont les suivantes : Variété géodésique osculatrice. Surfaces pour lesquelles la seconde forme fondamentale est le carré d'une forme quadratique. Courbure moyenne. Surfaces minima. Théorème de Meusnier.

D'Arcais (*F.*). — Una formola che contiene come caso particolare quella del Frullani [Une formule renfermant comme cas particulier celle de Frullani] (1245-1252).

La formule est

$$\int_0^\infty \frac{a^n \varphi(bx) - b^n \varphi(ax)}{x^{n+1}} dx = \frac{a^n b^n}{n!} \varphi^{(n)}(0) \log \frac{a}{b},$$

qui, pour $n = 0$, donne la formule de Frullani

$$\int_0^\infty \frac{\varphi(bx) - \varphi(ax)}{x} dx = \varphi(0) \log \frac{a}{b}.$$

Applications au calcul d'intégrales définies.

S. Rindi.

JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES.

Série VIII, tome I, 1918.

Roy (Louis). — Les ondes électromagnétiques planes périodiques et le problème de leur réflexion et de leur réfraction (1-46).

Si l'on se borne à considérer des ondes planes périodiques, les équations de Maxwell relatives aux milieux conducteurs se ramènent à celles d'un milieu fictif non conducteur, dont le pouvoir inducteur spécifique serait imaginaire; de là une grande simplification. Le problème de la réflexion métallique peut être traité avec la même facilité que celui de la réflexion vitreuse.

Les équations de Helmholtz, y compris la condition aux limites supplémentaire (condition qui a fait l'objet de vives discussions entre Duhem et M. Roy), jouissent de la même propriété que celles de Maxwell; il est dès lors aisé de traiter le problème de la réflexion et de la réfraction sans imposer aux deux milieux d'autres conditions que l'homogénéité et l'isotropie.

Julia (Gaston). — Mémoire sur l'itération des fractions rationnelles (1) (47-245).

Dans ce Mémoire fondamental, M. Julia étudie les substitutions rationnelles à une variable; il introduit systématiquement les points invariants où le module du multiplicateur est supérieur à l'unité; leur propriété distinctive est d'être des points de répulsion.

Les travaux antérieurs, ceux notamment de M. Kœnigs, avaient, pour une substitution S, $z_1 = \varphi(z)$, à une variable, conduit à la notion des points d'attraction.

M. Julia montre que, si l'on entoure un point de répulsion d'un domaine arbitrairement petit, les conséquents successifs de ce domaine finissent par comprendre à leur intérieur tous les points du plan, sauf un ou deux au plus : on trouve ici une analogie avec une proposition de M. Picard.

L'ensemble parfait E', dérivé de l'ensemble E des points de répulsion, joue dans l'itération le rôle fondamental. M. Julia étudie ses propriétés, observe qu'il peut être continu linéaire ou discontinu, et que, s'il est superficiel dans une de ses parties, il comprend nécessairement tout le plan.

Les points de E' sont les points singuliers essentiels pour les fonctions limites de la suite $\varphi(z)$, $\varphi[\varphi(z)]$, ... Si l'on connaît l'allure de cette suite quand z reste dans un domaine arbitrairement petit intérieur à D, on connaît par là même son allure dans tout D.

Tout domaine immédiat contient au moins un point critique de la fonction algébrique inverse de $\varphi(z)$; *le nombre des points d'attraction est fini.*

L'auteur détermine le domaine total de convergence vers un point attractif

(1) Mémoire couronné par l'Académie des Sciences : Grand Prix des Sciences mathématiques, 1918.

et donne la condition nécessaire et suffisante pour qu'il se réduise au domaine immédiat.

La dernière partie du Mémoire étudie le cas des points invariants dont le multiplicateur a le module 1 et achève d'établir, en toute généralité, la proposition relative au nombre fini des points d'attraction.

De belles applications illustrent ces théories.

Clapier (*F.-C.*). — Les surfaces minima ou élassoïdes (247-308).

En premier lieu, rappel des propriétés géométriques les plus importantes des surfaces minima ou élassoïdes, application des formules de Ribaucour.

Puis, étude déduite des représentations sphériques, application à l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles, groupement en familles comme trajectoires orthogonales de certaines congruences.

Ce Mémoire permet une initiation rapide au beau sujet qu'il traite.

Cerf (*G.*). — Sur les transformations des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque à deux variables indépendantes (309-412).

La recherche des transformations des équations aux dérivées partielles peut se rattacher à l'intégration des systèmes différentiels les plus généraux.

Dans ce travail, il est traité de transformations des équations à deux variables indépendantes que l'on déduit de l'étude des systèmes de quatre équations à deux inconnues z et z', fonctions de deux variables indépendantes, respectivement x, y et x', y' : les méthodes employées permettent d'ailleurs d'étudier des systèmes plus généraux.

Le problème que se pose M. Cerf peut s'énoncer de manière à généraliser le problème de Bäcklund : déterminer un couple de surfaces (s) et (s'), l'une d'un espace (e), l'autre d'un espace (e'), entre lesquelles il soit possible d'établir une correspondance ponctuelle telle que les coordonnées d'éléments d'ordre m de (s), d'ordre m' de (s'), en deux points correspondants, satisfassent aux relations

$$F_i(x', y', z', p'_{1,0}, \ldots, p'_{0,m'_i}; x, y, z, p_{1,0}, \ldots, p_{0,m_i}) = 0,$$
$$m'_i \leq m', \qquad m_i \leq m \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

La méthode employée s'appuie sur des résultats nouveaux.

L'auteur donne des applications aux équations du troisième ordre; il étudie aussi des classes particulières de transformations.

Série VIII, tome II, 1919.

De Séguier (*J.-A.*). — Sur les constituants transitifs de certains groupes linéaires à invariant bilinéaire dans un champ de Galois (1-80).

Ce travail est une suite au Mémoire du même auteur sur les groupes à invariant bilinéaire ou quadratique dans un champ de Galois (*J. M. P. A.*, 1916).

Il se rapporte aux constituants transitifs des groupes hermitiens, gauches et quadratiques dans un champ galoisien quelconque, et aux groupes de formes bilinéaires symétriques dans un champ galoisien d'ordre 2^k.

Dans une Note, M. de Séguier achève de préciser la composition de certains groupes quadratiques dont il a déterminé précédemment la composition dans ses traits essentiels.

Myller-Lebedeff (Mme *Vera*). — Sur les racines primitives et les systèmes de bases et indices dans le corps quadratique général (81-98).

Un idéal premier P d'un corps algébrique quelconque possède des racines primitives au nombre de $\varphi(p^f - 1)$. Les racines primitives existent-elles si le module est un idéal quelconque? Cette question est étudiée ici pour le corps quadratique général $R(\sqrt{m})$.

Les trois corps où l'étude analogue a été faite, mais où l'on n'a pas besoin d'introduire des idéaux, à savoir le corps rationnel, le corps $R(i)$ et le corps $R(\sqrt{-3})$, sont compris comme cas particulier.

Garnier (*René*). — Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires (91-200).

Rechercher si l'on peut concevoir une intégrale irrégulière de rang quelconque d'une équation linéaire d'ordre quelconque, comme la limite d'une intégrale possédant un nombre convenable de points réguliers infiniment voisins, et appartenant, dans leurs domaines, à des exposants infiniment grands : tel est le problème traité dans ce travail, et résolu par l'affirmative.

Par la simplicité de son algorithme, par la souplesse et la fécondité des résultats dont la théorie des équations différentielles lui est redevable, la méthode des approximations successives de M. E. Picard était tout naturellement désignée comme pouvant donner la solution du problème posé.

Les résultats établis par M. Garnier permettent de regarder tout point irrégulier d'une équation linéaire comme identique à un ensemble de points réguliers infiniment voisins.

On en a un exemple simple dans l'équation

$$xy'' + \gamma y' - y = 0.$$

Il en résulte que l'étude d'un point irrégulier doit comporter deux phases bien distinctes : représentation d'intégrales particulières de l'équation dans des secteurs déterminés (problème local), calcul des coefficients des relations de structure (problème général).

L'auteur applique ses procédés à l'étude d'équations importantes, en particulier à certaines équations envisagées précédemment par M. Painlevé.

Crudeli (*Umberto*). — La notion d'énergie utile de la Thermodynamique (201-210).

Exposé simplifié de résultats obtenus par Beltrami, qui a montré comment on peut établir la notion d'énergie utile d'un système thermodynamique, dont l'état génériqne est déterminé par un ensemble fini de paramètres indépendants $v_1, v_2, \ldots, v_n, \theta$.

Véronnet (*Alex.*). — Figures ellipsoïdales d'équilibre d'un liquide en rotation. Variation du grand axe avec moment de rotation constant (211-247).

Une masse liquide homogène peut prendre en tournant la forme d'un ellipsoïde de révolution aplati ou celle d'un ellipsoïde à trois axes. On obtient toutes les figures intermédiaires entre la sphère et le disque aplati, et aussi l'aiguille allongée.

M. Véronnet étudie la variation de ces figures en faisant varier la vitesse de rotation ω, le moment de rotation $\mu = \mathrm{I}\omega$, la densité ρ, en prenant comme paramètre le grand axe de l'ellipsoïde; il obtient ainsi la variation de la grandeur des figures, en même temps que la variation de la forme, ce qui lui permet de calculer les éléments réels correspondant aux différents cas et aux différentes formes.

Il fait les calculs numériques pour une masse analogue à la Terre et il arrive à cette conclusion importante, qui montre l'inanité de certaines traditions anciennes, que le système Terre-Lune n'a pu provenir du dédoublement d'un système unique préexistant.

Bell (*E.-T.*). — Sur les représentations propres par quelques formes quadratiques de Liouville (249-271).

L'auteur, après avoir éclairci brièvement les principes généraux qui s'appliquent à toutes les formes quadratiques homogènes, démontre les formules $P(n)$ de Liouville [$P(n)$ désigne le nombre de représentations propres par la même forme] pour lesquelles n n'a plus qu'*un seul* facteur premier spécial ou *deux* facteurs premiers spéciaux.

Globa-Mikhaïlenko. — Contribution à l'étude d'une masse fluide en rotation (273-340).

Ce Mémoire, inspiré par M. Appell, a pour but l'étude des figures d'équilibre relatif d'une masse fluide homogène en rotation uniforme autour d'un axe fixe et assujettie, soit aux seules forces capillaires, soit aux seules forces newtoniennes.

Tout d'abord, les conditions admises sont celles de Plateau. La masse fluide est un cylindre liquide, soumis aux seules forces capillaires; la hauteur de ce cylindre est supposée finie, il est limité par deux disques circulaires horizontaux de même axe et de même rayon.

Vient ensuite l'étude des figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation soumise aux seules forces newtoniennes, celles des figures creuses limitées par des ellipsoïdes ou des cylindres elliptiques ; il est démontré que seule la couche cylindrique de révolution présente une figure d'équilibre. Ici, comme dans le

cas des figures ellipsoïdales, il se présente des bifurcations et des figures nouvelles amorcées à ces bifurcations.

Puis une erreur de calcul de Poincaré donne lieu à un chapitre spécial concernant le problème des petits mouvements d'une masse fluide en rotation autour de sa position d'équilibre horizontal, où l'impossibilité des oscillations simples (sorte de clapotis sur la surface de l'ellipsoïde) est démontrée.

R. DE MONTESSUS DE BALLORE.

RENDICONTI DEL R. ISTITUTO LOMBARDO DI SCIENZE E LETTERE.

2e série, T. XLVII, 1914.

Vergerio (A.) — Sulle equazioni integrali di Fredholm di prima specie [Sur les équations intégrales de Fredholm de première espèce] (172-176).

Rectification de quelques points d'une Note de M. Popoff (*Comptes rendus*, 22 décembre 1913) sur la résolution de l'équation

$$f(x) = \int_0^1 N(xy)\, F(y)\, dy,$$

sous l'hypothèse que la fonction inconnue $F(y)$ soit représentable par une série de puissances.

Bompiani (E.). — Sullo spazio d'immersione di superficie possedenti dati sistemi di curve [Sur l'espace d'immersion de surfaces possédant certains systèmes de courbes] (177-192).

Une surface admettant un double système de courbes asymptotiques appartient à un espace de trois dimensions. L'auteur recherche une propriété analogue pour les surfaces d'un hyperespace. Les asymptotiques sont ici remplacées par les courbes dont les hyperplans osculateurs S_{n-1} sont tangents à la surface au point d'osculation, et que l'auteur appelle *courbes quasi asymptotiques.* Une de ces courbes est indiquée par $\gamma_{1,n-1}$ pour faire remarquer que le plan tangent à la surface contient le domaine du premier ordre du point de contact, tandis que le S_{n-1} osculateur à la courbe en contient le domaine $(n-1)$-ième. Citons les résultats suivants :

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface appartienne à un S_4 est qu'elle possède un double système conjugué et un système ∞^2 de quasi-asymptotiques $\gamma_{1,2}$.

Condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface appartienne à un S_5 est qu'elle possède un système ∞^3 de quasi-asymptotiques $\gamma_{1,4}$.

Okken (*P.-A.*). — Sur quelques transformations planes birationnelles involutives de la cinquième classe [en français] (226-230).

Modification de quelques résultats regardant la classification de ces transformations (Berzolari, *Ann. di Matematica*, série II, t. 16, 1888, p. 191).

Viterbi (*A.*). — Alcune considerazioni su le superficie rigate [Quelques considérations sur les surfaces réglées] (195-204).

Propriétés regardant principalement la courbure géodésique des trajectoires orthogonales et la distribution des plans tangents sur une génératrice.

Chisini (*O.*). — Sul teorema di Schwarz-Klein concernente le trasformazioni birazionali di una curva in sè stessa [Sur le théorème de Schwarz-Klein regardant les transformations birationnelles d'une courbe en elle-même] (346-349).

Toute transformation birationnelle d'une courbe algébrique en elle-même est cyclique lorsque le genre de la courbe est > 1.

De ce théorème que l'auteur démontre, on déduit celui de Schwarz-Klein.

Turrière (*E.*). — Sur les surfaces panalgébriques de M. Gino Loria [en français] (358-367).

M. Loria a étudié les *courbes planes panalgébriques* qui sont des courbes transcendantes, intégrales d'une équation différentielle du premier ordre rationnelle par rapport à x, y et y' (*Sitzungsberichte der k. böm. Gesellschaft der Wissenschaften*, Prag, 1901; *Le Matematiche pure ed applicate*, t. II, 1902; *Spezielle algebr. und transz. Kurven*, 2 Aufl., Bd 2, 1911); puis il a considéré aussi les *surfaces panalgébriques*, surfaces transcendantes intégrales communes de deux équations aux dérivées partielles du premier ordre rationnelles par rapport à x, y, z, p et q (*Rend. del R. Ist. Lomb.*, t. XLIV, 1911). L'auteur étudie ici les congruences des normales à ces surfaces et les lignes d'ombre de celles qui sont de révolution.

Les congruences mentionnées appartiennent toujours à un complexe algébrique.

Sibirani (*F.*). — Sulla lunghezza delle linee e sull' area delle superficie [Sur la longueur des lignes et sur l'aire des surfaces] (383-398).

Difficultés qui naissent lorsque les dérivées deviennent infinies en quelques points et qui sont évitées par les définitions de Minkowski (*Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung*, vol. IX, 1901) qui dépendent de la notion de volume.

Brusotti (*L.*). — Nuovi metodi costruttivi di curve piane d'ordine assegnato, dotate del massimo numero di circuiti [Nouvelles méthodes de construction de courbes planes d'ordre assigné, douées du nombre maximum de circuits] (489-504), Note IIe (797-811) [il y a aussi une Note IIIe dans le Tome XLVIII (182), et puis dans le Tome XLIX les Notes IVe (495-510), V^e (577-588) et VIe (905-919)].

L'auteur appelle *base de rang r*, pour une courbe C^n, une portion de C^n contenant nr points qui forment l'intersection complète avec une D^r. Toute base de rang r est aussi une base de rang sr étant s un entier quelconque (car on peut prendre comme une D^{sr} la D^r comptée s fois). Alors soit

$$f_n = 0$$

une C^n douée de deux ou de plusieurs bases de rang n et ayant le nombre maximum $\frac{(n-1)(n-2)}{2}+1$ de circuits. Si

$$\theta', \quad \theta'', \quad \ldots, \quad \theta^{(h)}$$

sont ces bases et

$$i_1, \quad i_2, \quad \ldots, \quad i_{q-1}, \quad i_q$$

est une succession d'entiers $\leqq h$, différents de zéro et entre eux, soit

$$g_{pn} = 0$$

une courbe qui coupe la base $\theta^{(i_p)}$ en pn^2 points distincts, et formons les équations

$$\begin{aligned} F_n &= f_n \qquad + t_1 g_n = 0, \\ F_{2n} &= F_n f_n \quad + t_2 g_{2n} = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_{qn} &= F_{(q-1)n} f_n + t_q g_{qn} = 0, \end{aligned}$$

les t étant suffisamment petites. Les courbes F_n, ..., F_{qn} *déduites* de la f_n (courbe *génératrice*) sont douées du nombre maximum de circuits. Cette méthode est appelée par l'auteur *méthode de multiplication par q*. Il introduit aussi une symbolique nouvelle pour représenter une courbe par un schéma indiquant ses circuits. Dans les Notes IIe et IIIe (celle-ci dans le Tome suivant, p. 182), il donne le moyen de déduire du schéma de la courbe génératrice ceux des courbes déduites.

Ce travail se rattache, tout en obtenant des résultats nouveaux, à ceux de Harnack (*Math. Ann.*, Bd X), Hilbert (*Math. Ann.*, Bd XXXVIII), Ragsdale (*American Journ. of Math.*, vol. XXVIII), Hulburt (*American Journ.*, vol. XIV) et à d'autres travaux de l'auteur (ces mêmes *Rendiconti*, t. XLIII, 1910, p. 143, et *Annali di Mat.*, série 3^a, t. XXII, 1913, p. 117).

Veneroni (*E.*). — Sopra una varietè cubica con quindici punti doppi dello spazio a cinque dimensioni [Sur une variété cubique

à quinze points doubles de l'espace de cinq dimensions] (521-523), Note IIe (704-718).

Berzolari (*L.*). — Sulla determinazione d'una curva o d'una superficie algebrica e su alcune questioni di postulazione [Sur la détermination d'une courbe ou d'une surface algébrique et sur quelques questions de postulation] (556-564).

Sur une C'', même non irréductible, mais qui n'ait pas de parties multiples, on peut prendre $\frac{n(n+3)}{2}$ points simples par lesquels ne passe aucune autre courbe d'ordre n. Question analogue pour les surfaces et indication du passage à l'hyperespace. *Voir* aussi, sur ce sujet, une Note de M. Cherubini dans le Tome XLVIII, p. 144.

Vercelli (*F.*). — Sulle temperature lungo la progettata galleria attraverso allo Spluga [Sur les températures dans le tunnel projeté à travers le Spluga] (645-675).

Viterbi (*A.*). — Su la risoluzione approssimata del problema di Dirichlet [Sur la résolution approchée du problème de Dirichlet] (762-796).

Baroni (*M.*). — Vene fluenti nelle macchine idrauliche [Veines fluides dans les machines hydrauliques] (817-843).

Martinotti (*P.*). — Su i limiti, continuità e derivate delle funzioni di due variabili. Successioni e serie di funzioni di una variabile [Sur les limites, la continuité et les dérivées des fonctions de deux variables. Successions et séries de fonctions d'une variable] (844-878).

Pour les fonctions de deux variables, l'auteur prend en considération une nouvelle espèce de continuité, intermédiaire entre la continuité absolue et celle qui a lieu par rapport à chaque variable séparément. Pour l'inversion des dérivations, il donne une condition suffisante moins restrictive des autres connues.

Garbasso (*A.*). — Azione simultanea di un campo elettrico e di un campo magnetico sulla riga rossa dello spettro dell' idrogeno [Action simultanée d'un champ électrique et d'un champ magnétique sur la raie rouge du spectre de l'hydrogène] (812-816).

Cherubino (*S.*). — Sulle curve e sulle superficie algebriche con uno speciale tipo di trasformazioni birazionali in sè [Sur les courbes et les surfaces algébriques admettant un type spécial de transformations birationnelles en elles-mêmes] (959-982).

Les transformations birationnelles sont supposées du type

$$x' = \frac{a_i x + b_i}{c_i x + d_i},$$
$$y' = \frac{\alpha_i(x) y + \beta_i(x)}{\gamma_i(x) y + \delta_i(x)}$$
$$[i = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)],$$

que l'auteur appelle *groupes semi-projectifs*. Pour $\beta = \gamma = 0$, on a le type *réduit*.

Toute courbe d'ordre $m = qn + s$ $(s < n)$, dépourvue de parties multiples, admettant un de ces groupes, d'ordre n, peut se déterminer par

$$N = q\left(m - \frac{q-1}{2} n + 1\right) + s$$

points simples, distribués sur q ou sur $q+1$ droites parallèles, suivant que $s = 0$ ou bien $s > 0$.

Questions analogues pour les surfaces.

Pannelli (*M.*). — Sopra alcune relazioni fra gli elementi fondamentalo di due spazi in corrispondenza birazionale [Sur quelques relations entre les éléments fondamentaux de deux espaces en correspondance birationnelle] (1041-1052).

T. XLVIII, 1915.

Terracini (*A.*). — Su alcune superficie rigate razionali [Sur certaines surfaces réglées rationnelles] (62-76).

Le théorème de Clifford, que les S_{r-1} osculateurs à une C^r rationnelle normale, sont en correspondance involutive avec les points d'osculation, est étendu par l'auteur aux surfaces réglées rationnelles normales. Cela conduit à une extension de la polarité sur les surfaces réglées rationnelles. Le même théorème est appliqué à des surfaces réglées rationnelles ayant des points d'hyperosculation. Enfin, il démontre le théorème suivant :

« La condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface réglée rationnelle générale du quatrième ordre de S^3 ait quatre points d'hyperosculation en ligne droite, est que le complexe linéaire auquel appartiennent les génératrices et celui qui est déterminé par la cubique nodale soient en involution. »

Usai (*G.*). — Sulle condizioni di indipendenza di un integrale semplice dal parametro [Sur les conditions sous lesquelles une intégrale simple est indépendante du paramètre] (77-90).

Vivanti (*G.*). — Sui nuclei simmetrizzabili [Sur les noyaux symétrisables] (121-127).

Brusotti (*L.*). — Nuovi metodi costruttivi di curve piane d'ordine assegnato, dotate del massimo numero di circuit [Nouvelles méthodes de construction de courbes planes d'ordre assigné, douées du nombre maximum de circuits]. Note III[e] (182-196). [*Voir* le Tome précédent où se trouvent les Notes I (489-504) et II (797-811).]

Cherubino (*S.*). — Sopra un metodo di postulazione [Sur une méthode de postulation] (144-159).

Même sujet que celui de la Note de M. Berzolari (t. XLVII, p. 556), mais en supposant que les points qui doivent déterminer la C^m soient pris sur des courbes $C_1^{m_1}, \ldots, C_r^{m_r}$ étant

$$m_1 + \ldots + m_r = m,$$

et questions analogues pour les courbes et pour les surfaces.

Pascal (*A.*). — L'apparecchio polisettore di Tommaso Ceva e una lettera inedita di Guido Grandi [L'appareil plurisecteur de Thomas Ceva et une lettre inédite de Guido Grandi] (173-181).

Thomas Ceva, frère de Jean, celui du théorème connu, construisit un instrument à parallélogrammes articulés pour la division d'un angle. Cet instrument est décrit dans un opuscule (*Instrumentum pro sectione etc. Thomae Cevae e S. J.*; Mediolani, 1695) qui se trouve à la Bibliothèque Braidense, de Milan. La lettre de G. Grandi est relative à la question de la priorité du Ceva vis-à-vis de De L'Hospital, qui avait inséré la description de l'instrument dans son *Traité des sections coniques*, publié en 1707 après la mort de l'auteur.

Rotta (*P.*). — Il concetto di Scienza e le nuove intuizioni scientifiche di Nicolò Cusano [La conception de la Science et les nouvelles intuitions scientifiques de Nicolas de Cuse] (249-277).

Bottasso (*M.*). — Sugli assi d'equilibrio e sulla stabilità ed instabilità dell'equilibrio nei sistemi astatici [Sur les axes d'équilibre

et sur la stabilité et l'instabilité de l'équilibre dans les systèmes astatiques] (278-294).

Les droites invariablement liées au corps, et qui peuvent devenir des axes d'équilibre, sont appelées par l'auteur des *axes virtuels d'équilibre*. Étant donné un point A du corps et étant F le vecteur du système, on peut chercher les axes virtuels passant par A lorsqu'on suppose appliqué en A un vecteur — F.

Conditions pour l'existence des axes virtuels pour un système où $F = 0$; de même pour un système où un point A est fixé, comme on l'a indiqué ci-dessus; lieu des points A où il y a de ces axes et lieu de ces axes; distinction des espèces d'équilibre.

Cherubino (S.). — Sulle curve e sulle superficie algebriche ammettenti un gruppo finito e ridotto di semiprojettività di prima e seconda specie in sè [Sur les courbes et les surfaces algébriques admettant un groupe fini et réduit de semi-projectivités de première et de seconde espèce en elles-mêmes] (347-361).

Note se rattachant à celle du Tome XLVII, page 959. L'équation

$$f(z_i) = 0$$

d'une courbe ou surface C étant à coefficients complexes, on envisage la $\overline{C}$ représentée par

$$\overline{f}(z_i) = 0,$$

où tous les coefficients sont remplacés par leurs conjugués. Entre C et $\overline{C}$, il y a la correspondance

$$I = \{ z'_i = \overline{z}_i \},$$

et si

$$C = P\overline{C},$$

P étant une opération birationnelle algébrique, la C est transformée en elle-même par l'opération (non algébrique)

$$Q = PI.$$

C'est cela que l'auteur appelle une *transformation birationnelle de seconde espèce*, et qui avait été appelée *antibirationnelle* par M. Comessatti (*Math. Ann.*, Bd 73, 1912), par une dénomination qui rappelle l'*antiprojectivité* de Segre (*Atti de Turin*, 1889-1890 et 1890-1891, et *Math. Ann.*, Bd 40, 1892).

L'auteur détermine le type d'équations qui donnent les courbes ou surfaces admettant les transformations mentionnées et donne le moyen de connaître si deux d'entre elles peuvent se déduire l'une de l'autre par ces transformations.

Chisini (O.). — Sulla risolubilità per radicali delle equazioni contenenti linearmente un parametro [Sur la résolubilité par

radicaux des équations contenant linéairement un paramètre] (382-402).

Équations de degré premier p en x et de la forme

$$f_1(x) - t f_2(x) = 0.$$

A toute valeur de t correspond un groupe G de p racines. Ceux de ces groupes qui contiennent des racines multiples sont généralement en nombre de $2p-2$; mais dans le cas de la résolubilité par radicaux, ils présentent un des cas suivants :

1° Deux groupes dont chacun est formé par une racine p-uple;

2° Un d'une racine p-uple et deux de $\frac{p-1}{2}$ racines doubles et une simple;

3° Quatre de $\frac{p-1}{2}$ racines doubles et une simple;

4° Trois de $\frac{p-1}{3}$ racines triples et une simple;

5° Un de $\frac{p-1}{2}$ racines doubles et une simple, et un troisième de $\frac{p-1}{6}$ racines sextuples et une simple;

6° Un de $\frac{p-1}{2}$ racines doubles et une simple, et deux autres de $\frac{p-1}{4}$ racines quadruples et une simple.

Réciproquement, à chacun de ces cas correspond une équation résoluble par radicaux, et cela quel que soit p dans les cas 1°, 2°, 3°, et pour $p-1$ multiple de 3, 6, 4 respectivement dans les cas 4°, 5° et 6°.

Loria (*G.*). — Per la biografia di Giovanni Ceva [Pour la biographie de Jean Ceva] (450-452).

Usai (*G.*). — Sul calcolo delle variazioni per il caso di un integrale doppio [Sur le calcul des variations pour le cas d'une intégrale double] (628-652).

Condition pour que l'intégrale

$$I = \iint \Phi\left(x_i, \frac{\partial x_i}{\partial v_h}, \frac{\partial^2 x_i}{\partial v_h\, \partial v_k}, \frac{\partial^3 x_i}{\partial v_h\, \partial v_k\, \partial v_l}\right) dv_1\, dv_2$$
$$(i = 1, 2, 3;\ h, k, l = 1, 2)$$

soit indépendante des paramètres v_1, v_2.

Andreoli (*G.*). — Nuova dimostrazione del teorema di Poincaré sulle caratteristiche topologiche di una superficie [Nouvelle

démonstration du théorème de Poincaré sur les caractéristiques topologiques d'une surface] (868-877, quatre planches).

Le théorème est celui qui prouve qu'une surface est toujours et seulement déterminée au point de vue de l'*Analysis situs* lorsqu'on en connaît le *genre*, les *bords* et la *latéralité*.

Vergerio (*A.*). — Sull' equazioni integrali di seconda specie a limiti costanti [Sur les équations intégrales de seconde espèce à limites constantes] (878-890).

Sibirani (*F.*). — Sopra alcuni sistemi di equazioni vettoriali [Sur certains systèmes d'équations vectorielles] (919-946).

Condition vectorielle de possibilité et solutions.

Cherubino (*S.*). — Identità ed auto-identità semi-projettiva ridotta di due forme algebriche ad $n+1$ variabili [Identité et auto-identité semi-projective réduite de deux formes algébriques à $n+1$ variables] [Note I (993-1015), Note II (1026-1049)].

T. XLIX, 1916.

Darbi (*G.*). — Sopra una classe di equazioni alle derivate parziali [Sur une classe d'équations aux dérivées partielles] (324-335).

On obtient cette classe d'équations en éliminant $h_0, h_1, \ldots, h_n$ entre les équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= h_0 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ \frac{\partial h_0}{\partial y} &= h_1 \frac{\partial z}{\partial y}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial h_{n-1}}{\partial y} &= h_n \frac{\partial z}{\partial y} \\ (h_n &= ty + g), \end{aligned}$$

les h_i étant des fonctions de x, y et les t, g de x seulement.

Cisotti (*U.*). — Sulle capacità elettrostatica dei conduttori sferoidali [Sur la capacité électrostatique des conducteurs sphéroïdaux] (393-398).

La capacité est égale au rayon moyen.

Berzolari (*L.*). — Sulla polarità rispetto ad un quadrilatero piano completo [Sur la polarité par rapport à un quadrilatère plan complet] (463-473).

Travail se rattachant à l'autre de l'auteur : *Sulla lemniscata projettiva* (ces *Rendiconti*, t. XXXVII, 1904, p. 277 et 304), ainsi qu'à un travail de Milinowski (*Zeitschrift für Math. und Phys.*, Bd 20, 1875, p. 17) ayant pour but d'établir d'une manière purement géométrique la théorie des pôles et des polaires. (Sur ce sujet, *voir* aussi la Note de Lazzeri dans ces *Rendiconti*, t. XXIV, 1891, p. 1021.)

Brusotti (*L.*). — Nuovi metodi costruttivi di curve piane d'ordine assegnato dotate del massimo numero di circuiti [Nouvelles méthodes de construction de courbes planes d'ordre assigné, douées du nombre maximum de circuits] [Note IV (495-510), Note V (577-588), Note VI (905-919, deux planches)].

Voir les Notes précédentes dans le Tome XLVII aux pages 489 et 797, et dans le Tome XLVIII à la page 182. Ici l'auteur appelle *front* d'une courbe d'ordre n un segment de la courbe ayant en commun avec une droite n points distincts également ordonnés sur le segment et sur la droite, et il donne deux méthodes récurrentes pour construire des courbes *génératrices à deux fronts*. Dans la Note V, il traite le cas des génératrices *à trois fronts*. Dans la Note VI, il traite d'autres génératrices particulières.

Vergerio (*A.*). — Sulle rappresentazione delle funzioni continue mediante serie di funzioni ortogonali [Sur la représentation des fonctions continues par des séries de fonctions orthogonales] (511-524).

Soit

$$\varphi_1(s),\quad \varphi_2(s),\quad \dots$$

un système Φ de fonctions définies en $\overline{ab}$, intégrables au sens de Lebesgue et orthogonales, c'est-à-dire telles qu'il soit

$$(1)\qquad \int_a^b \varphi_\mu(s)\,\varphi_\nu(s)\,ds = \begin{cases} 0 & \text{pour } \mu \gtrless \nu, \\ 1 & \text{pour } \mu = \nu, \end{cases}$$

le système Φ est *fermé* s'il n'y a pas d'autres fonctions $\theta(s)$ satisfaisant à la condition

$$(2)\qquad \int_a^b \varphi_\nu(s)\,\theta(s)\,ds = 0.$$

Lorsque Φ n'est pas fermé, il y a un autre système Ψ [*complémentaire* suivant Lauricella (*Rend. des Lincei*, 1912, 1er semestre, p. 575)] formant avec Φ un système fermé $\Phi + \Psi$. Lorsqu'il n'y a pas de solutions *continues* des équa-

tions (2), le système Φ est appelé par l'auteur un système *semi-fermé*, et si le système n'est pas même semi-fermé il y a toujours un système Φ' (*supplémentaire*) tel que $\Phi + \Phi'$ est semi-fermé. Ces systèmes peuvent servir à la représentation des fonctions continues.

Cisotti (*U.*). — Sul moto di uno sferoide in un liquido indefinito [Sur le mouvement d'un sphéroïde dans un liquide indéfini] (602-612).

Détermination du potentiel de vitesse sans employer les développements en série de fonctions sphériques et en faisant entrer dans la recherche la déviation du sphéroïde de la forme sphérique. Application des méthodes vectorielles.

Sibirani (*F.*). — Intorno ad alcune soluzioni del problema ristretto dei tre corpi [Sur certaines solutions du problème restreint des trois corps] (661-667). Addition à cette Note (920-922).

Cas où les trois masses ne restent pas dans un même plan et où l'on peut négliger l'action de l'une d'elles P sur les deux autres, qui tournent uniformément autour de leur barycentre et attirent P suivant la loi newtonienne. Propriétés relatives aux mouvements de P dans le voisinage des centres de libration.

Usai (*G.*). — Sul calcolo delle variazioni e sulle equazioni di Eulero [Sur le calcul des variations et sur les équations d'Euler] (678-690). Observations et additions (994-1000).

Application des équations d'Euler pour les variations des intégrales simples aux deux cas considérés par l'auteur dans ces *Rendiconti* (*voir* les Notes de l'auteur dans le Tome XLVIII, p. 77 et 628).

Burali-Forti (*C.*). — Sopra alcuni baricentri di linee, aree, volumi [Sur certains barycentres de lignes, d'aires et de volumes] (932-954).

Les diverses questions traitées ici par le calcul vectoriel sont du genre de la suivante :

Soient O un point fixe, Σ une surface, σ une partie finie de Σ et dont H fait le barycentre, v le volume du cône ayant O pour sommet et σ pour base et G le barycentre de ce cône, on veut déterminer les surfaces Σ pour lesquelles on a

$$G = O + \frac{3}{4}(H - O),$$

quelle que soit la partie σ de Σ.

Ce sont toutes et seulement les surfaces dont les plans tangents ont une distance constante du point O.

T. L, 1917.

Veneroni (*E.*). — Sulle corrispondenze piane simmetriche (2, 2) della classe zero [Sur les correspondances planes symétriques (2, 2) de la classe zéro] (447-464), Note II (550-567), Note III (651-667).

Cisotti (*U.*). — Sulle azioni dinamiche di masse fluide continue [Sur les actions dynamiques de masses fluides continues] (502-515).

Celoria (*G.*). — Giovanni Schiaparelli e l'opera sua [Giovanni Schiaparelli et son œuvre] [Inauguration de l'inscription avec médaillon, dédiée à lui dans la cour d'honneur du palais de Bréra] (536-549).

T. LI, 1918.

Vivanti (*G.*). — La Matematica e il mondo reale. Discorso inaugurale, ecc. [La Mathématique et le monde réel. Discours d'inauguration, etc.] (49-63).

Cisotti (*U.*). — Sulle onde superficiali progressive di tipo permanente [Sur les ondes superficielles progressives à type permanent] (85-94).

Sibirani (*F.*). — Sulle radiali delle curve gobbe [Sur les radiales des courbes gauches] (119-133).

Les *radiales* ont été considérées pour les courbes planes par Tucker (*Proc. of the London Math. Soc.*, t. I, 1865), et pour les courbes gauches par Burali-Forti (*Rend. del Circ. mat. di Palermo*, t. XVI, 1902) et Rossi (*Giorn. di Battaglieri*, t. XLVII, 1909). On définit par

$$\operatorname{mod} \frac{du}{ds}$$

la valeur absolue de la courbure relative au vecteur unitaire u invariablement lié au trièdre fondamental (t, n, b) et par

$$R_u = \frac{\frac{du}{ds}}{\left(\frac{du}{ds}\right)^2}$$

le rayon de courbure relatif à u en un point de la courbe. La radiale par rapport au point O et au vecteur u est le lieu des points Q donnés par

$$Q = O + R_u.$$

Del Re (*A.*) — Hamiltoniani e gradienti particolari nell' analisi ad n dimensioni di Grassmann [Hamiltoniens et gradients particuliers dans l'analyse à n dimensions de Grassmann] (154-160).

Généralisations de la divergence, de la rotation et de la fonction de Lagrange.

Serini (*R.*). — Deformazioni longitudinali e trasversali di un corpo elastico omogeneo ed isotropo [Déformations longitudinales et transversales d'un corps élastique homogène et isotrope]. Note I (177-184), Note II (341-349).

Cas du plan et cas de la sphère. Une Note III contenant le cas général se trouve dans le Tome LII, p. 409.

Berzolari (*L.*). — Le configurazioni (10_6, 15_4) di punti e piani [Les configurations (10_6, 15_4) de points et plans] (243-258).

Outre les dix points singuliers et les quinze plans singuliers d'une congruence du troisième ordre et de la deuxième classe, il y a une autre (seule) de ces configurations qui est en rapport avec le système de deux cubiques gauches en position *octaédrique* (KOHN, *Sitzungsberichte der Ak. der Wiss. in Wien*, 1899), c'est-à-dire invariantes simultanées par rapport à un groupe octaédrique de collinéations.

Sibirani (*F.*). — Sulla estrazione delle radice funzionale n^{esima} di una data funzione [Sur l'extraction de la racine $n^{ième}$ fonctionnelle d'une fonction donnée] (271-295).

Fonction φ dont l'itérée $n^{ième}$ est la fonction donnée.

Caldonazzo (*B.*). — Sulla fusione di vene liquide [Sur la fusion de veines liquides] (317-328).

Caldonazzo (*B.*). — Sulla contrazione di vene liquide che si fondono [Sur la contraction des veines liquides qui se fondent entre elles] (350-359).

Cisotti (*U.*). — Una formola generale relativa ai moti permanenti di liquidi pesanti e sue applicazioni [Une formule générale rela-

tive aux mouvements permanents de liquides pesants et ses applications] (360-366).

Brusotti (*L.*). — Discriminanti e fasci nella topologia proiettiva del piano [Discriminants et faisceaux dans la topologie projective du plan] (367-373).

Un point double réel à tangentes distinctes peut être :

1° Point de *croisement*, s'il est commun à deux circuits distincts;
2° Point d'*entrelacement*, s'il est double pour un circuit;
3° Point *isolé*, s'il est à tangentes imaginaires.

Un faisceau réel, algébriquement générique, sans points de base ou à deux seuls points de base réels, a une et une seule courbe à point de croisement.

Une courbe possède un nombre pair ou impair de circuits, suivant que le discriminant est positif ou négatif.

Veneroni (*E.*). — Sulle corrispondenze piane simmetriche [2, 2] della classe uno [Sur les correspondances planes symétriques [2, 2] de la classe un] (374-387).

Berzolari (*L.*). — Sul significato geometrico di alcune identità lineari tra quadrati di forme algebriche [Sur la signification géométrique de certaines identités linéaires entre des carrés de formes algébriques] (431-454).

Gerbaldi (*F.*). — Sulle ridotte d'una frazione continua di Halphen [Sur les réduites d'une fraction continue d'Halphen] (523-546).

Brusotti (*L.*). — Esistono fasci di curve piane d'ordine *n* a punti base e centri critici tutti reali [Il y a des faisceaux de courbes planes d'ordre *n* à points de base et centres critiques réels] (612-618).

Porro (*F.*). — Sulla stabilità dei sistemi secondari perturbati dal Sole [Sur la stabilité des systèmes secondaires perturbés par le Soleil] (619-624).

Laura (*E.*). — Sopra i potenziali generalizzati di Helmholtz [Sur les potentiels généralisés de Helmholtz] (644-653). Note II (712-723).

Veneroni (*E.*). — Principali tipi di corrispondenze piane simmetriche [2, 2] della classe uno [Sur les types principaux de correspondances planes symétriques [2, 2] de la classe un]. Notes I et II (753-777).

Cisotti (*U.*). — Sopra alcune relazioni integrali relative a funzioni di variabile complessa e a funzioni armoniche [Sur quelques relations intégrales relatives aux fonctions d'une variable complexe et aux fonctions harmoniques] (796-805).

Condition nécessaire et suffisante pour que u soit une fonction réelle harmonique et régulière dans les points P intérieurs au champ connexe A, est qu'il soit

$$\int_s \left(u \frac{d \log z}{dn} - \frac{du}{dn} \log z \right) ds = 0,$$

s étant le contour d'une portion finie quelconque du champ.

Burali-Forti (*C.*). — Traiettorie ortogonali di un sistema ∞' di superficie sferiche [Trajectoires orthogonales d'un système ∞' de surfaces sphériques] (899-908).

T. LII, 1919.

Da Rios (*S.*). — Sulla dinamica dei fluidi comprimibili [Sur la dynamique des fluides compressibles] (98-103).

Expression de la résultante des forces extérieures en tenant compte des variations de densité du fluide. Le résultat peut intéresser l'aéronautique.

Usai (*G.*). — Sulle variazioni di un integrale doppio con le derivate quarte [Sur les variations d'une intégrale double avec les dérivées quatrièmes] (115-134).

Intégration des conditions sous lesquelles l'intégrale est indépendante de deux paramètres.

Sibirani (*F.*). — Sulla rappresentazione approssimata di una funzione e sue derivate secondo Tchebycev [Sur la représentation approchée d'une fonction et de ses dérivées suivant Tchébycheff] (135-143).

Caldonazzo (*B.*). — Vene confluenti con una regione spartiacque [Veines confluentes avec une région divisant les eaux] (149-156).

Laura (*E.*). — Sopra il metodo del Sig. Eötvös per la determinazione della rotazione della Terra [Sur la méthode de M. Eötvös pour la détermination de la rotation de la Terre] (259-267).

Lazzarino (*O.*). — Sulla rotazione di un corpo nel caso di moti interni monociclici [Sur la rotation d'un corps dans le cas de mouvements intérieurs monocycliques] (371-378).

Serini (*R.*). — Deformazioni longitudinali e trasversali di un corpo elastico ed isotropo [Déformations longitudinales et transversales d'un corps élastique et isotrope]. Note III (409-416).

Ayant traité le cas du plan et de la sphère dans les Notes I et II (t. LI, p. 177 et 341), l'auteur traite ici le cas général.

Pensa (*A.*). — Geometria assoluta dei vettori e delle omografie vettoriali in un S_n euclideo [Géométrie absolue des vecteurs et des homographies vectorielles dans un S_n euclidien] (439-453).

Bompiani (*E.*). — Determinazione delle superficie integrali d'un sistema di equazioni a derivate parziali lineari ed omogenee [Détermination des surfaces intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles linéaires et homogènes] (610-625). Note II (820-830).

Les surfaces intégrales d'un système d'ordre ν, contenant

$$\frac{\nu(\nu-1)}{2}+h$$

équations, possèdent un système de courbes dans les espaces $S_{\nu-h}$ $(\nu-h)$-osculateurs à une courbe ou bien sont situées dans l'espace $S_{2\nu-h}$. Les surfaces intégrales d'un système d'ordre ν, contenant $\frac{\nu(\nu-1)}{2}$ équations, appartiennent à l'une des trois classes suivantes :

1° Surfaces de $S_{2\nu}$;

2° Surfaces avec un système de courbes dans les S_ν, ν-osculateurs à une courbe;

3° Surfaces avec un double système conjugué ou un simple système d'asymptotiques.

Examen des autres cas de systèmes d'ordre ν formés par un nombre moindre d'équations.

Ces recherches ont pour but la tractation du problème suivant que l'auteur annonce comme étant en cours de publication dans les *Rendiconti des Lincei*. Trouver les plus petites dimensions des espaces où existent des surfaces applicables d'espèce ν et quels caractères invariants doivent avoir ces surfaces par rapport aux dimensions des espaces ambiants. Dans la Note II est étudié en particulier le cas d'une ou plusieurs équations du troisième ordre pour déterminer les systèmes de courbes que possède la surface intégrale correspondante.

Sibirani (*F.*). — Sulle superficie che si deducono da una data attribuendo ad un sistema ∞^1 di curve di questa, traslazioni che siano funzioni continue di un parametro [Sur les surfaces que l'on déduit d'une surface donnée en attribuant à un système ∞^1 de courbes de celle-ci des translations qui soient des fonctions continues d'un paramètre] (712-722).

T. LIII, 1920.

Ciani (*E.*). — Intorno ad alcuni covarianti di curve algebriche piane [Sur quelques invariants de courbes algébriques planes] (88-96).

Sur chacune des droites conduites par un point P on prend un covariant (naturellement *binaire* et toujours le même) du groupe des n intersections. On a ainsi une courbe covariante. Application aux courbes du troisième ordre.

Brusotti (*L.*). — Sopra un notevole fascio reale di cubiche piane [Sur un faisceau remarquable réel de cubiques planes] (188-192).

Faisceau ayant un seul point de base réel et douze centres critiques réels. Rappelons que les *centres critiques* sont les points dont chacun est double pour *une* (seule) courbe du faisceau.

Lombardi (*U.*). — Affondamento ed aderenza delle ruote delle trattrici agrarie e dei motocoltori [Enfoncement et adhérence des roues des tractrices agricoles et des motoculteurs] (415-434).

Bruni (*S.*). — Equazioni caratteristiche dei piccoli moti trasversali nei canali rettilinei [Équations caractéristiques des petits mouvements transversaux dans les canaux rectilignes] (550-560).

Chisini (*O.*). — Sulla forma delle quartiche gobbe di prima specie e delle curve ellittiche normali [Sur la forme des quartiques gauches de première espèce et des courbes elliptiques normales (591-599).

Sur une courbe fermée (branche d'une courbe algébrique) soit une correspondance réelle [n, 1] faisant partie d'une correspondance algébrique [m, 1]. Si la correspondance [n, 1] est *discordante*, c'est-à-dire si un point P se meut en sens contraire à chacun des n points correspondants P'_i, il y a $n+1$ points unis. Ce théorème démontré par l'auteur est ensuite appliqué à la correspondance qui a lieu sur une cubique plane entre un point de la courbe et le *tangentiel* relatif, pour déterminer la forme de la cubique. Au moyen des résultats obtenus pour la cubique plane on étudie, au même point de vue, la quartique gauche et les courbes elliptiques normales.

Gabba (*L.*). — Giovanni Celoria [Notice commémorative] (652-654).

Cisotti (*U.*). — Sui piccoli moti vorticosi in un canale a fondo rettilineo [Sur les petits mouvements tourbillonnaires dans un canal à fond rectiligne] (670-679).

Sibirani (*F.*). — Sugli inviluppi di linee e di superficie [Sur les enveloppes de lignes et de surfaces] (751-755).

T. LIV. 1921.

Scherillo (*M.*). — Commemorazione di Giuseppe Colombo [Commémoration de G. Colombo] (79-89).

Berzolari (*L.*). — *Idem* (90-96).

Paladini (*E.*). — *Idem* (97-106).

Jorini (*A.-F.*). — *Idem* (107-110).

Fantoli (*G.*). — *Idem* (111-115).

Veneroni (*E.*). — Sulle congruenze [2, 1] di coniche nello spazio [Sur les congruences [2, 1] de coniques dans l'espace] (166-174).

Bedarida (*A.-M.*). — Il genere nelle forme aritmetiche di Dirichlet secondo un teorema di Eisenstein [Le genre dans les formes arithmétiques de Dirichlet suivant un théorème d'Eisenstein] (204-215).

Les formes dont les coefficients et les variables sont des entiers dans le corps

$$k(\sqrt{-1}) \quad \text{(formes de Dirichlet)}$$

peuvent se distinguer en *genres* en disant de même genre deux formes qui peuvent se transformer l'une en l'autre par une substitution d'Eisenstein

$$\begin{vmatrix} \frac{\alpha}{n}, & \frac{\beta}{n} \\ \frac{\gamma}{n}, & \frac{\delta}{n} \end{vmatrix},$$

où n est premier avec $(1+i)$D, D étant le déterminant de la forme. Le nombre des genres est fini. Deux formes de même classe sont aussi de même genre. Caractères des formes de Dirichlet.

Veneroni (*E.*). — Tipi particolari di sistemi [2, 1] di coniche nello spazio [Types particuliers de systèmes [2, 1] de coniques dans l'espace] (383-394).

Sibirani (*F.*). — Sulle congruenze rettilinee di egual pendenza [Sur les congruences rectilignes de pente égale] (404-413).

Congruences dont chaque développable de l'un des deux systèmes est une surface de pente égale par rapport à une même direction, l'angle pouvant varier d'une développable à l'autre.

Corte (*G.*). — Il principio di dualità per le funzioni plurisimmetriche relative a due gruppi di variabili incidenti [Le principe de dualité pour les fonctions plurisymétriques relatives à deux groupes de variables incidentes] (459-462).

Palatini (*A.*). — Sulle equazioni della statica einsteiniana in seconda approssimazione [Sur les équations de la statique einsteinienne en seconde approximation] (463-476).

Usai (*G.*). — Processi riduttivi su equazioni integrali [Procédés de réduction sur les équations intégrales] (477-489).

Étant $\varphi(x)$ la solution de

$$(1) \qquad f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_0^x (x-y)\,\varphi(y)\,dy$$

et $f(0) = 0$, l'équation

$$f'(x) = \varphi_1(x) - \lambda \int_0^x (x-y)\,\varphi_1(y)\,dy$$

a pour solution

$$\varphi_1(x) = \varphi'(x).$$

Ce théorème a été démontré par l'auteur dans les *Rendiconti del Circolo Mat. di Palermo*, 1920. Ici il donne la résolution de (1), la détermination complète des noyaux $K(x, y)$ pour lesquels le théorème a lieu [et qui doivent avoir la forme $\psi(x-y)$], et des méthodes de réduction applicables aux équations de ce type. Dans les solutions entrent des déterminants qui rentrent comme cas particuliers dans les *déterminants récurrents* de M. Pascal.

Comessatti (A.). — Nuovi contributi geometrici alla teoria delle forme binarie [Nouvelles contributions géométriques à la théorie des formes binaires] (541-551).

Chisini (O.). — Il teorema d'Abel e il principio di corrispondenza nel loro aspetto topologico [Le théorème d'Abel et le principe de correspondance dans leur aspect topologique] (552-569).

Pour qu'un groupe variable G_n de points sur une courbe algébrique de genre p varie dans une série linéaire, il faut que la somme des valeurs que chacune des p intégrales abéliennes de première espèce a en ces n points soit constante (théorème d'Abel). Lorsque G_n revient au groupe initial, tout point du groupe ayant décrit un cycle riemannien, la somme des cycles par les n points est homologue à zéro. Ce qui peut s'exprimer en disant que toute série s_n de groupes G_n appartenant à une série linéaire est à *circulation nulle.* Ici l'auteur démontre que toute série à circulation nulle est renfermée dans une série linéaire.

Palatini (A.). — L'analogo einsteiniano dei potenziali cilindrici in seconda approssimazione [L'analogue einsteinien des potentiels cylindriques en seconde approximation] (570-576).

Berzolari (L.). — Max Noether [Note commémorative] (600-603).

S. Rindi.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XLVI.

TABLES ALPHABÉTIQUES

DU

TOME XLVI, 2e SÉRIE (LVIIe DE LA COLLECTION) : 1922

DEUXIÈME PARTIE.

1° TABLE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES ANALYSÉES

(Le nom du rédacteur de l'analyse est indiqué en italique.)

2° TABLE DES AUTEURS DONT LES NOTES OU MÉMOIRES SONT ANALYSÉES.

3° TABLE DES AUTEURS D'ANALYSES.

FIN DES TABLES DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XLVI.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
66750 Quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(PREMIÈRE PARTIE.)

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. Émile PICARD, *Président.*

P. APPELL.

E. BOREL.

J. HADAMARD.

E. GOURSAT.

M. BRILLOUIN.

D. TOMBECK, *Secrétaire.*

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Émile Picard*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, quai Conti, n° 25, Paris, VIe.

49.00-23 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,

PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. É. PICARD ET P. APPELL,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BRILLOUIN, E. CARTAN, J. DRACH, E. GOURSAT, C. GUICHARD, J. HADAMARD, G. KŒNIGS, S. LEFSCHETZ, G. LORIA, S. RINDI, H. VILLAT, V. VOLTERRA, ETC., PIERRE GAUJA, *secrétaire de la rédaction.*

Sous la direction de la Commission des Hautes Études

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR M. G. DARBOUX,

CONTINUÉE DE 1871 A 1875 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY,
DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,
ET DE 1910 A 1917 PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XLVII. — ANNÉE 1923.

(LVIII[e] VOLUME DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET C[ie], ÉDITEURS,

LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1923

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ANDOYER (H.), membre de l'Académie des Sciences et du Bureau des Longitudes, professeur à la Sorbonne. — L'ŒUVRE SCIENTIFIQUE DE LAPLACE.

C'est un noble et vaste but que celui de faire mieux connaître un illustre savant et de faire revivre aux yeux du lecteur une période de l'histoire de la Science aussi brillante que celle des cinquante années (1773-1827) pendant lesquelles la carrière scientifique de Laplace se développa. C'est une œuvre utile, car l'histoire de la Science est trop délaissée en France. C'est aussi une tâche difficile que seul pouvait entreprendre un astronome éminent. M. Andoyer a su la réaliser en un petit volume de 162 pages, qui ne laisse de côté aucune partie du sujet, ni l'exposé des travaux mathématiques de Laplace, des belles méthodes qu'il a conçues dans la doctrine des probabilités, des admirables recherches de mécanique céleste qui ont rendu son nom immortel, ni sa contribution aux progrès de la physique, ni son œuvre de philosophie et de vulgarisation, pour ainsi définir l'objet de l'*Essai sur les probabilités*, ouvrage qui correspond à un siècle de distance au livre de M. Borel intitulé le *Hasard* et l'objet de *l'Exposition du système du monde* qui contient la célèbre hypothèse sur la formation du

système solaire, ni enfin l'histoire de sa vie et la physionomie de son époque que M. Andoyer a rendues vivantes par de nombreux extraits de Laplace, de ses contemporains les plus illustres notamment d'Alembert, Lagrange et Legendre, et aussi de ceux qui les suivirent, Arago et Joseph Bertrand par exemple.

Le Livre de M. Andoyer se compose de cinq Chapitres que nous allons examiner.

I. *Résumé biographique. Premier aperçu de l'œuvre de Laplace.* — En quelques pages se trouvent résumées la vie et aussi l'œuvre de Laplace. Né en 1749, dans une modeste famille de cultivateurs, Laplace fut distingué par d'Alembert et Condorcet, devint l'une des gloires scientifiques de la France, et, ne bornant pas là son ambition, comme son aîné, son émule Lagrange, il rechercha et obtint, après s'être retiré à Melun pendant la période révolutionnaire, les charges et dignités suivantes : Ministre de l'Intérieur au 18 brumaire, sénateur, comte de l'Empire, pair et marquis sous la Restauration et il mourut en 1827, ayant soutenu jusqu'au bout la politique de Charles X. Ces circonstances de la vie de Laplace ont été parfois jugées avec une sévérité singulièrement grossie en raison de la valeur de l'homme. Elles sont ici relatées rapidement et sobrement, ainsi qu'il convient.

II. *Les caractéristiques de l'œuvre de Laplace.* — C'est dans ce Chapitre qu'on trouvera une véritable histoire des idées au temps de Laplace. Il y a là une étude des plus attrayantes sur les méthodes dans les sciences et sur les limites de la science. Les considérations sur les probabilités par lesquelles se termine le Chapitre mettent bien en évidence qu'à cette époque, celle des beaux jours du calcul des probabilités, on alla trop loin, sous l'influence du généreux Condorcet, dans les applications de ce calcul aux sciences morales et sociales et que le prudent Laplace ne put se défendre de suivre l'exemple de Condorcet bien qu'il eût écrit que le philosophe vraiment utile est celui qui réunit à une imagination profonde une grande sévérité dans le raisonnement.

M. Andoyer parle ici de la critique, impitoyable dans son ironie, que Joseph Bertrand a tracée des travaux de Condorcet, de Laplace, de Poisson, relatifs à des applications hasardées du calcul

des probabilités, notamment aux décisions de la justice. Mais je serais bien étonné s'il adoptait cette critique tout entière. Ajoutons que l'auteur de l'*Essai philosophique sur les probabilités* ne mérite pas, au moins sous cette forme brève et sévère, le jugement de Joseph Bertrand qui a écrit et récrit que la difficulté du *Traité analytique des probabilités* de Laplace était une des causes de l'état d'abandon dans lequel était laissé le calcul des probabilités.

III. *L'œuvre de Laplace en mécanique céleste.* — M. Andoyer analyse, et cela en détail, les Mémoires qui constituent cette œuvre prodigieuse. Une première partie est relative à la mécanique céleste proprement dite et donne une idée des méthodes d'approximation employées par Laplace pour intégrer les équations du mouvement des corps célestes. Une seconde partie s'occupe de ses recherches sur le problème de l'attraction (attraction des sphéroïdes, figure des planètes, calcul des marées, etc.).

On ne peut parcourir ce Chapitre sans rester confondu de ce qu'en moins d'un siècle, des hommes d'un tel génie, Leibniz, Newton, Euler, Clairaut, d'Alembert, Lagrange, Laplace se soient trouvés pour développer des vues aussi hautes et pousser aussi loin leurs conséquences. M. Andoyer suppose naturellement que le lecteur est familiarisé avec l'histoire des progrès de la mécanique céleste. Il ne pouvait la reprendre à ses débuts, puisque, au contraire, son sujet était de l'exposer au moment où elle s'est épanouie, au moment où Laplace s'occupa du calcul exact des marées, des lois du mouvement des satellites de Jupiter, des inégalités de Jupiter et de Saturne, de la stabilité du système solaire; et aussi des inégalités de la Lune qui furent les découvertes qu'admirèrent le plus les contemporains de Laplace, parce que ses calculs confirmèrent brillamment les résultats obtenus par les fameuses expéditions scientifiques du XVIIIe siècle, entreprises pour mesurer l'aplatissement de la Terre et pour observer le passage de Vénus, c'est-à-dire pour mesurer indirectement la distance du Soleil à la Terre.

IV. *Les travaux de Laplace sur la théorie des probabilités.* — Signalons particulièrement l'exposé de ces deux questions : le rôle important de Laplace dans l'élaboration des idées émises par

Bayes sur les problèmes de probabilités des causes, dans l'étude de leur application à l'inversion du célèbre théorème de Jacques Bernoulli et dans la discussion des espoirs exagérés que l'on fondait sur ces idées pour préciser la notion de probabilité statistique; en second lieu ses importants travaux sur le problème des erreurs expérimentales, sur la recherche de la loi des erreurs dans le cas des séries normales, sur la règle des moindres carrés, toutes questions où son nom restera associé à ceux de Legendre et de Gauss.

V. *Recherches de Laplace sur des sujets divers. L'exposition du système du monde. Le traité de mécanique céleste. La théorie analytique des probabilités.* — Dans ce Chapitre sont tout d'abord indiqués les travaux de Laplace sur les phénomènes capillaires, les réfractions astronomiques, la mesure barométrique des altitudes, la vitesse du son, etc.

Enfin, le Livre de M. Andoyer se termine par l'analyse des grands ouvrages dans lesquels Laplace a rassemblé et coordonné ses Mémoires. A propos de l'*Exposition du système du monde*, quelques pages intéressantes sont consacrées à l'hypothèse cosmogonique de Laplace qui, on le sait, suit les transformations du système solaire depuis le temps lointain où il ne formait qu'une nébuleuse. Dans cet ordre d'idées, les conceptions de Descartes, de Buffon, de Kant, si intéressantes soient-elles, ne pouvaient prétendre être des contributions précises. L'hypothèse de Laplace est la première qui forme une véritable doctrine scientifique sur les origines du monde solaire. Elle a vieilli, il est vrai. Elle a été discutée par Faye parce que des mouvements rétrogrades ont été découverts. Mais elle a conservé ses mérites que M. Andoyer met en lumière et au sujet desquels il cite la chaude défense que Poincaré en a présentée.

Th. Leconte.

PAINLEVÉ (Paul). — Les axiomes de la Mécanique; examen critique. Note sur la propagation de la lumière. In-16, XVIII-112 pages. Gauthier-Villars et Cie, « Les Maîtres de la Pensée scientifique », 1922.

Le petit Livre de M. Painlevé qui vient de paraître dans la collection : « Les Maîtres de la Pensée scientifique », reproduit (p. 1-44), un Chapitre du volume intitulé : « La Méthode dans les Sciences » (Alcan, 1909), et (p. 45-79) une communication faite le 1er décembre 1904 à la Société française de Philosophie (*Bulletin* de cette Société, t. V, 1905, p. 27-50). L'auteur y a ajouté une Note sur la propagation de la lumière et une Note sur le principe de l'action et de la réaction.

La partie principale du Livre a été, comme on le voit, écrite avant les grandes controverses suscitées par les théories de la relativité, et auxquelles du reste M. Painlevé a pris la part brillante que l'on sait. Elle n'en est que d'une lecture plus suggestive. Au commencement de ce siècle, la Mécanique classique, dans le triomphe des admirables conquêtes qui ont marqué son développement, surtout depuis Newton, pouvait se croire fondée sur des bases inébranlables. M. Painlevé énonce et précise les axiomes qui peuvent lui servir de fondement logique, en les examinant tant du point de vue historique que du point de vue critique. Une analyse ne peut remplacer la lecture directe de ces pages lumineuses. Je me contenterai d'indiquer quelques réflexions que m'a suggérées cette lecture.

Elles se rapportent surtout au premier axiome, celui que M. Painlevé met à part des autres, le *Principe de causalité*, qu'il regarde comme la base même de toute science. Son énoncé général est le suivant :

Lorsque les mêmes conditions sont réalisées, à deux instants différents, en deux lieux différents de l'espace, les mêmes phénomènes se reproduisent, transportés seulement dans l'espace et le temps.

Un tel énoncé n'a de sens, comme le remarque l'auteur, que si l'on sait répondre aux deux questions suivantes :

1° *Qu'est-ce que c'est que des phénomènes se reproduisant les mêmes, transportés dans l'espace et le temps?*

2° *Quelles sont les conditions dont la réalisation, à deux instants*

différents et en deux lieux différents, suffit pour assurer la reproduction des mêmes phénomènes ?

Pour répondre à la première question, il faut évidemment avoir défini une fois pour toutes un système de mesures permettant de caractériser quantitativement un phénomène, en ce qui concerne ses propriétés physiques (mécaniques, thermiques, électriques, etc.). Quant au transport lui-même dans l'espace et le temps, transport qui bien entendu ne doit pas altérer les résultats numériques des mesures dont il est question ci-dessus, il ne soulève aucune difficulté théorique si l'on admet avec Newton la notion du temps absolu et de l'espace absolu. La localisation d'un phénomène dans l'espace et dans le temps se fait analytiquement au moyen de quatre nombres x, y, z, t, une fois qu'on s'est donné une origine du temps, un système de référence fixe dans l'espace, une unité de temps et une unité de longueur. Le transport d'une succession de phénomènes dans l'espace et dans le temps se traduit analytiquement par une *transformation* portant sur x, y, z, t (changement de coordonnées ordinaire en x, y, z d'une part, changement de t en $t+c$ d'autre part), et *toutes ces transformations forment un groupe* (le groupe de Newton).

Le développement même de la Mécanique a conduit à modifier en partie les idées de Newton ; on a abandonné la notion d'espace absolu, tout en conservant celle de temps absolu. M. Painlevé montre très clairement les difficultés que ce nouveau point de vue introduit dans l'interprétation du principe de causalité. C'est qu'en effet la localisation dans l'espace, exigeant l'emploi d'un système de référence dont on ne peut dire s'il est fixe ou mobile, *n'est plus indépendante* de la localisation dans le temps. Le transport d'une succession de phénomènes dans l'espace et dans le temps se traduit encore analytiquement par une transformation sur x, y, z, t, mais les formules qui donnent les nouvelles valeurs de x, y, z *peuvent dépendre de* t. Ce qui reste essentiel pour que le principe de causalité ait un sens, c'est que *ces transformations forment un groupe.*

En définitive, si l'on veut, tout en en conservant la substance, rendre le principe de causalité indépendant de toute notion particulière de l'espace et du temps, on peut l'énoncer de la manière suivante :

Il existe un groupe de transformations de l'espace-temps tel que, les mêmes conditions étant réalisées à deux instants différents, en deux lieux différents de l'espace, les mêmes phénomènes se reproduisent, à une transformation près de ce groupe.

A cet égard, la Mécanique de la relativité *restreinte* satisfait, aussi bien que la Mécanique classique, au principe de causalité de M. Painlevé; mais, tandis que le groupe fondamental de la seconde est le groupe dit de Galilée, celui de la première est le groupe de Lorentz-Minkowski.

Je n'insisterai pas sur la seconde question que pose l'énoncé du principe de causalité, à savoir la définition de ce qu'il faut entendre par les *conditions* qui déterminent une succession de phénomènes. On trouvera dans le livre de M. Painlevé des pages très intéressantes sur ce qui distingue à cet égard la Mécanique scholastique de la Mécanique de Copernic. La comparaison entre la Mécanique classique et la Mécanique de la relativité restreinte montre, là encore, de grandes analogies; dans l'une et dans l'autre, les *conditions* relatives à un point matériel sont définies par un certain vecteur d'Univers; avec un système de référence de Galilée, les composantes d'espace de ce vecteur définissent la quantité de mouvement, la composante de temps définit la masse. Ce qui distingue l'une et l'autre mécanique provient de la nature du groupe fondamental; si l'on choisit un système de référence de Galilée arbitraire, la composante de temps du vecteur est, en Mécanique classique, indépendante du système de référence (c'est la *masse*); en Mécanique de la relativité, c'est la racine carrée d'une certaine combinaison quadratique des quatre composantes qui est indépendante du système de référence (c'est la *masse au repos*).

M. Painlevé insiste avec raison à plusieurs reprises dans son Introduction sur ce fait essentiel que, dans la Mécanique de la relativité restreinte, il y a, comme dans la Mécanique classique, des systèmes de référence privilégiés (ceux par exemple par rapport auxquels le principe d'inertie est vrai). On a peu remarqué, semble-t-il, que la Mécanique classique admet un groupe fondamental d'espace-temps beaucoup plus étendu que celui qu'on désigne sous le nom de « groupe de Galilée ». En effet, si l'on a une succession possible

de phénomènes mécaniques définis analytiquement par certaines formules lorsqu'on prend des axes (rectangulaires *ou obliques*) de Galilée, ces mêmes formules, interprétées avec un autre système d'axes (*rectangulaires* ou *obliques*) de Galilée, définissent encore une succession possible de phénomènes mécaniques : ce sont en un sens les mêmes, transportés dans l'espace et le temps d'une manière plus générale qu'on ne le conçoit d'habitude. Autrement dit, la Mécanique classique repose, non pas sur une Géométrie *métrique*, mais sur une Géométrie simplement *affine*. Le théorème du mouvement du centre de gravité, celui des moments cinétiques sont de nature *affine*. Le théorème des forces vives lui-même ne contredit pas ce qui précède; en réalité, il y a une infinité de théorèmes des forces vives, tous différents, mais tous également vrais, fondés chacun sur une métrique qui peut être choisie arbitrairement. Ce n'est que lorsque la Mécanique, *sortant des généralités théoriques*, aborde des problèmes *physiques* déterminés (Mécanique céleste, Mécanique des corps solides, des fluides parfaits) qu'elle devient métrique. La Mécanique de la relativité restreinte, au contraire, est dès le début de nature métrique, par sa conception même de la quantité de mouvement et de la masse; cela tient sans doute à ce qu'elle est, beaucoup plus que la Mécanique classique, sortie de la Physique, de l'Électromagnétisme en particulier, qui est une science essentiellement métrique.

Si la Mécanique de la relativité restreinte se conforme, dans ce qu'il a d'essentiel, au principe de causalité de M. Painlevé, il n'en est pas tout à fait de même de la relativité généralisée. C'est qu'en effet, dans cette dernière théorie, l'espace et le temps ne sont plus de simples cadres, nécessaires sans doute pour nous représenter les phénomènes, mais incapables, comme dit M. Painlevé, de jouer le rôle de *causes efficientes;* la description *physique* des phénomènes ne peut plus être séparée de leur description géométrique et cinématique, puisque, jusqu'à un certain point tout au moins, les propriétés physiques ne sont qu'une simple manifestation des propriétés géométriques de l'espace-temps. D'autre part, l'espace-temps n'admet plus de groupe de transformations. Ce n'est pas à dire que rien ne subsiste du principe de causalité de M. Painlevé, à condition, bien entendu, de lui donner une forme moins rigide. Là encore la notion de groupe joue un rôle prépondérant, là encore

il y a réellement des systèmes de référence privilégiés. Mais ce n'est pas ici le lieu d'aborder ces questions. Je me contenterai de signaler la Note sur la propagation de la lumière, dans laquelle M. Painlevé cherche à montrer que, sans sortir du cadre de la Mécanique classique, bien des hypothèses restent ouvertes qui rendraient peut-être compte des contradictions apparentes entre cette Mécanique et la Physique. Tout cela, encore une fois, est à lire et à méditer.

Elie Cartan.

VILLAT (Henri). — Aperçus théoriques sur la résistance des fluides. Un volume in-8° de 101 pages. Collection *Scientia*. Paris, Gauthier-Villars, 1920.

Ce petit livre a pour but d'exposer l'état actuel d'une théorie d'Hydrodynamique déjà ancienne, mais dont les progrès importants datent seulement de quelques années. Il est bien connu depuis fort longtemps que les équations de l'Hydrodynamique, appliquées à un fluide parfait incompressible, illimité, au repos à l'infini et contenant un solide se déplaçant d'un mouvement de translation uniforme conduisent à la conséquence inattendue que la résistance opposée par le fluide au déplacement du solide est nulle. Ce fait anormal, contredit formellement par l'expérience, constitue le paradoxe de d'Alembert. En 1868, Helmholtz imagina pour tourner cette difficulté que dans le sein du fluide en mouvement pouvaient exister des discontinuités pour les vitesses, discontinuités réparties sur certaines nappes le long desquelles les particules du fluide glissent les unes sur les autres, au repos d'un côté de la nappe, en mouvement de l'autre côté. Kirchhoff en a immédiatement donné quelques exemples basés sur l'emploi de la représentation conforme et des variables imaginaires. Puis la théorie resta à peu près stationnaire et ce n'est qu'en 1907, qu'un Mémoire fondamental de M. Levi-Civita, lui fit faire un progrès décisif. En 1909, M. Brillouin fit du Mémoire de M. Levi-Civita l'objet de son cours au Collège de France et de cette date à peu près partent les recherches de M. Villat, qui a su dégager la

véritable méthode de résolution du problème et qui a développé la théorie dans diverses directions. Ses nombreux Mémoires sur la question en font à l'heure actuelle incontestablement le savant le plus qualifié en France pour présenter au public un exposé de la théorie.

Après avoir rappelé rapidement les théorèmes généraux et les principes fondamentaux de l'Hydrodynamique, l'auteur consacre un Chapitre à une étude purement mathématique du problème de Dirichlet dans le cercle et l'anneau. Alors que les mathématiciens purs s'attachent plus spécialement aux théorèmes d'existence, ceux qui s'occupent de mathématiques appliquées ont surtout besoin de solutions explicites et maniables des problèmes rencontrés. M. Villat a su mettre la solution du problème de Dirichlet dans le cercle et l'anneau sous une forme simple pratiquement utilisable, grâce à d'ingénieux passages à la limite et à un emploi habile des fonctions elliptiques. Ici encore, alors que dans une étude purement théorique, on peut à la rigueur se borner à l'étude des fonctions elliptiques pour en dégager l'idée essentielle et en faire ressortir la beauté logique, ici au contraire il est nécessaire pour comprendre pleinement les calculs ultérieurs d'être rompu à tous les détails d'application de cette trigonométrie fort compliquée des fonctions de Weierstrass et de Jacobi dont l'usage sera constant par la suite.

Le Chapitre suivant est consacré à l'exposition du paradoxe de d'Alembert, à l'introduction de l'idée des surfaces de discontinuité de Helmholtz-Kirchhoff et à un paradoxe dû à M. Brillouin montrant que l'on n'échappe aux anomalies précédemment signalées sur la résistance que si l'espèce de sillage que les nappes de discontinuité forment derrière le corps s'étendent à l'infini.

Les Chapitres suivants sont relatifs à l'étude fondamentale du mouvement du corps solide dans le liquide et à la détermination de la résistance éprouvée par lui. Après le cas simple, connu depuis longtemps, d'un obstacle plan, se présente naturellement à l'esprit le cas d'un obstacle anguleux formé de deux plans raccordés. Traitant ce cas comme application de résultats précédemment acquis, M. Villat montre qu'il soulève déjà de grosses difficultés et il a su le premier montrer comment il fallait étendre l'hypothèse de Helmholtz pour donner au problème toute la géné-

ralité nécessaire. Les calculs sont longs et compliqués, mais l'auteur a su leur donner une forme telle qu'ils ne sont pas pénibles pour peu que l'on soit familiarisé avec l'emploi des fonctions elliptiques.

Ensuite l'auteur indique dans quelques Chapitres les diverses généralisations possibles du problème principal : cas d'un obstacle frappé par une veine liquide de largeur finie se bifurquant derrière lui, obstacle placé dans un canal ou bien plongé dans un fluide limité d'un côté par une paroi fixe.

Enfin un dernier Chapitre signale une singularité bien inattendue; dans le cas relativement simple de l'obstacle anguleux tournant sa concavité vers le courant, on aurait pu s'attendre à ce que le problème soit déterminé et n'ait qu'une solution. Or M. Villat a réussi à mettre en évidence deux solutions de nature très différentes satisfaisant à toutes les conditions mathématiques du problème et qu'aucune considération physique ne permet de départager. Il y aurait dans l'étude de leur stabilité le sujet de belles recherches, qui malheureusement paraissent extrêmement difficiles avec les moyens actuels.

L'ensemble du petit Livre porte ainsi sur des questions diverses qui ont fait l'objet de nombreux Mémoires et il est remarquable que M. Villat ait réussi, dans le cadre restreint de la collection *Scientia*, à exposer simplement et sans négliger les détails utiles l'ensemble d'une œuvre fort étendue. Il est souvent difficile aux débutants de consulter les Mémoires originaux dans lesquels ils risquent un peu de se perdre; des ouvrages comme celui-ci leur sont alors d'un précieux secours. La théorie ainsi constituée a déjà une certaine ampleur et il serait peut-être malaisé de la compléter en ligne directe, mais les à côtés fourmillent en points intéressants qui peuvent être le départ de recherches fécondes. L'extension des problèmes traités ici à l'espace à trois dimensions (on ne sait traiter jusqu'à présent que le cas plan), l'étude des discontinuités en mouvement non permanent, le raccord de cette théorie avec ce qu'on sait sur les fluides à faible viscosité offrent un vaste champ aux recherches nouvelles et il est à souhaiter que le livre de M. Villat amène de nouveaux adeptes à une branche de la science un peu négligée en France, alors que dans d'autres pays, en Allemagne notamment, des résultats importants sont obtenus par les

efforts concentriques de chercheurs travaillant en groupe et par le contrôle constant de leurs études avec les données expérimentales. René THIRY.

KEYSER (CASSIUS J.). — MATHEMATICAL PHILOSOPHY. A STUDY OF FATE AND FREEDOM. New York, E. P. Dutton and C° (sans date; Copy Right 1922), 8°, p. VIII-466.

Personne n'ignore que les fondements des sciences exactes, telles que nous les cultivons depuis désormais 2000 ans, ont été posés par les philosophes de la Grèce; ensuite une séparation entre deux branches s'est produite, les mathématiques ayant suivi la route frayée et balayée par les célèbres géomètres de la période gréco-alexandrine. Mais, lorsqu'il a fallu donner à la géométrie une tournure et une direction nouvelles, ce sont deux célèbres philosophes, Descartes et Leibniz, qui se sont chargés de les découvrir. De nos jours, G. Cantor d'un côté et H. Poincaré de l'autre (pour nous borner aux personnalités de premier ordre) ont donné de confirmations éclatantes de l'opinion que c'est à des considérations générales qu'il faut avoir recours si l'on veut découvrir de nouvelles régions dans l'immense royaume mathématique. C'est la constatation des obligations que les mathématiciens ont envers les philosophes qui a suggéré à M. Keyser, l'illustre professeur de la Columbia University, de faire un cours destiné aux étudiants en philosophie, ayant pour but de leur montrer quels sont les concepts fondamentaux des mathématiques modernes. Toutefois, en livrant à l'impression ses conférences, il voulut s'adresser à un public plus étendu, comprenant : les mathématiciens qui ne sont pas dépourvus de goût pour la contemplation, d'un point de vue élevé, des principes de leur science; les professeurs qui ne veulent pas être dominés par la technique; les étudiants des sciences naturelles qui désirent connaître ce qui caractérise une science si parfaite qu'elle mérite d'être choisie pour modèle; les critiques; les physiologistes; les sociologues; les ingénieurs animés par la noble aspiration de donner à leur spécialité la direction qu'exige la

société moderne; enfin toutes les personnes cultivées aspirant à se pénétrer de l'esprit d'une science que Platon disait divine.

Je souhaite de tout cœur que l'éminent savant trouve ce public nombreux et varié; mais il faut reconnaître que, malgré le charme exceptionnel de son style d'écrivain hors ligne, l'étude de son Livre exige une attention et une concentration d'esprit dont peu de personnes sont capables dans cette époque dominée par la hâte. En effet, dans le deuxième Chapitre (le premier contenant, plutôt qu'un programme détaillé du cours, l'exposé des idées dominantes de tout l'Ouvrage), nous trouvons les postulats choisis, par M. Hilbert pour fonder un système géométrique, avec la recommandation au lecteur de les étudier à fond dans le Mémoire original du célèbre mathématicien allemand. C'est que M. Keyser se sert de ce système pour établir un concept nouveau et très important, auquel il donne le nom de « fonction doctrinale ». Pour y parvenir il remarque que les postulats de Hilbert établissent les qualités de trois espèces d'êtres, qu'il appelle « points », « droites », « espace », mais qu'on pourrait bien appeler par d'autres noms et que l'on pourrait interpréter de toute autre manière, chaque interprétation donnant naissance à une théorie particulière. Pour mieux éclaircir cette remarque assez abstraite, il expose tout au long trois interprétations particulières, deux géométriques, la troisième arithmétique (il s'agit, en effet, de considérer le « point » de Hilbert comme un couple de nombres réels). Malheureusement, je ne dispose pas d'un espace suffisant pour donner ici une idée assez complète des développements et des remarques qu'expose M. Keyser sur les conditions auxquelles doit satisfaire un système de postulats pour mériter une place dans la science; mais il me semble que la notion de « fonction doctrinale » mérite désormais d'être accueillie dans toute exposition philosophique des bases des mathématiques.

Dans ces sciences on rencontre plusieurs autres idées dues, dans la plus grande partie, aux recherches faites par les mathématiciens modernes ou même contemporains; tels sont les suivantes : transformation, invariant, groupe, variable, limite, infini, hyperespace, géométrie non euclidienne; à chacune l'auteur consacre un Chapitre particulier, dans lesquels ces idées sont définies, expliquées, appliquées de la manière la plus heureuse.

Deux autres Chapitres sont consacrés à la « Mathématique de la

Psychologie » et à la « Psychologie des Mathématiques ». Le noyau des développements qu'on lit dans le premier est représenté par la célèbre « loi de Fechner » et par là ce Chapitre nous rappelle le remarquable essai de M. Jules Tannery sur « La psychophysique » que nos lecteurs connaissent sans doute, car il a été reproduit par M. Borel dans la collection d'articles du regretté savant ayant pour titre *Science et Philosophie* (Paris, Alcan, 1912). M. Keyser, évidemment, ne l'a pas connu, car il l'aurait certainement cité, suivant l'honnête système qu'il a adopté de signaler, pour chaque question qu'il traite, les auteurs qui s'en sont occupés auparavant. Non moins remarquables sont les observations exposées par M. Keyser sur la psychologie des mathématiques; on y rencontre, par exemple, la subtile mais juste distinction entre « perception » et « imagination » pour expliquer les obstacles rencontrés par certains concepts nouveaux (par exemple celui d'espace à plusieurs dimensions) avant d'obtenir l'accès dans notre science.

Comme j'écris dans une revue ayant un programme bien déterminé, je dois m'abstenir de m'étendre sur des idées générales ou étrangères aux mathématiques, quelles que soient l'originalité et l'importance que j'y trouve; mais je dois signaler à ceux qui se sont voués aux applications les remarques d'une vérité parfaite que M. Keyser écrivit sur la haute mission de l'ingénieur dans la société présente et future.

L'étude du beau volume du professeur américain finie, il me vint à l'esprit cette pensée que si quelque mathématicien connaissant bien l'anglais voulait le traduire en français, en cette langue de haute perfection, capable d'exprimer toutes les nuances de la pensée, de se plier à toutes les tournures d'esprit, il rendrait un service signalé non seulement à la science en général, mais aussi à la civilisation; car l'Ouvrage que nous venons d'analyser rapidement est de ceux qui ont le privilège d'élever notre âme au-dessus des basses considérations de nature matérielle dont on est aujourd'hui affligés par les déplorables conditions où la grande guerre a plongé l'humanité entière.

Gino Loria.

MÉLANGES.

SUR LE MOUVEMENT D'UNE PLANÈTE DANS UN MILIEU RÉSISTANT;

PAR M. P. FATOU.

1. Les astronomes et les géomètres qui se sont préoccupés depuis plus d'un siècle de rechercher la limite d'exactitude de la loi d'attraction newtonienne et d'expliquer les petits écarts constatés entre les mouvements calculés et observés des planètes et des comètes ont été conduits à étudier l'influence d'un milieu résistant sur ces mouvements; l'hypothèse de l'existence d'un tel milieu au voisinage du Soleil et même dans une région comprenant le périhélie de Mercure et de quelques comètes périodiques étant, *a priori*, assez naturelle. En outre, si cette influence est actuellement négligeable — et elle paraît l'être en effet, sauf en ce qui concerne la comète d'Encke — elle a pu jouer un rôle considérable dans le passé, quand l'atmosphère solaire s'étendait bien au delà de ses limites actuelles, et M. See a pu faire de cette hypothèse la base fondamentale d'une théorie cosmogonique aussi raisonnable que beaucoup d'autres et qu'on peut regarder comme renfermant une part de vérité.

Si actuellement, à part l'exception signalée plus haut, cette influence est devenue beaucoup trop insignifiante pour qu'il y ait lieu d'en tenir compte dans l'état actuel de l'astronomie pratique, elle peut cependant se faire encore sentir au bout d'un nombre considérable de siècles et modifier les conclusions relatives à la stabilité du système solaire tirées de l'étude analytique du problème des n corps. Pour ces différentes raisons, il apparaît non seulement que le problème du mouvement d'une planète dans un milieu résistant ne peut pas être négligé, mais encore qu'il y a lieu de ne pas se borner au calcul approximatif des inégalités qui en résultent par l'emploi de la méthode de variation des constantes ainsi qu'on l'a fait jusqu'à présent, et qu'on doit également traiter

le problème du point de vue qualitatif en recherchant les caractères généraux des lois asymptotiques du mouvement. C'est ce que j'ai tenté de faire récemment dans un article publié dans le *Bulletin astronomique* (2e série, 1re Partie, t. I, fasc. 6, 1922, p. 293-301). Depuis la publication de cet article, j'ai remarqué que l'on pouvait, sans presque rien changer aux raisonnements employés, tirer des conclusions plus précises d'une part, et, d'autre part, plus générales, en ce sens qu'elles subsistent au moins en partie quand on ne précise pas la loi de résistance adoptée. J'ai résumé ces conclusions dans deux Notes des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (t. 174, p. 1162, séance du 1er mai 1922; p. 1330, séance du 22 mai 1922).

M. Chazy a indiqué de son côté (*C. R. Acad. Sc.*, t. 174, p. 1280, séance du 8 mai 1922) des résultats analogues, mais cependant moins précis.

2. Négligeant la résistance de milieu qui pourrait résulter de la translation du système solaire, nous regarderons le Soleil comme fixe et nous étudierons simplement le mouvement d'un point matériel attiré par un centre fixe, en raison inverse du carré de la distance, et soumis d'autre part à une force de résistance, dirigée en sens inverse de la vitesse, fonction de cette vitesse et de la position du mobile. On reconnaît immédiatement que le mouvement est plan et l'on obtient aisément les équations du mouvement, pour lesquelles d'ailleurs nous renverrons aux *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques* de H. Poincaré (2e édition, Paris, Hermann, 1913, Chap. VI, p. 117-124).

Appelons r et θ les coordonnées polaires, v la vitesse, R la résistance du milieu (en valeur absolue), e la base des logarithmes népériens. Le théorème des moments conduit à l'équation

$$(1)\qquad r^2\frac{d\theta}{dt} = C_0\, e^{-\int_0^t \frac{R}{v}\,dt}.$$

Le théorème des forces vives peut s'exprimer par les deux équations :

$$(2)\qquad v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a},$$

$$(3)\qquad \frac{\mu}{a} = \frac{\mu}{a_0} + 2\int_0^t R\,v\,dt,$$

a représente le demi-grand axe de l'orbite osculatrice quand celle-ci est elliptique; supposons qu'il en soit ainsi au début du mouvement ($t = 0$); alors a_0 étant positif, ainsi que la fonction sous le signe $\int$ au second membre de (3), il est visible que a reste positif et décroît constamment; l'orbite osculatrice reste elliptique et son grand axe diminue.

Faisons maintenant sur R les hypothèses suivantes : R est une fonction essentiellement positive de v, r, θ; nous admettons que $\frac{R}{v}$ reste finie pour v tendant vers zéro, $\frac{1}{r}$ restant borné, de sorte que d'après (1) la vitesse ne devient jamais nulle au bout d'un temps fini en dehors du centre attractif. En outre nous admettons que, v restant supérieure à une quantité positive, il en est de même de R; si l'on adopte pour R l'expression souvent admise

$$R = kv^{\alpha}e^{-\beta},$$

α et β étant des constantes positives, nos hypothèses seront vérifiées pourvu que α soit supérieur ou égal à l'unité. Nous verrons plus loin comment nos conclusions peuvent être modifiées si l'on supprime la première hypothèse.

Enfin, le cas du mouvement rectiligne étant exclu pour le moment, C_0 n'est pas nul et peut être supposé positif.

Démontrons maintenant la proposition suivante : *il est impossible que t tendant vers une limite* T *finie ou infinie, la position limite du mobile soit indéterminée.*

Plusieurs cas sont à distinguer :

1° r possède deux limites d'indétermination supérieure et inférieure distinctes : ρ et ρ' ($\rho < \rho'$). Nous allons voir qu'on aboutit à une contradiction. Soient ρ_1 et ρ_2 deux longueurs telles que

$$\rho < \rho_1 < \rho_2 < \rho'.$$

Il résulte de la continuité de la trajectoire et de la définition de ρ et de ρ' qu'il existe, pour des valeurs du temps comprises entre o et T, une infinité d'arcs de trajectoire joignant deux points des circonférences de rayon ρ_1 et ρ_2 respectivement et de centre O, ces arcs étant compris dans la couronne $\rho_1 < r < \rho_2$. Observons, d'autre part, que a décroissant constamment tend vers a_1 quantité

positive, car, en vertu de l'inégalité

$$r < 2a,$$

si a tendait vers zéro, il en serait de même de r.

Sur chacun des arcs de trajectoire que nous venons de définir, on a

$$r < \rho_2,$$

et, comme toutes les limites de r sont au plus égales à $2a_1$, on a

$$\rho_2 < \rho' \leq 2a_1,$$

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} > \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a_1} > \frac{2\mu}{\rho_2} - \frac{\mu}{a_1} > 0,$$

v est donc supérieure à un nombre fixe : il en est de même de R, en vertu des hypothèses faites sur cette résistance. L'intégrale $\int R v \, dt$ ou $\int R \, ds$, étendue à l'un des arcs considérés, est donc supérieure à $K \int ds$, K étant un nombre positif fixe. Mais la longueur $\int ds$ de cet arc étant supérieure à $\rho_2 - \rho_1$, on voit que l'intégrale $\int 2 R v \, dt$, étendue à tous les arcs considérés, a une valeur infinie, puisque ces arcs sont en nombre infini ; il en est de même, *a fortiori*, de l'intégrale étendue à l'intervalle de temps $(0, T)$. Mais alors, d'après l'équation (3), la limite a_1 de a serait nulle et de même ρ et ρ' : la contradiction énoncée apparaît donc, et l'on doit conclure que r tend régulièrement vers une limite.

2° Supposons maintenant que r tende vers une limite positive r_1 quand t tend vers T ; l'angle polaire θ croît constamment, en vertu de l'équation (1) et des hypothèses faites sur les quantités qui y figurent ; dans ces conditions, si la position limite du mobile est indéterminée, c'est que θ croît au delà de toute limite ; nous admettrons qu'il en est ainsi.

Comme, d'autre part, a tend en décroissant vers a_1, v^2 tend vers la limite

$$v_1^2 = \frac{2\mu}{r_1} - \frac{\mu}{a_1}.$$

Si $v_1^2 \neq 0$, on constate immédiatement que le raisonnement de

l'alinéa précédent est encore applicable et conduit ainsi à une contradiction. Si $v_1^2 = 0$, il y a lieu d'appliquer le lemme suivant de la théorie des fonctions qui est d'un emploi commode dans l'étude des équations différentielles dans le domaine réel :

« *Si une fonction $f(x)$ d'une variable réelle x, continue ainsi que ses n premières dérivées, admet au moins une limite d'indétermination finie pour x infini, les dérivées en question admettent la limite d'indétermination zéro.* »

La démonstration de ce lemme est bien simple ; si $f^{(n)}(x)$, fonction continue, n'admet pas la limite d'indétermination zéro pour x infini, c'est que pour $x > x_0$ on a constamment

$$f^n(x) > \alpha$$

ou constamment

$$f^{(n)}(x) < -\alpha,$$

α étant une constante positive. Dans la première éventualité, on aura, en intégrant de x_0 à x,

$$f^{(n-1)}(x) > \alpha(x - x_0) + f^{(n-1)}(x_0).$$

Une nouvelle intégration donne

$$f^{(n-2)}(x) > \alpha\frac{(x-x)^n}{2!} + f^{(n-1)}(x_0)\frac{x-x_0}{1!} + f^{(n-2)}(x_0)$$

et ainsi de suite ; finalement

$$f(x) > \alpha\frac{(x-x_0)^n}{n!} - f^{(n-1)}(x_0)\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + f(x_0).$$

Le second membre étant un polynome de degré n en $x - x_0$ où le coefficient de $(x - x_0)^n$ est positif tend évidemment vers $+\infty$ avec x, contrairement à l'hypothèse que $f(x)$ possède une limite d'indétermination finie : la conclusion s'ensuit. Le raisonnement est analogue dans la seconde éventualité.

Ceci posé, considérons les équations intrinsèques du mouvement ; celle qui donne l'expression de la composante normale de la force appliquée au mobile s'écrit :

$$F_n = \frac{mv^2}{\mathcal{R}},$$

$\mathcal{R}$ désignant le rayon de courbure de la trajectoire, m la masse du mobile. On a donc

$$\frac{\mu m}{r^2}\mathcal{R}\cos\psi = mv^2,$$

ψ désignant l'angle de la normale et du vecteur. En désignant par u l'inverse du rayon vecteur et par des points les dérivées prises par rapport à θ, l'expression bien connue du rayon de courbure en coordonnées polaires permet d'écrire l'équation qui précède sous la forme

$$(4)\qquad \frac{u^2+\dot{u}^2}{u+\ddot{u}} = \frac{v^2}{\mu}.$$

Comme, par hypothèse, u tend vers $\frac{1}{r_1}$ pour θ infini, $\ddot{u}$ admettrait la limite d'indétermination zéro en vertu du lemme que nous venons de démontrer; donc, d'après (4), $\frac{v^2}{\mu}$ aurait une limite d'indétermination au moins égale à $\frac{1}{r_1}$; comme nous avons supposé que la limite de v^2 est nulle, la contradiction est manifeste.

3. Il résulte de cette discussion qu'il ne peut pas se présenter d'indétermination pour la position limite du mobile, au bout d'un temps fini ou infini. L'application des théorèmes généraux de Cauchy permet alors d'affirmer que le mouvement se poursuit régulièrement, au sens attribué par M. Painlevé à cette expression dans ses *Leçons sur les équations de la Mécanique* (Paris, Hermann, 1895, p. 213 et suiv.) du moins tant que le mobile n'atteint pas le centre attractif. Il suffit pour s'en convaincre de constater que les équations du mouvement forment un système d'équations différentielles du premier ordre par rapport aux variables r, θ, $r' = \frac{dr}{dt}$, $\theta' = \frac{d\theta}{dt}$, et à la variable auxiliaire $v^2 = r'^2 + r^2\theta'^2$, système qui, d'après nos hypothèses, peut toujours être résolu par rapport aux dérivées premières de ces variables, tant que r ne devient pas nul (1).

Supposons que le mobile ne tombe sur le centre attractif qu'au

(1) Il est d'ailleurs un peu plus simple pour faire cette vérification d'écrire les équations du mouvement en coordonnées cartésiennes.

bout d'un temps infini; je dis que la position limite du mobile, position dont l'existence a été démontrée plus haut, ne peut être que le centre attractif lui-même, c'est-à-dire l'origine des coordonnées. Admettons, en effet, que pour t infini, r et θ tendent respectivement vers r_1 et θ_1 ($r_1 \neq 0$); on sait d'ailleurs que a tend vers $a_1 \geqq \frac{r_1}{2} > 0$. En outre, $r^2 \frac{d\theta}{dt}$ étant positif et décroissant, d'après (1), tend vers une limite déterminée et finie; comme r^2 a une limite positive, $\frac{d\theta}{dt}$ a une limite finie, nécessairement nulle puisque θ tend vers θ_1 qui est fini. Enfin v^2 tend vers

$$v_1^2 = \frac{2\mu}{r_1} - \frac{\mu}{a_1};$$

donc d'après l'équation

$$v^2 = r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dr}{dt}\right)^2,$$

$\frac{dr}{dt}$ tend vers une limite finie, d'ailleurs nécessairement nulle puisque la limite de r est elle-même finie; il en résulte que v tend vers zéro, et comme $\frac{1}{r}$ reste borné, la résistance R tend vers zéro, en vertu de notre première hypothèse sur R. Écrivons alors la première des équations cartésiennes du mouvement, en prenant pour axe des x l'axe OM_1 qui contient la position limite M_1 :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3} - R_x.$$

Le second membre tendant vers la limite négative $-\frac{\mu}{r^2}$, x ne peut pas, contrairement à l'hypothèse, tendre vers la limite finie r_1, en vertu du lemme que nous avons déjà utilisé.

Ainsi donc *lorsque l'orbite osculatrice initiale est elliptique, la planète tombe sur le centre attractif au bout d'un temps fini ou infini, le mouvement étant régulier avant le choc.*

De plus, l'équation (2) entraîne l'inégalité

$$v^2 > \frac{2\mu}{r}$$

et, *a fortiori*,

$$r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 > \frac{2\mu}{r};$$

d'où, en tenant compte de (1),

$$r > \frac{C_0^2}{2\mu} e^{-2\int_0^t \frac{R}{v} dt},$$

ce qui montre que l'intégrale $\int \frac{R}{v} dt$, étendue à toute la trajectoire, est divergente. De là cette conséquence que *le demi-grand axe a tend vers zéro;* sinon v^2 d'après (2) tendrait vers l'infini, et l'intégrale $\int \frac{R}{v} dt$ étant divergente, l'intégrale

$$\int R v\, dt = \int \frac{R}{v} v^2\, dt$$

le serait *a fortiori*, ce qui implique d'après (3) que a tend vers zéro.

4. Examinons le cas du mouvement hyperbolique, bien qu'il soit moins intéressant au point de vue des applications astronomiques. Supposons donc que l'orbite osculatrice initiale soit une hyperbole et écrivons l'équation (1) des forces vives sous la forme

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} + h.$$

Au début du mouvement, h est une quantité positive égale à $+\frac{\mu}{a}$, $2a$ désignant l'axe transverse de l'hyperbole osculatrice; h décroît constamment par suite du travail de la résistance et peut changer de signe, le mouvement képlérien osculateur devenant alors elliptique, ce qui nous ramène au cas précédent. Mais dans tout intervalle où $h \geqq 0$, la variation de cette quantité et, par suite, la valeur correspondante de l'intégrale $\int R v\, dt$ (qui exprime le travail de la résistance) est une quantité finie. Le raisonnement fait plus haut pour démontrer la non-existence du cas d'indétermination de M. Painlevé demeure applicable [1]. La discussion ultérieure est également valable, mais ici avec cette différence que r peut tendre vers l'infini pour une valeur infinie du temps t, tandis que dans le cas elliptique, r restait borné.

---

[1] On doit s'appuyer sur ce fait que, r oscillant entre des limites finies, v^2 reste supérieur à une quantité positive, ce qui est ici évident puisque $h \geqq 0$.

Il nous reste à examiner le cas du mouvement rectiligne qui se produit quand la vitesse initiale est dirigée vers le centre attractif. Les conclusions sont les mêmes que dans le cas où la constante des aires initiale est différente de zéro, c'est-à-dire que trois hypothèses sont seulement possibles : ou bien le mobile tombe sur le centre attractif au bout d'un temps fini, ou bien il s'en rapproche indéfiniment quand le temps croît au delà de toute limite, ou bien encore il s'éloigne à l'infini. Les démonstrations sont les mêmes avec quelques simplifications et il n'y a pas lieu d'y insister. Il est, en outre, à peu près évident que la vitesse change de signe une fois au plus, le mouvement se poursuivant dans le même sens jusqu'à l'origine quand la vitesse est dirigée de M vers O.

Faisons encore une dernière remarque : si on laisse de côté l'hypothèse que l'expression $\frac{R}{v}$ reste finie en dehors de l'origine quand v tend vers zéro, en supposant toutefois que R s'annule en même temps que v, les raisonnements et conclusions qui précèdent demeurent applicables sauf sur un point : à savoir que la vitesse peut alors devenir nulle au bout d'un temps fini, le mouvement devenant ensuite rectiligne, de sorte que le mouvement dans son ensemble n'est plus régulier; du moins c'est une hypothèse qu'on ne peut pas exclure *a priori*.

5. Nous devons maintenant nous demander quelle peut être la forme des trajectoires; une première remarque résulte immédiatement de l'équation intrinsèque du mouvement que nous avons utilisée plus haut; c'est que la courbure de la trajectoire est en chaque point la même que celle de l'orbite osculatrice; il en résulte que cette trajectoire a constamment sa concavité dirigée vers l'origine.

Plaçons-nous dans le cas où l'orbite osculatrice restant elliptique, la trajectoire tend vers l'origine. Il peut arriver alors que l'angle polaire θ augmente indéfiniment, la trajectoire s'enroulant en spirale autour de l'origine. S'il n'en est pas ainsi, c'est que θ tend vers une limite finie quand r tend vers zéro (r est évidemment une fonction uniforme de θ, la tangente ne passant jamais par l'origine). Si l'on prend pour axe des x la position limite du rayon vecteur, la courbe est ainsi tangente en O à Ox. Je dis que, dans ces conditions, *r est à partir d'un certain moment une fonction*

monotone de θ, *et que, de plus, la tangente à la courbe reste continue à l'origine.*

Supposons, en effet, que r présente une infinité de maxima et de minima aux points M_1, M_2, ...

Soit V l'angle de la tangente et du rayon vecteur défini par

$$\operatorname{tang} V = \frac{r\,d\theta}{dr},$$

tang V n'est jamais nulle, car, la vitesse n'étant jamais infinie, $\frac{dr}{dt}$ n'est jamais infini et $\frac{d\theta}{dt}$ n'est jamais nul, d'après la loi des aires (1). Soit α l'angle de la tangente avec l'axe des x. On a

$$\alpha = V + \theta,$$

$$R = \frac{d\alpha}{ds},$$

s étant l'arc de trajectoire. Comme R garde un signe constant, α varie toujours dans le même sens et décroît, par exemple, quand on marche de M vers O; l'angle θ tendant vers zéro quand M tend vers O, et l'angle V restant borné puisque tang V ne devient jamais nul, $\alpha = V + \theta$ reste borné et, comme il décroît, il tend vers une limite finie laquelle ne peut être que $\frac{\pi}{2}$, puisqu'en M_1, M_2, M_3, ... on a $V = \frac{\pi}{2}$ et θ infiniment petit. Donc V tend lui-même vers $\frac{\pi}{2}$ et cot V vers zéro; mais ceci est incompatible, comme on va le voir avec l'hypothèse que r tend vers zéro. On a, en effet,

$$\cot = \frac{r\,d\theta}{dr},$$

$$-K < r\frac{d\theta}{dr} < +K.$$

En intégrant entre deux points stationnaires consécutifs M_i et M_{i+1}, on a

$$\int\left|\frac{dr}{r}\right| < K\,|\,\theta_i - \theta_{i+1}\,|,$$

$$\left|\log\frac{r_{i+1}}{r_i}\right| < K\,|\,\theta_i - \theta_{i+1}\,|;$$

d'où

$$\left|\log\frac{r_1}{r_n}\right| < K\sum\left|\theta_i - \theta_{i+1}\right| = K(\theta_1 - \theta_n) < K\theta_1,$$

r_n ne tendrait donc pas vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Il faut donc que, à partir d'un certain point de la trajectoire, r décroisse constamment en même temps que θ. Dans ces conditions, $\cot V$ n'étant jamais négative, V oscille entre o et $\frac{\pi}{2}$; comme $\alpha = \theta + V$ décroît en même temps que θ, et qu'il reste borné, il tend vers une limite et V tend vers la même limite; cette limite est d'ailleurs nécessairement nulle, sinon on aurait, comme il résulte de ce qui précède,

$$\log\frac{r_1}{r} < K\theta_1$$

et r ne tendrait pas vers zéro.

Ainsi la tangente à la courbe en M a pour limite la tangente Ox en O, quand M tend vers O. En outre, r étant une fonction monotone de θ, x et y sont des fonctions de θ, à variation bornée, et la courbe possède une longueur finie ainsi qu'il résulte des théorèmes de MM. Jordan et Lebesgue ([1]).

En résumé, quand l'orbite osculatrice initiale est elliptique, deux cas généraux peuvent se présenter quant à la forme de la trajectoire : 1° cette trajectoire s'enroule en spirale autour de l'origine; 2° la trajectoire atteint l'origine avec une tangente qui reste continue en ce point et une longueur finie, le rayon vecteur étant à partir d'un certain moment constamment décroissant. Dans l'un et l'autre cas, la courbe tourne constamment sa concavité vers l'origine.

Les deux cas se présentent effectivement. Pour avoir un exemple du deuxième cas, considérons par exemple une courbe analytique et régulière en O, de courbure non nulle en ce point et cherchons, au moyen des équations intrinsèques du mouvement, quelle loi de résistance il faut admettre pour que le mobile M

([1]) Ce point est d'ailleurs évident en remarquant qu'une ligne convexe enveloppée est plus courte qu'une ligne enveloppante. Il s'ensuit que si AMB est un arc de courbe tournant sa concavité vers O, l'angle AOB $= \Delta\theta$ étant $< \pi$, la longueur de l'arc sera inférieure à $\rho(2 + \Delta\theta)$, ρ désignant le maximum du rayon vecteur OM pour l'arc considéré.

décrive cette courbe sous l'influence de cette résistance et de l'attraction newtonienne du centre O. L'axe des x étant supposé tangent en O à la trajectoire, l'équation de celle-ci, au voisinage de l'origine, peut s'écrire en appelant toujours u l'inverse du rayon vecteur :

$$u = \mathrm{F}(\theta) = \frac{c}{\theta} + d + e\theta + \ldots \qquad (c > 0).$$

On déduit de là, d'après (2) et (4),

$$\frac{1}{a} = 2u - \frac{v^2}{\mu} = 2u - \frac{u^2 + \dot{u}^2}{u + \ddot{u}} = \frac{3}{2}\frac{c}{\theta} + \mathrm{E}(\theta),$$

$\mathrm{E}(\theta)$ désignant une série entière en θ. On a donc a exprimé en fonction holomorphe de θ sous la forme

$$a = \frac{2}{3c}\theta + \ldots.$$

Si s désigne l'arc de trajectoire compté à partir de l'origine, la formule

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2$$

permet d'exprimer s en fonction de θ, ou inversement. Si, par exemple, l'on choisit d'abord s comme variable indépendante, on trouve facilement :

$$\theta = cs + \ldots,$$
$$r = s + (\quad)s^3 + \ldots,$$
$$a = \frac{2}{3}s + \ldots,$$
$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} = \frac{\mu}{2s} + \mathrm{E}(s),$$

$\mathrm{E}(s)$ désignant une série entière en s; l'expression obtenue pour v^2 est bien positive pour s suffisamment petit et positif.

L'équation du mouvement projeté sur la tangente donne (en prenant pour unité la masse du mobile)

$$\mathrm{R} = \frac{dv}{dt} + \frac{\mu}{r^2}\cos\mathrm{V} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{ds} + \frac{\mu}{r^2}\cos\mathrm{V}.$$

On a, d'ailleurs,

$$\cos\mathrm{V} = \frac{dr}{ds} = 1 + (\quad)s^2 + \ldots.$$

Finalement

$$R = -\frac{\mu}{4s^2} - \frac{\mu}{s^2}[1 + E_1(s)][1 + E_2(s)] = \frac{3}{4}\frac{\mu}{s^2} + E_3(s).$$

Prenons maintenant v^2 comme variable indépendante. s s'obtient en fonction de v^2 sous forme d'une série entière en $\frac{1}{v^2}$ qui commence par le terme $\frac{\mu}{2v^2}$. En substituant, on obtient, pour R, une expression de la forme

$$R = \frac{3v^4}{\mu}\left[1 + \frac{c_1}{v^2} - \frac{c_2}{v^4} + \ldots\right] = \frac{3v^4}{\mu}\Phi(v^2),$$

le second membre étant convergent pour des valeurs suffisamment grandes de v. L'expression obtenue pour R est bien positive et représente donc une résistance de milieu. Soit v_0 une valeur telle que, pour $v \geqq v_0$, la série précédente soit convergente, positive et croissante; s_0 la valeur correspondante de l'arc, M_0 le point correspondant de la courbe. Si l'on abandonne en M_0 un mobile animé de la vitesse initiale v_0 dirigée suivant la tangente à la courbe dans le sens de M_0 vers O, et si ce mobile est soumis à l'attraction newtonienne $\frac{\mu}{r^2}$ de O et à la résistance de milieu $R = \frac{3v^4}{\mu}\Phi(v^2)$ dirigée en sens inverse de la vitesse, sa trajectoire coïncidera avec la courbe considérée. D'ailleurs, il est clair que l'arc $OM = s$ étant fini et la vitesse v tendant vers l'infini, le mobile arrive en O au bout d'un temps fini.

Remarquons que l'on aurait pu également exprimer R en fonction des trois variables r, θ et v, ce qui peut se faire naturellement d'une infinité de manières.

Considérons, par exemple, une circonférence tangente en O à l'axe Ox et de rayon b. On obtient, en appliquant les formules précédentes,

$$v^2 = \frac{\mu}{4b}\frac{1}{\sin\theta},$$

$$s = 2b\theta,$$

$$R = -\frac{3v^4}{\mu}\cos\theta,$$

ces formules étant valables dans le premier quadrant. Si l'on se donne *a priori* un point M_0 dans le premier quadrant et la loi de

résistance qui précède en fonction des variables v et θ, on peut toujours donner au mobile une vitesse initiale telle qu'il décrive l'arc M_0O tangent en O à Ox.

Pour avoir un exemple de mouvement en spirale, donnons-nous par exemple, *a priori*, la spirale hyperbolique

$$\frac{1}{r} = c\theta.$$

L'application des formules précédentes donne

$$v^2 = c\mu\left(\theta + \frac{1}{\theta}\right),$$

$$R = \frac{\mu c^2}{2}\sqrt{1+\theta^2}.$$

On en déduit pour R, en fonction de v, une expression de la forme

$$R = \frac{c}{2}v^2\left[1 + E\left(\frac{1}{v^2}\right)\right].$$

La résistance est ici de l'ordre du carré de la vitesse, qui croît indéfiniment avec θ. Enfin, le mobile arrive encore en O au bout d'un temps fini, comme il résulte de l'expression

$$t = \int_0^\infty \frac{d\theta}{c^{\frac{3}{2}}\mu^{\frac{1}{2}}\theta^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}c^{-\frac{3}{2}}\mu^{-\frac{1}{2}}\theta^{-\frac{1}{2}}.$$

Si l'on se donne, comme trajectoire, la courbe

$$\frac{1}{r} = c\theta^\alpha \qquad (\alpha > 0),$$

on trouve pour v^2 et R des expressions dont les termes principaux sont respectivement $c\mu\theta^\alpha$ et $\frac{1}{2}\mu\alpha c^2\theta^{2\alpha-1}$, de sorte que R, exprimée en fonction de v, a pour terme principal un terme en $v^{4-\frac{2}{\alpha}}$.

Il est inutile de multiplier ici ces exemples élémentaires qui, toutefois, ne sont pas sans intérêt. Quand on se donne, en effet, une loi de résistance en fonction, par exemple, de la seule vitesse, la recherche de la forme des trajectoires est un problème extrêmement difficile pour la solution duquel on ne possède aucune méthode générale. La solution du problème inverse, dans de nom-

breux cas particuliers, donne une méthode heuristique pour le résoudre, de même que la connaissance des dérivées de fonctions élémentaires permet d'effectuer inversement de nombreuses intégrations; malheureusement, il arrive ici que les trajectoires les plus simples correspondent à des lois de résistance relativement compliquées. Il y aurait donc lieu de rechercher comment varient les trajectoires quand on remplace une loi de résistance par une autre qui en diffère assez peu, les termes principaux restant les mêmes, par exemple :

$$R = kv^2,$$
$$R = kv^2 + E\left(\frac{1}{v^2}\right).$$

Mais la question ainsi posée n'est pas facile non plus.

Donnons maintenant une autre propriété générale des trajectoires, pour le cas d'une orbite osculatrice elliptique. On a

$$v^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \qquad (a > 0),$$
$$v^2 < \frac{2\mu}{r} = 2\mu u \qquad \left(u = \frac{1}{r}\right)$$

ou, avec les notations déjà employées,

$$\frac{u^2 + \dot{u}^2}{u + \ddot{u}} < 2u,$$

ce qui peut s'écrire

$$\dot{u}\left[\frac{2u\dot{u} + 2\dot{u}\ddot{u}}{u^2 + \dot{u}^2} - \frac{\dot{u}}{u}\right] > 0$$

ou, en posant

$$S = u^2 + \dot{u}^2,$$
$$\dot{u} \cdot \frac{d}{d\theta} \log \frac{S}{u} > 0,$$

c'est-à-dire que $\frac{S}{u}$ varie dans le même sens que u.

On a d'ailleurs

$$ds^2 = dr^2 + r^2\,d\theta^2 = \frac{du^2 + u^2\,d\theta^2}{u^4}$$

ou

$$u^4 \frac{ds^2}{d\theta^2} = S,$$

par suite

$$\frac{S}{u} = u^3 \frac{ds^2}{d\theta^2};$$

mais, en appelant ψ l'angle de la normale et du rayon vecteur, on a

$$\frac{ds}{d\theta} = \frac{r}{\cos\psi} = \frac{1}{u\cos\psi},$$

d'où

$$\frac{S}{u} = \frac{u^3}{u^2\cos^2\psi} = \frac{1}{r\cos^2\psi}.$$

On a donc le résultat suivant : *le long de la trajectoire* $r\cos^2\psi$ *varie dans le même sens que* r. La quantité $r\cos^2\psi$ est d'ailleurs le demi-paramètre de la parabole de foyer O, tangente en M à la trajectoire. On verra facilement qu'au voisinage de M la trajectoire est intérieure à cette parabole.

6. Nous allons maintenant démontrer quelques propriétés du mouvement : 1° dans le cas d'une résistance proportionnelle à la vitesse ; 2° dans le cas d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse.

Plaçons-nous, d'abord, dans la première hypothèse, en supposant toujours que l'on reste dans le cas elliptique. Soit donc

$$R = kv.$$

L'équation (1) fournit ici une intégrale première

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = C_0\,e^{-kt}.$$

L'inégalité (5) nous donne ensuite

$$r > \frac{C_0^2}{2\mu}\,e^{-2kt},$$

d'où cette conséquence que r ne peut devenir nul qu'au bout d'un temps fini.

Grâce à l'existence de cette intégrale première, l'équation différentielle qui définit r en fonction de t est ici du second ordre :

$$(6) \qquad \frac{d^2r}{dt^2} + k\frac{dr}{dt} + \frac{\mu}{r^2} - \frac{C_0^2}{r^3}\,e^{-2kt} = 0,$$

ce qui peut aussi s'écrire

$$\frac{dr}{dt} + kr + \int_{t_0}^{t}\frac{\mu}{r^2}\left(1 - \frac{C_0^2}{\mu}\,\frac{e^{-2kt}}{r}\right)dt = \text{const.}$$

Si, sous le signe d'intégration, le second facteur n'admettait pas la limite d'indétermination zéro, c'est-à-dire s'il demeurait, pour $t > t_1$, constamment supérieur à un nombre positif fixe, ou constamment inférieur à un nombre négatif fixe, l'intégrale du premier membre serait évidemment infinie en même temps que la limite supérieure t d'intégration, car le premier facteur $\frac{\mu}{r^2}$ est supérieur à un nombre positif fixe, r étant borné. Or, cela est impossible, car r étant borné et $\frac{dr}{dt}$ admettant par suite zéro comme limite d'indétermination, l'expression $\frac{dr}{dt} + kr$ est bornée pour certaines valeurs infiniment grandes de t.

Il existe donc des valeurs de t aussi grandes qu'on le veut pour lesquelles on a

$$(1-\varepsilon)\frac{C_0^2}{\mu}e^{-2kt} < r < (1+\varepsilon)\frac{C_0^2}{\mu}e^{-2kt},$$

ε étant aussi petit que l'on veut. Une analyse un peu plus approfondie permet de démontrer que l'inégalité précédente a toujours lieu pour certaines valeurs de t comprises dans un intervalle $(t', t'+h)$ de grandeur h constante, lorsque t' est suffisamment grand. Nous renverrons pour la démonstration de ce point, dont nous n'aurons pas à faire usage par la suite, à notre article déjà cité du *Bulletin astronomique*.

Nous allons maintenant démontrer que r tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$ (ce que nous savons déjà par l'étude du cas général), et même un résultat beaucoup plus précis, à savoir que $r e^{kt}$ tend aussi vers zéro. Remarquons que, dans ce qui précède, nous nous sommes appuyés seulement sur le fait que r demeure borné, ce qui résulte de l'inégalité

$$r < 2a,$$

a étant décroissant en vertu du théorème des forces vives.

Faisons, dans l'équation (6), le changement de variable

$$e^{kt} = \tau,$$

il s'ensuit

$$\frac{dr}{dt} = k\tau\frac{dr}{d\tau},$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = k^2\tau^2\frac{d^2r}{d\tau^2} + k^2\tau\frac{dr}{d\tau}.$$

L'équation (6) devient

$$k^2\tau^2\frac{d^2r}{d\tau^2}+2k^2\tau\frac{dr}{d\tau}+\frac{\mu}{r^2}-\frac{C_0^2}{r^3}\frac{1}{\tau^2}=0.$$

Faisons ensuite le changement de fonction

$$\rho = r\tau = r\,e^{kt}.$$

Il vient

$$\frac{d^2r}{d\tau^2}=\frac{1}{\tau}\frac{d^2\rho}{d\tau^2}-\frac{2}{\tau^2}\frac{d\rho}{d\tau}+\frac{2\rho}{\tau^3},$$

$$\frac{dr}{d\tau}=\frac{1}{\tau}\frac{d\rho}{d\tau}-\frac{1}{\tau^2}\rho.$$

Notre équation différentielle devient alors

$$\tau\frac{d^2\rho}{d\tau^2}+\frac{\mu}{k^2}\frac{\tau^2}{\rho^2}-\frac{\mu p_0}{k^2}\frac{\tau}{\rho^3}=0,$$

en posant

$$p_0=\frac{C_0^2}{\mu} \qquad \text{(paramètre osculateur initial).}$$

Posons encore

$$c=\frac{\mu}{k^2}.$$

L'équation différentielle s'écrit alors

$$(7)\qquad \frac{d^2\rho}{d\tau^2}+\frac{c\tau}{\rho^2}-\frac{cp_0}{\rho^3}=0.$$

En multipliant par $\frac{2\,d\rho}{d\tau}$ elle prend la forme

$$\frac{d}{d\tau}\left[\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2+\frac{cp_0}{\rho^2}\right]=2c\tau\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\tau}.$$

Appelons, pour abréger, P, la quantité essentiellement positive

$$P=\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)^2+\frac{cp_0}{\rho^2}.$$

Notre équation devient

$$\frac{dP}{d\tau}=2c\tau\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\tau}$$

ou

$$\frac{d\frac{1}{\rho}}{d\sigma}=\frac{1}{2c\tau}\frac{dP}{d\tau}.$$

On en déduit, au moyen d'une intégration par parties,

$$(8)\qquad \frac{1}{\rho} = \frac{P}{2c\tau} + \int_1^\tau \frac{P\,d\tau}{2c\tau^2} + H,$$

H étant une constante

$$H = \frac{1}{\rho_0} - \frac{p_0}{2\rho_0^2} - \frac{1}{2c}\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)_0^2.$$

On a d'ailleurs

$$\rho_0 = r_0,$$

$$c = \frac{\mu}{k^2},$$

$$\left(\frac{d\rho}{d\tau}\right)_0 = r_0 - \frac{1}{k}\left(\frac{dr}{dt}\right)_0;$$

d'où

$$(9)\qquad H = \frac{1}{r_0} - \frac{p_0}{2r_0^2} - \frac{1}{2\mu}\left[\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 + kr_0\right]^2.$$

Si $\rho = r\,e^{kt}$ ne tend pas régulièrement vers zéro, il admet une infinité de maxima et de minima quand t tend vers l'infini ; on sait, en effet, qu'il admet zéro comme limite d'indétermination, puisque pour certaines valeurs infiniment grandes de t, r est de l'ordre de e^{-2kt}, comme nous l'avons démontré plus haut. Si l'on choisit comme instant initial, celui du premier de ces maxima, par exemple, on a

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 - kr_0 = 0,$$

$$H = \frac{1}{r_0} - \frac{p_0}{2r_0^2} > 0,$$

car $r_0 > \frac{p_0}{2}$, d'après les formules du mouvement képlérien. Comme d'après (8), on a

$$\frac{1}{\rho} > H,$$

pour $\tau > 1$ ou $t > 0$, il s'ensuit que

$$\rho < \frac{1}{H},$$

c'est-à-dire que $r\,e^{kt}$ demeure borné pour t infini. Nous avons donc une nouvelle démonstration, pour le cas particulier actuel, du fait que r tend vers zéro, avec une précision de plus sur son mode de

décroissance. On en déduit, par le raisonnement du paragraphe 3, que a tend aussi vers zéro.

On peut aller un peu plus loin et démontrer que $r\,e^{kt}$ tend vers zéro. Choisissons un instant initial où $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 < 0$, ce qui est possible puisque r décroît, au moins dans certains intervalles. L'égalité (9) donne alors

$$H > \frac{1}{r_0} - \frac{p_0}{2r_0^2} - \frac{r_0'^2}{2\mu} - \frac{k^2}{2\mu}r_0^2 = \frac{1}{2\mu}\left[\frac{2\mu}{r_0} - r_0'^2 - \frac{C_0^2}{r_0^2}\right] - \frac{k^2}{2\mu}r_0^2,$$

en posant $\left(\frac{dr}{dt}\right)_0 = r_0'$. Comme on a

$$v_0^2 = \frac{2\mu}{r_0} - \frac{\mu}{a_0} = r_0'^2 + \frac{C_0^2}{r_0^2},$$

il vient

$$\frac{1}{\rho} > H > \frac{1}{2a_0} - \frac{k^2}{2\mu}r_0^2,$$

pour tout instant postérieur à l'instant initial t_0, au moins si ce dernier appartient à un intervalle de décroissance de r; comme $\frac{1}{a_0}$ tend vers l'infini et r_0 vers zéro avec $\frac{1}{t_0}$, il s'ensuit que ρ tend vers zéro avec $\frac{1}{t}$. C. Q. F. D.

D'après l'équation (1), l'angle polaire θ est donné par la formule

$$\theta = \int_0^t \frac{C_0^2\,e^{kt}}{r^2}\,dt.$$

Comme

$$r\,e^{kt} < \frac{1}{H},$$

on a

$$\theta > C_0 H^2 \int_0^t e^{kt}\,dt.$$

L'angle polaire augmente donc indéfiniment : *le mobile tourne en spirale autour de l'origine.*

Enfin *la vitesse croît au delà de toute limite;* on a, en effet,

$$v^2 > r^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = C_0^2\,\frac{e^{-2kt}}{r^2}$$

et cette dernière expression tend bien vers l'infini puisque re^{kt} tend vers zéro. On a là une démonstration rigoureuse, pour le cas particulier actuel, du fait déjà remarqué que la présence d'un milieu résistant peut avoir pour effet d'augmenter la vitesse d'un point matériel libre (*cf.* POINCARÉ, *loc. cit.*, Chap. VI, p. 120).

Nous avons donc pu obtenir, dans un cas particulier, des renseignements assez précis sur le mouvement, et cela par l'étude des inéquations différentielles qui se déduisent des équations du mouvement. Nous ne sommes pas parvenus, toutefois, à fixer d'une manière précise le mode de croissance de r en fonction du temps. Il paraît vraisemblable que la double inégalité

$$\mathrm{A}\,e^{-kt} > r > \mathrm{B}\,e^{-2kt}$$

que nous avons établie pourrait être remplacée par

$$\mathrm{A}\,e^{-2kt} > r > \mathrm{B}\,e^{-2kt},$$

laquelle est d'ailleurs vérifiée pour certaines valeurs de t, mais nous n'avons pu démontrer qu'elle subsiste toujours.

Je signale seulement, en passant, l'étude du mouvement rectiligne régi par l'équation différentielle

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + k\frac{dr}{dt} + \frac{\mu}{r^2} = 0,$$

laquelle se ramène au premier ordre, puisque la variable indépendante n'y figure pas. On démontre aisément que si le mobile ne s'éloigne pas à l'infini, il tombe sur le centre attractif au bout d'un temps fini.

Considérons maintenant le cas d'une résistance proportionnelle au carré de la vitesse. L'équation (1) et l'inégalité (5) deviennent

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{C}_0\,e^{-ks},$$

$$r > \frac{\mathrm{C}_0^2}{2\mu}\,e^{-2ks},$$

en appelant s l'arc de trajectoire compté à partir de la position initiale. Cette dernière inégalité montre que la longueur de la trajectoire de M_0 en O est infinie. Cela suffit pour prouver, en vertu de ce que nous avons démontré au paragraphe 5 que *le mobile*

tourne en spirale autour de l'origine, comme dans le cas précédent.

Une étude plus détaillée des circonstances du mouvement paraît encore plus difficile dans ce cas que dans le précédent, et nous n'avons pas obtenu de résultats bien précis. Nous nous contenterons d'indiquer une forme intéressante de l'équation différentielle des trajectoires :

$$(10) \qquad \frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} = \frac{1}{p_0} e^{2ks},$$

s étant l'arc de trajectoire compté à partir de la position initiale du mobile et p_0 le paramètre de l'orbite osculatrice initiale. Cette équation différentielle est en réalité du troisième ordre, s représentant l'intégrale

$$\int_{\theta_0}^{\theta} (dr^2 + r^2 d\theta^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Des considérations dépourvues de rigueur m'ont fait admettre que le mobile rencontre l'origine au bout d'un temps fini (quand on reste dans le cas elliptique) ; mais je n'ai pu le démontrer d'une manière satisfaisante.

Quant à la forme de la trajectoire, je me contente d'indiquer le résultat suivant dont la démonstration se déduit de l'équation (10) et des considérations du paragraphe 5 : si $r = F(\theta)$ est l'équation de la trajectoire, $\theta F(\theta)$ admet au moins une limite d'indétermination finie et différente de zéro pour θ infini.

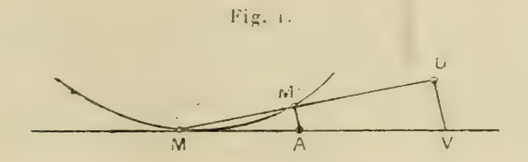
UNE DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE CORIOLIS ;

Par M. B. NIEWENGLOWSKI.

Soient M et M′ les positions d'un mobile aux époques t et $t + dt$. On sait que si l'on prend sur la tangente à la trajectoire en M

le vecteur $\overline{MA} = \bar{v}.dt$, v désignant le vecteur vitesse MV, l'accélé-

Fig. 1.

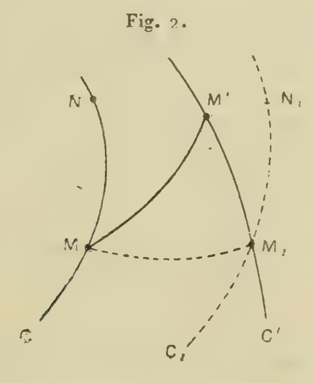


ration γ au point M est le vecteur équipollent à $\lim \frac{2\overline{AM'}}{dt}$. Donc si l'on considère la vitesse moyenne $\overline{MU} = \frac{\overline{MM'}}{dt}$, on a

$$\gamma = \lim \frac{2\overline{VU}}{dt}.$$

Cela posé, un point se meut sur la courbe C qui se déplace, sans se déformer; le mobile considéré est en M à l'époque t, il serait

Fig. 2.



en N, sur la courbe C, à l'époque $t + dt$, si la courbe C était immobile. Le point de la courbe C, coïncidant avec M à l'époque t, vient en M_1 à l'époque $t + dt$. La courbe C est venue alors occuper la position C'; on peut regarder cette position comme provenant d'une translation qui amène C ou C_1, suivie d'une rotation autour d'un axe mené par M_1. Finalement M viendra en M' de telle sorte que arc $M_1 M' =$ arc $M_1 N_1 =$ arc MN. Le point M décrit ainsi la courbe MM'. Soient v_e la vitesse du point coïncidant avec M à l'époque t, sur sa trajectoire MM_1; v_r la vitesse relative de M

sur C et v_a la vitesse dite *absolue* sur MM′. On a

$$(1) \qquad \overline{v}_a = \overline{v}_e + \overline{v}_r.$$

Posons

$$\overline{u}_a = \frac{\overline{\text{MM}'}}{dt}, \qquad \overline{u}_e = \frac{\overline{\text{MM}_1}}{dt}, \qquad \overline{u}_r = \frac{\overline{\text{MN}}}{dt} = \frac{\overline{\text{M}_1\text{N}_1}}{dt},$$

et enfin

$$w = \frac{\overline{\text{M}_1\text{M}'}}{dt}.$$

On a

$$(2) \qquad \overline{u}_a = \overline{u}_e + \overline{w} = \overline{u}_e + \overline{u}_r + (\overline{w} - \overline{u}_r),$$

donc

$$\overline{u}_a - \overline{v}_a = (\overline{u}_e - \overline{v}_e) + (\overline{u}_r - \overline{v}_r) + (\overline{w} - \overline{u}_r).$$

Multiplions par $\frac{2}{dt}$ et faisons tendre dt vers zéro. On a

$$\lim \frac{2}{dt}(\overline{u}_a - \overline{v}_a) = \gamma_a,$$

$$\lim \frac{2}{dt}(\overline{u}_e - \overline{v}_e) = \gamma_e,$$

$$\lim \frac{2}{dt}(\overline{u}_r - \overline{v}_r) = \gamma_r.$$

Quant à $2\frac{\overline{w} - \overline{u}_r}{dt}$, sa limite est la vitesse de rotation de l'extrémité du vecteur vitesse v_r autour de l'axe instantané passant par M. On obtient ainsi $2wv_r \sin(\omega, v_r)$ et par suite

$$\gamma_a = \gamma_e + \gamma_r + 2\omega v_r \sin(\omega, v_r)$$

ou

$$\gamma_a = \gamma_e + \gamma_r + \gamma_c.$$

NOTE RELATIVE A L'ATTRACTION D'UN ELLIPSOÏDE;

PAR M. JEAN MASCART.

On rencontre, dans les questions de magnétisme induit, un problème qui intéresse, plus généralement, celui de l'attraction lorsqu'il s'agit de déterminer l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point intérieur situé sur l'axe moyen : la solution n'a pas besoin d'être complète et il suffit qu'elle soit développée suivant les rapports des axes.

Soient donc R l'attraction d'un ellipsoïde homogène de densité ρ sur un point situé sur l'axe moyen à la distance r du centre ; M la masse de l'ellipsoïde ; a, b, c $(a > b > c)$ les demi-grands axes ; on a, en vertu de formules connues

$$R = \frac{3f\mu M}{b^3} r \int_0^1 \frac{\zeta^2\, d\zeta}{\sqrt{1 - \frac{b^2 - c^2}{b^2}\zeta^2}\sqrt{1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\zeta^2}},$$

en désignant par μ la masse du point attiré et par f l'attraction de deux unités de masse à l'unité de distance.

Si l'on pose

$$a = \frac{b}{\varepsilon}, \qquad c = b\eta,$$

il vient

$$M = \frac{4}{3}\pi abc\rho = \frac{4}{3}\pi\rho b^3 \frac{\eta}{\varepsilon}$$

et

$$\frac{R}{r} = 4\pi f\mu\rho\eta \int_0^1 \frac{\zeta^2\, d\zeta}{\sqrt{1 - (1 - \eta^2)\zeta^2}\sqrt{\varepsilon^2 - (1 - \varepsilon^2)\zeta^2}}.$$

Le changement de variable

$$\zeta\sqrt{1 - \eta^2} = \cos\psi \qquad \text{avec} \qquad \eta = \sin\psi'$$

donne

$$\frac{R}{r} = 4\pi f \mu \rho \frac{\eta_1}{1-\eta_1^2} \int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\psi \, d\psi}{\sqrt{\varepsilon^2(1-\eta_1^2)+(1-\varepsilon^2)\cos^2\psi}},$$

$$\frac{R}{r} = 4\pi f \mu \rho \frac{\eta_1}{1-\eta_1^2} \int_{\psi'}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\psi \, d\psi}{\sqrt{1-\varepsilon^2\eta_1^2-(1-\varepsilon^2)\sin^2\psi}},$$

et en posant

$$k^2 = \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2\eta_1^2},$$

$$\frac{R}{r} = 4\pi f \mu \rho \frac{\eta_1}{(1-\eta_1^2)\sqrt{1-\varepsilon^2\eta_1^2}} \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\psi \, d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} - \int_0^{\psi'} \frac{\cos^2\psi \, d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} \right].$$

Telle est la quantité qu'il s'agit de calculer, en particulier dans le cas où ε et η_1 sont petits, ce qui fait que k est voisin de l'unité.

Pour étudier la seconde intégrale $\int_0^{\psi'}$ il suffit de remarquer que l'on a

$$0 < \sin^2\psi < \sin^2\psi',$$

ou

$$1 < \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} < \frac{1}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi'}} \qquad \left(= \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2\eta_1^2}}{\sqrt{1-\eta_1^2}}\right),$$

ou

$$(1) \quad \int_0^{\psi'} \cos^2\psi \, d\psi < \int_0^{\psi'} \frac{\cos^2\psi \, d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} < \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2\eta_1^2}}{\sqrt{1-\eta_1^2}} \int_0^{\psi'} \cos^2\psi \, d\psi.$$

Or, on a

$$\int_0^{\psi'} \cos^2\psi \, d\psi = \frac{1}{2}\int_0^{\psi'} (1+\cos 2\psi)\, d\psi = \frac{1}{2}(\psi' + \sin\psi'\cos\psi')$$

$$= \frac{1}{2}\left[\arc\sin\eta_1 + \eta_1\sqrt{1-\eta_1^2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\eta_1 + \frac{\eta_1^3}{1.2.3} + \ldots + \eta_1\left(1 - \frac{\eta_1^2}{1.2} + \ldots\right)\right]$$

$$= \eta_1 - \frac{1}{6}\eta_1^3 - \ldots,$$

et l'inégalité (1) devient

$$\eta_1 - \frac{1}{6}\eta_1^3 + \ldots < \int_0^{\psi'} \frac{\cos^2\psi \, d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} < \eta_1 + \frac{1}{3}\eta_1^3 + \ldots,$$

et, si l'on néglige les termes du troisième ordre, on peut écrire

$$\frac{R}{r} = 4\pi f \mu\rho \frac{\eta}{1-\eta^2}\left[-\eta + \frac{1}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k^2 - k^2 \sin^2\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}}\,d\psi\right],$$

$$\frac{R}{r} = 4\pi f \mu\rho \frac{\eta}{1-\eta^2}\left[-\eta + \frac{k^2-1}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} - \frac{1}{k^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi\right].$$

Les deux intégrales qui subsistent, pour le cas où k est voisin de l'unité, ont été mises par Legendre sous la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\psi}} = \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2(1-k^2) + \left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2(1-k^2)^2 - \ldots\right]$$
$$\times L\frac{4}{\sqrt{1-k^2}} - \left[\frac{1}{4}(1-k^2) + \ldots\right],$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-k^2\sin^2\psi}\,d\psi = \left[\frac{1}{2}(1-k^2) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2(1-k^2)^2 + \ldots\right]$$
$$\times L\frac{4}{\sqrt{1-k^2}} + \left[1 - \frac{1}{4}(1-k^2) + \ldots\right],$$

d'où

$$\frac{R}{r} = 4\pi f \mu\rho \frac{\eta}{1-\eta^2}\left[-\eta + \frac{1-\varepsilon^2\eta^2}{1-\varepsilon^2}\left\{1 - \frac{\varepsilon^2(1-\eta^2)}{1-\varepsilon^2\eta^2} + \ldots\right\}\right.$$
$$+ \frac{1-\varepsilon^2\eta^2}{1-\varepsilon^2}\left\{-\frac{1}{2}\frac{\varepsilon^2(1-\eta^2)}{1-\varepsilon^2\eta^2}\right.$$
$$\left.\left. - \frac{1}{16}\frac{\varepsilon^4(1-\eta^2)^2}{(1-\varepsilon^2\eta^2)^2} + \ldots\right\} L\frac{4\sqrt{1-\varepsilon^2\eta^2}}{\varepsilon\sqrt{1-\eta^2}}\right]$$

que l'on peut écrire

$$\frac{R}{r} = 4\pi f \mu\rho\,\eta\left[1 + \eta^2 - \eta + \frac{3}{4}\varepsilon^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\eta^2 - \frac{9}{16}\varepsilon^2\right)\varepsilon^2 L\frac{4}{\varepsilon}\right]$$

en négligeant dans le crochet tous les termes du troisième ordre, ainsi que ceux de la forme

$$\varepsilon^3 L\frac{4}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \varepsilon^4\eta L\frac{4}{\varepsilon},$$

et la quantité $\varepsilon^2 L\frac{4}{\varepsilon}$ se réduisant à zéro pour $\varepsilon = 0$.

Les approximations successives de R sont alors :

1° $$\frac{R}{r} = 4\pi f \mu \rho \eta ;$$

2° $$\frac{R}{r} = 4\pi f \mu \rho \eta \left[1 - \eta - \frac{1}{2} \varepsilon^2 \, \mathrm{L} \frac{4}{\varepsilon} \right].$$

On peut encore introduire la masse M de l'ellipsoïde en remplaçant $4\pi f \mu \rho \eta$ par $\frac{3 f \mu M}{r^3} \varepsilon$.

La première approximation suffit généralement au physicien. La seconde approximation se présente d'elle-même, sans difficultés, et n'appelle comme remarque que la façon très différente dont s'introduisent, analytiquement, les rapports η et ε entre les axes de l'ellipsoïde.

Mais, si l'on veut poursuivre l'approximation, le calcul algébrique se présente de façon très pénible pour une question d'apparence aussi simple. Pour les intégrales de Legendre, et bien qu'elles ne soient pas développées suivant les puissances de k, on n'éprouve pas grande difficulté à les ordonner suivant les puissances des deux quantités du premier ordre, ε et η. Mais il en est tout autrement pour la valeur de

$$\int_0^{\psi} \frac{\cos^2 \psi \, d\psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}.$$

Si l'on cherche à intégrer par les fonctions p, ζ, σ de Weierstrass, dont les développements en série sont bien connus, les expressions des invariants g_2 et g_3 sont beaucoup trop compliquées en ε et η pour que l'on puisse espérer poursuivre; parfaite au point de vue théorique en ramenant l'intégrale à un produit infini rapidement convergent, la transformation de Landen ne donne rien non plus dès que l'on veut obtenir le développement suivant les puissances de ε et η. Si l'on en reste à une méthode terre à terre de développement en série, on peut encore assez facilement calculer jusqu'au septième ordre cette intégrale qui, bien entendu, ne dépend pas des infiniment petits d'ordre pair. Je cherche donc un développement en série pour $\frac{\cos^2 \psi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \psi}}$, fonction paire, se réduisant

à 1 pour $\psi = 0$, en posant

$$\cos^2\psi = (1 - k^2 \sin^2\psi)^{\frac{1}{2}} [1 + \alpha_2\psi^2 + \alpha_4\psi^4 + \alpha_6\psi^6 + \ldots],$$

$$\left(1 - \frac{\psi^2}{2} + \frac{\psi^4}{24} - \frac{\psi^6}{720} + \ldots\right)$$

$$= \left[1 - \frac{1}{2}k^2 \sin^2\psi - \frac{1}{2.4}k^4 \sin^4\psi - \frac{1.3}{2.4.6}k^6 \sin^6\psi - \ldots\right]$$

$$\times [1 + \alpha_2\psi^2 + \alpha_4\psi^4 + \ldots],$$

$$\left(1 - \psi^2 + \frac{\psi^4}{3} - \frac{2}{45}\psi^6\right)$$

$$= \left[1 - \frac{k^2}{2}\sin^2\psi - \frac{k^4}{8}\sin^4\psi - \frac{k^6}{16}\sin^6\psi\right] [1 + \alpha_2\psi^2 + \alpha_4\psi^4 + \alpha_6\psi^6],$$

égalité qui, en tenant compte de

$$\sin\psi = \frac{\psi}{1} - \frac{\psi^3}{6} + \frac{\psi^5}{120}, \qquad \sin^4\psi = \psi^4 - \frac{2}{3}\psi^6,$$

$$\sin^2\psi = \psi^2 - \frac{\psi^4}{3} + \frac{2}{45}\psi^6, \qquad \sin^6\psi = \psi^6.$$

peut s'écrire

$$1 - \psi^2 + \frac{1}{3}\psi^4 - \frac{2}{45}\psi^6 = \left[1 - \frac{k^2}{2}\psi^2 + \left(\frac{k^2}{6} - \frac{k^4}{8}\right)\psi^4 - \left(\frac{k^2}{45} - \frac{k^4}{12} + \frac{k^6}{16}\right)\psi^6\right]$$
$$\times (1 + \alpha_2\psi^2 + \alpha_4\psi^4 + \alpha_6\psi^6)$$

qui donne par identification

$$\alpha_2 = -\left(1 - \frac{k^2}{2}\right), \qquad \alpha_4 = \frac{1}{3} - \frac{2k^2}{3} + \frac{3k^4}{8},$$

$$\alpha_6 = -\frac{2}{45} + \frac{16}{45}k^2 - \frac{5}{8}k^4 + \frac{5}{16}k^6,$$

et si l'on intègre de 0 à ψ' la fonction $1 + \alpha_2\psi^2 + \alpha_4\psi^4 + \ldots$, on obtient

$$\psi' + \frac{\alpha_2}{3}\psi'^3 + \frac{\alpha_4}{5}\psi'^5 + \frac{\alpha_6}{7}\psi'^7;$$

or $\psi' = \arcsin\eta$ et

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \eta^2}} = 1 + \frac{\eta^2}{2} + \frac{3\eta^4}{8} + \frac{15\eta^6}{48} + \ldots,$$

et, si l'on intègre de o à η_1,

$$\psi' = \eta_1 + \frac{\eta_1^3}{6} + \frac{3\eta_1^5}{40} + \frac{5\eta_1^7}{112} + \ldots = \eta_1\left[1 + \frac{\eta_1^2}{6} + \frac{3\eta_1^4}{40} + \frac{5\eta_1^6}{112} + \ldots\right],$$

$$\psi'^2 = \eta_1^2\left[1 + \frac{\eta_1^2}{3} + \frac{8}{45}\eta_1^4\right],$$

$$\psi'^3 = \eta_1^3\left[1 + \frac{\eta_1^2}{2} + \frac{37}{120}\eta_1^4\right],$$

$$\psi'^5 = \eta_1^5\left[1 + \frac{5}{6}\eta_1^2\right],$$

$$\psi'^7 = \eta_1^7;$$

d'où, pour valeur de l'intégrale cherchée,

$$\eta_1 + \eta_1^3\left(\frac{1}{6} + \frac{\alpha_2}{3}\right) + \eta_1^5\left(\frac{3}{40} + \frac{\alpha_2}{6} + \frac{\alpha_4}{5}\right) + \eta_1^7\left(\frac{5}{112} + \frac{37\alpha_2}{360} + \frac{\alpha_4}{6} + \frac{\alpha_6}{7}\right),$$

les α_2, α_4, α_6 ayant les valeurs ci-dessus. Mais, si ε et η_1 sont des infiniment petits du premier ordre, on a, en se bornant aux termes d'ordre inférieur à 8,

$$\begin{aligned}
k^2 &= \frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon^2\eta_1^2} = (1-\varepsilon^2)(1+\varepsilon^2\eta_1^2) = 1 - \varepsilon^2 + \varepsilon^2\eta_1^2 - \varepsilon^4\eta_1^2,\\
k^4 &= 1 - 2\varepsilon^2 + \varepsilon^2(\varepsilon^2 + 2\eta_1^2) - 2\varepsilon^4\eta_1^2,\\
k^6 &= 1 - 3\varepsilon^2 + \varepsilon^2(3\varepsilon^2 + 3\eta_1^2) - 7\varepsilon^4\eta_1^2 - \varepsilon^6.
\end{aligned}$$

Si l'on veut avoir la valeur de l'intégrale au cinquième ordre, il suffit de négliger le terme en η_1^7 et de se borner aux termes du second ordre pour k^2, k^4 et k^6 :

$$k^2 = 1 - \varepsilon^2, \qquad \alpha_2 = \frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2} - 1 = -\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon^2}{2},$$

$$k^4 = 1 - 2\varepsilon^2, \qquad \alpha_4 = \frac{1}{3} - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon^2 + \frac{3}{8} - \frac{6}{8}\varepsilon^2 = \frac{1}{24} - \frac{\varepsilon^2}{12},$$

$$k^6 = 1 - 3\varepsilon^2;$$

d'où

$$\int_0^{\psi'} = \eta_1 + \eta_1^3\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{6} - \frac{\varepsilon^2}{6}\right] + \eta_1^5\left[\frac{3}{40} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right] = \eta_1 - \frac{\eta_1^3\varepsilon^2}{6},$$

et *l'intégrale cherchée ne dépend pas des termes du troisième ordre.*

L'approximation suivante n'est pas encore laborieuse, mais n'apporte aucune remarque spéciale avec la valeur

$$\eta_1 - \frac{\eta_1^3\varepsilon^2}{6} + \frac{1}{15}\eta_1^5\varepsilon^2 - \frac{1}{2^7 \cdot 3^2}\eta_1^7.$$

COMPTES RENDUS ET ANALYSES

CARTAN (E.), professeur à la Faculté des Sciences de Paris. — Leçons sur les invariants intégraux. In-8°, 1922, x-210 pages. Paris, J. Hermann, 1922.

La théorie des invariants intégraux a été fondée il y a près de 30 ans par H. Poincaré dans le Tome III des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste;* elle a fait depuis lors l'objet de travaux importants, et cependant on aurait cherché vainement jusqu'ici un exposé complet de la théorie dans aucun Traité didactique français. L'Ouvrage que vient de publier M. Cartan comble cette lacune de la façon la plus heureuse. L'auteur était particulièrement bien préparé à cette tâche. Dans ses profondes recherches sur la théorie des groupes, il avait été conduit en effet à considérer certaines formes différentielles, auxquelles il a donné le nom de *formes intégrales*, qui sont caractérisées par la propriété de pouvoir s'exprimer au moyen des seules intégrales premières d'un système différentiel et de leurs dérivées. Or cette notion de forme intégrale ne diffère pas essentiellement de celle d'invariant intégral; c'est ce rapprochement, comme le dit M. Cartan lui-même dans sa Préface, qui est à la base du livre dont nous avons à rendre compte. Cet Ouvrage est le résumé d'un cours fait à la Sorbonne dans la chaire de Mécanique céleste. On ne sera donc pas étonné de la place que tiennent les applications à la Dynamique classique, au problème des n corps, à la cinématique des milieux continus et à la théorie des tourbillons. M. Cartan revient sur ces théories avec une sorte de prédilection à la fin de plusieurs Chapitres. Mais cela n'engendre ni répétition, ni monotonie; les propriétés classiques, qui semblent les mieux connues, prennent chaque fois des aspects nouveaux, et parfois les plus inattendus. Les démonstrations sont toujours élégantes, un peu concises parfois, mais l'effort imposé au lecteur n'est jamais bien grand, et, en ne s'astreignant pas à un plan d'une inflexible rigueur, l'auteur a su conserver au livre le caractère vivant de son enseignement.

Pour donner une idée de la variété et de la richesse du contenu, je ne crois pouvoir mieux faire que d'indiquer brièvement le sujet de chaque Chapitre.

CHAPITRE I. — *Principe d'Hamilton et tenseur « quantité de mouvement énergie ».*

Après avoir reproduit la démonstration classique du principe de la moindre action d'Hamilton pour un point matériel libre soumis à l'action d'une force dérivant d'un potentiel, M. Cartan reprend la démonstration en supposant que les valeurs t_0 et t_1 du temps correspondant aux extrémités de la trajectoire sont elles-mêmes variables. Ce calcul le conduit facilement à formuler le principe sous une forme plus générale, qui est le point de départ de son Ouvrage. Appelons *état* du point matériel l'ensemble des sept quantités x, y, z, x', y', z', t qui caractérisent la position d'un point et sa vitesse à un instant donné; ces sept quantités sont, si l'on veut, les coordonnées d'un point dans un espace à sept dimensions, et toute trajectoire du mobile définit une courbe ou multiplicité à une dimension dans cet espace. On conçoit sans difficulté ce qu'il faut entendre par une suite *fermée* de trajectoires, ou tube de trajectoires. Cela posé, M. Cartan démontre le théorème fondamental suivant : si l'on considère un tube quelconque de trajectoire, et une courbe fermée quelconque faisant le tour de ce tube, l'intégrale

$$\int \omega = \int m x' \, dx + m y' \, dy + m z' \, dz - E \, dt,$$

où E représente l'énergie $\frac{1}{2} m (x'^2 + y'^2 + z'^2) - U$, est indépendante de cette courbe elle-même et ne dépend que du tube de trajectoires sur lequel elle est tracée.

En supposant $dt = 0$, on obtient un cas particulier remarquable que l'on peut énoncer ainsi : Si l'on prend sur chaque trajectoire l'état correspondant à une même valeur de t, l'intégrale

$$\int m x' \, dx + m y' \, dy + m z' \, dz,$$

étendue à la suite fermée d'états ainsi obtenue, est indépendante de t. Ce théorème est dû à H. Poincaré qui a donné le nom *d'invariant intégral relatif* à l'intégrale précédente. Le nouvel invariant

intégral obtenu par M. Cartan est évidemment beaucoup plus général que celui de H. Poincaré, puisque l'on peut prendre sur chaque trajectoire d'une suite fermée un état à volonté au lieu de prendre des états simultanés, comme le supposait H. Poincaré. Le tenseur

$$m x' dx - m y' dy + m z' dz - E\,dt,$$

qui figure sous le signe intégral dans l'invariant *complet* de M. Cartan, est appelé par lui le « tenseur quantité de mouvement-énergie ». Les trois composantes spatiales sont les trois composantes ordinaires de la quantité de mouvement, et la composante suivant le temps l'énergie.

La propriété précédente caractérise les équations différentielles du mouvement. En d'autres termes, si l'intégrale précédente est un invariant intégral relatif pour un système

$$\frac{dx}{X} = \frac{dy}{Y} = \frac{dz}{Z} = \frac{dx'}{X'} = \frac{dy'}{Y'} = \frac{dz'}{Z'} = \frac{dt}{T},$$

ce système est identique aux équations différentielles classiques du mouvement d'un point matériel.

Il n'y a pas de difficulté à étendre le résultat au mouvement des systèmes matériels, tels qu'on les considère d'habitude en Mécanique analytique. Les lettres T et H ayant la signification habituelle des traités classiques, les équations canoniques

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}$$

sont caractérisées par la propriété suivante : si l'on considère encore une suite fermée de trajectoires, et sur chaque trajectoire un état particulier, l'intégrale

$$\int \omega = \int \Sigma p_i\, dq_i - E\,dt.$$

étendue au contour fermé d'états, est un invariant intégral, dont la valeur ne dépend que de la suite fermée de trajectoires considérée. Si l'on suppose $dt = 0$, on retrouve l'invariant intégral relatif de Poincaré pour le problème général de la Dynamique. M. Cartan propose d'appeler ce nouveau principe le « principe généralisé de la quantité de mouvement et de l'énergie ».

Ce principe permet de former les équations du mouvement,

quelle que soit la manière dont on a choisi les paramètres $q_1, q_2, \ldots, q_n$, t servant à localiser le système dans l'espace et dans le temps. La variable *temps* ne joue plus un rôle spécial dans les calculs, et les lois de la Mécanique prennent une forme *indépendante du mode de repérage de l'espace-temps.* C'est sans doute le développement de cette idée qui a conduit l'auteur aux savantes recherches publiées depuis l'apparition de ce volume sur le tenseur d'Einstein et la théorie générale de la relativité.

Signalons aussi à la fin du Chapitre une application importante à la transformation des équations de la Dynamique et à la méthode de Jacobi, qui se déduit aisément de la propriété d'invariance de l'intégrale $\int \omega$.

Chapitre II. — *L'invariant intégral à deux dimensions de la Dynamique.*

L'invariant intégral relatif $\int \omega$, défini au premier Chapitre, peut être remplacé par un invariant intégral *absolu*

$$\int\int \omega' = \int\int \Sigma\, dp_i\, dq_i - dH\, dt;$$

cette intégrale double, étendue à un domaine à deux dimensions *quelconque* de l'espace des états, conserve la même valeur si l'on déplace chacun des états d'une façon arbitraire le long de sa trajectoire. M. Cartan établit directement cette propriété d'invariance : les deux intégrales $\int \omega$, $\int\int \omega'$ se déduisent d'ailleurs l'une de l'autre, par l'application de la formule de Stokes généralisée.

Si l'on ne considère encore avec H. Poincaré que des états simultanés, on retrouve l'invariant intégral à deux dimensions de la dynamique $\Sigma\, dp_i\, dq_i$.

Une application intéressante à la théorie des tourbillons montre comment les théorèmes classiques se déduisent aisément des considérations précédentes.

Chapitre III. — *Les invariants et intégraux et les formes différentielles invariantes.*

Dans le premier Chapitre, l'auteur a obtenu directement pour

un problème de Dynamique un invariant intégral où l'élément sous le signe d'intégration renferme dt. Pour étendre ce résultat à tous les systèmes d'équations différentielles, M. Cartan rappelle d'abord la définition d'un invariant intégral d'après H. Poincaré, et il montre qu'une opération très simple permet de déduire de tout invariant intégral, au sens de H. Poincaré, un nouvel invariant intégral *complet*, où figure dt sous le signe d'intégration. Ce procédé peut il est vrai se rattacher à des méthodes générales de formation indiquées par H. Poincaré lui-même, mais cette remarque ne diminue en rien le mérite de M. Cartan, dont la démonstration est presque intuitive. Des exemples simples, empruntés au mouvement d'un point dans l'espace à trois dimensions, permettent de bien se rendre compte de la nature de ces nouveaux invariants.

Le Chapitre se termine par une illustration empruntée à la théorie des milieux continus en mouvement. Si les composantes u, v, w de la vitesse sont exprimées au moyen de x, y, z, t, et si $\rho(x, y, z, t)$ est la densité au temps t au point (x, y, z), il est évident que l'intégrale triple

$$\int\int\int \rho\, dx\, dy\, dz$$

est un invariant intégral absolu, puisque cette intégrale étendue à un domaine D de l'espace (x, y, z) représente la masse de matière qui, à l'instant t, occupe ce domaine. C'est même le premier exemple d'invariant intégral absolu donné par H. Poincaré. En appliquant le procédé de formation qui lui est dû, M. Cartan déduit de l'invariant précédent un nouvel invariant complet

$$\int\int\int \rho(dx\, dy\, dz - u\, dy\, dz\, dt - v\, dz\, dx\, dt - w\, dx\, dy\, dt),$$

dont on peut regarder l'élément comme *l'élément de matière* envisagé sous son aspect cinématique complet. Si l'on considère un ensemble quelconque à trois dimensions de molécules, et si l'on prend chaque molécule de l'ensemble à un instant quelconque t de son mouvement, on obtient dans l'univers à quatre dimensions (x, y, z, t) un domaine à trois dimensions, et l'intégrale triple étendue à ce domaine est égale à la masse totale de l'ensemble des

molécules considérées. L'expression du flux de matière à travers une surface s'en déduit immédiatement.

L'étude des invariants intégraux conduit tout naturellement à étudier de plus près des propriétés des éléments de ces invariants, c'est-à-dire des formes de différentielles qui figurent sous le signe intégral. Tel est l'objet des Chapitres suivants IV-VIII.

Étant donné un système d'équations différentielles

$$(1)\qquad \frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n},$$

où la variable indépendante n'est pas spécifiée, une forme de différentielles Φ est *invariante* pour ce système si elle peut s'exprimer au moyen des $n-1$ intégrales premières distinctes y_1, y_2, ..., y_{n-1} du système (1) et de leurs différentielles. Une forme de différentielles Φ est de *classe* r si elle peut s'exprimer au moyen de r fonctions distinctes y_1, ..., y_r, et de leurs différentielles, et ne peut s'exprimer au moyen de moins de r fonctions. Une forme Φ sera invariante pour le système (1) si les r fonctions y_i sont des intégrales premières de ce système. Si la classe r est inférieure à $n-1$, il y a donc une infinité de systèmes (1) qui admettent Φ pour forme invariante. A chaque forme Φ correspond un système de Pfaff complètement intégrable dont les intégrales premières sont précisément les fonctions au moyen desquelles la forme Φ peut s'exprimer; c'est le *système caractéristique* de cette forme.

Un système d'équations de Pfaff est *invariant* pour un système d'équations différentielles (1), si les équations de ce système de Pfaff peuvent s'exprimer uniquement au moyen des intégrales premières de (1) et de leurs différentielles. Si le système de Pfaff se compose d'une seule équation, on a une *équation invariante* du système (1). Pour qu'un système de Pfaff soit invariant pour les équations (1), il faut et il suffit que ces équations admettent, comme intégrales premières, les intégrales du système caractéristique du système de Pfaff.

Les formes Φ de différentielles dont il est question ne sont pas à proprement parler de véritables formes algébriques. La règle habituelle de la multiplication algébrique doit être remplacée par la règle de la *multiplication extérieure* de Grassmann, d'après laquelle le produit de deux facteurs linéaires dx_i, dx_k doit être

changé de signe quand on permute ces deux facteurs. M. Cartan donne le nom de *formes extérieures* à ces formes de différentielles, dont il montre l'analogie avec les formes algébriques bilinéaires alternées. Le *rang* d'une forme extérieure Φ est égal au nombre minimum de formes linéaires distinctes de différentielles au moyen desquelles la forme Φ peut s'exprimer; ce rang est égal au nombre des équations distinctes d'un système de Pfaff *associé* à la forme Φ et qui s'en déduit très facilement.

L'extension de la formule de Stokes, due à H. Poincaré, conduit à associer à toute forme extérieure ω de degré p une autre forme extérieure ω' de degré $p+1$, dont les coefficients se déduisent de ceux de ω par des différentiations: cette nouvelle forme ω' est dite la *forme dérivée* de ω. Toute forme dont la dérivée est identiquement nulle est dite *différentielle exacte*. H. Poincaré a montré aussi que toute forme dérivée est une différentielle exacte et réciproquement. Ceci suppose toutefois que les coefficients des formes considérées sont des fonctions continues admettant des dérivées partielles du premier ordre. M. Cartan montre brièvement par un exemple qu'on peut dans certains cas définir une forme dérivée extérieure pour une forme ω, sans que les coefficients de ω admettent des dérivées partielles.

La considération des formes dérivées permet de donner une règle très simple pour la formation du système caractéristique défini antérieurement. On obtient le système caractéristique d'une forme ω en adjoignant au système associé à cette forme les équations du système associé à la forme dérivée ω'. En particulier, le système caractéristique d'une forme différentielle exacte est identique à son système associé, et la classe est égale au rang, mais ceci n'est plus vrai en général pour une forme quelconque. M. Cartan fait observer que les lois de conservation en Physique se traduisent souvent analytiquement en exprimant qu'une forme extérieure est une différentielle exacte.

Toutes ces propriétés des formes extérieures trouvent aussitôt leur application à la théorie des invariants intégraux. M. Cartan montre rapidement comment la connaissance d'un invariant intégral permet, dans bien des cas, d'en trouver de nouveaux par les opérations relatives aux formes extérieures qui viennent d'être définies.

Avec le Chapitre IX, nous abordons une série de nouveaux pro-

blèmes. Si l'on connaît à la fois une forme invariante ω du système (1), et une transformation infinitésimale du même système, on peut déduire de ω de nouvelles formes invariantes par l'application de deux procédés essentiellement distincts, dont l'interprétation est immédiate, et qui conduisent d'une part à une forme invariante du même degré que ω, d'autre part à une forme invariante d'un degré inférieur d'une unité. La seconde méthode est une extension du procédé déjà employé par H. Poincaré pour déduire d'un invariant intégral un autre invariant intégral d'un ordre inférieur d'une unité; pour retrouver la méthode même de H. Poincaré, il suffit de supposer que la transformation infinitésimale connue se réduit à la transformation évidente $\Sigma X_i \frac{df}{dx_i}$.

Dans le cas du mouvement *permanent* d'un milieu continu, on connaît *a priori* la transformation infinitésimale $\frac{df}{dt}$; on en déduit très aisément le théorème de Bernoulli.

Une autre application importante est relative au problème des n corps, c'est-à-dire au mouvement de n points matériels, s'attirant proportionnellement à leurs masses et en raison inverse d'une puissance de leur distance. On connaît *a priori* un certain nombre de transformations infinitésimales du système et l'invariant du second ordre de tout problème de Dynamique. M. Cartan montre comment l'application des méthodes générales qu'il vient d'exposer fournit les intégrales premières classiques.

Si l'on connaît seulement une *équation invariante* pour le système (1), et une transformation infinitésimale, on peut en déduire une forme linéaire invariante, et par suite un invariant intégral du premier ordre. Enfin, si l'on ne connaît qu'une transformation infinitésimale du système (1), on peut former un système de Pfaff invariant pour ce système.

Les deux Chapitres suivants (X et XI) sont consacrés aux systèmes de Pfaff complètement intégrables, au théorème de Frobenius, aux propriétés classiques des systèmes complets, et à la théorie du dernier multiplicateur. Les liens de cette théorie avec les propriétés des invariants intégraux d'ordre $n-1$ sont mis en évidence, et ce rapprochement permet de saisir nettement la véritable origine des propriétés du multiplicateur. D'intéressantes applications terminent le Chapitre.

L'objet du Chapitre XII est en réalité l'étude du système caractéristique d'une forme extérieure quadratique ω_2, différentielle exacte. Si cette forme est de classe $2n$, le système caractéristique s'intègre par les opérations $2n, 2n-2, \ldots, 2$. Dans le cas de la forme

$$\omega_2 = \sum_i dp_i\, dq_i - dH\, dt,$$

le système caractéristique est identique au système canonique

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \qquad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i}.$$

Tous les théorèmes classiques relatifs aux systèmes canoniques peuvent être regardés comme des cas particuliers de propriétés plus générales s'appliquant à tous les systèmes caractéristiques d'une forme extérieure quadratique, et différentielle exacte. Pour n'en citer qu'un exemple, il existe un théorème analogue au théorème de Poisson permettant de déduire de deux intégrales du système une nouvelle intégrale par des différentiations et des éliminations. M. Cartan se sert de cette extension pour rechercher la meilleure utilisation des intégrales déjà connues du système en vue d'achever l'intégration. On sait que Sophus Lie a étudié ce problème dans plusieurs Mémoires pour un système canonique; il serait sans doute intéressant de comparer les méthodes de Sophus Lie avec la méthode plus générale de M. Cartan.

Dans les deux Chapitres suivants (XIII et XIV) sont étudiés de même les systèmes caractéristiques d'une *forme de Pfaff* ω, et celui d'une *équation de Pfaff* $\omega = 0$. Deux cas sont à distinguer suivant que la classe de ω est paire ou impaire. Si ω est de classe $2n+1$, l'intégration de son système caractéristique exige l'intégration du système caractéristique de la forme dérivée ω', et une quadrature. Si ω est de classe paire $2n$, l'intégration de son système caractéristique se ramène à celle du système caractéristique de l'équation $\omega = 0$, et exige les opérations $2n-1, 2n-3, \ldots, 3, 1$. Le théorème de Poisson s'étend aussi à ces différents systèmes; et M. Cartan étudie en détail la meilleure utilisation des intégrales connues pour achever l'intégration. Les diverses méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre se rattachent aisément aux théories précédentes.

Dans les trois Chapitres suivants, nous revenons à l'application des formes invariantes à l'intégration des systèmes d'équations différentielles. Si l'on connaît n formes linéaires invariantes indépendantes $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ d'un système de n équations différentielles du premier ordre, on a n relations de la forme

$$\omega'_s = \sum_{i,k} c_{iks} [\omega_i \omega_k] \qquad (s = 1, 2, \ldots, n)$$

et l'on peut toujours, il est facile de le voir, se borner au cas où les coefficients c_{iks} sont des constantes. Ces constantes c_{iks} sont les coefficients de structure d'un groupe fini, que l'on peut définir de la manière suivante : c'est le plus grand groupe de transformations qui, appliquées aux intégrales premières du système donné, conserve les formes invariantes ω_i. M. Cartan montre, par quelques exemples simples, comment la nature de ce groupe est liée au problème de l'intégration; mais de plus grands développements auraient exigé des connaissances assez étendues sur la théorie des groupes.

Si l'on connaît r transformations infinitésimales d'un système complètement intégrable de n équations de Pfaff, on peut partager ce système de n équations en deux groupes, dont l'un de $n-r$ équations peut être un système intégrable absolument quelconque. Ce système une fois intégré, il reste à intégrer un système de r équations dont on connaît r formes linéaires invariantes. On est donc ramené au premier problème. Plusieurs exemples élémentaires permettent de bien se rendre compte de la portée de cette méthode.

Une application plus importante est relative au problème des n corps, et plus spécialement au problème des trois corps. En épuisant tout le parti que l'on peut tirer des transformations infinitésimales connues *a priori*, on arrive à préciser dans tous les cas l'ordre des systèmes à intégrer pour achever la résolution du problème.

Les deux derniers Chapitres montrent les liens étroits qui lient les invariants intégraux au calcul des variations, et à l'optique. La liaison entre les invariants intégraux et le calcul des variations est mise en évidence par la propriété suivante : les courbes extré-

males pour une intégrale $\int \omega$ sont identiques aux caractéristiques de la forme dérivée ω'. M. Cartan applique ce résultat au principe de la moindre action de Maupertuis, à la propagation de la lumière dans un milieu isotrope, et à la détermination des transformations de Malus, qui changent une congruence de normales en une congruence de même espèce.

La propagation des ondes lumineuses dans un milieu quelconque étant définie par une équation de Monge, les rayons lumineux sont identiques aux caractéristiques d'une équation de Pfaff, qui est l'équation de Pfaff invariante de l'optique. Le premier membre de cette équation de Pfaff est lié à l'équation de Monge qui définit la loi de propagation de la lumière d'une manière *indépendante du mode de repérage choisi pour l'espace et le temps*, de sorte que, même en Optique, la coordonnée temps ne joue pas un rôle essentiellement différent de celui des coordonnées spatiales.

L'Ouvrage de M. Cartan est tout l'opposé d'une compilation. On sent que l'auteur a repensé toutes les propositions, et l'on regrette parfois d'y rencontrer si peu de références à des Mémoires originaux. Je ne sais si l'on doit attribuer à un excès de modestie cette sobriété de citations, mais ce n'est que bien rarement que l'on trouve indiqués les travaux où les notions fondamentales ont été pour la première fois mises en évidence. La liste de Mémoires, de valeur très inégale, que l'on trouve à la fin du volume, ne saurait combler cette lacune.

Cet Ouvrage rendra assurément les plus grands services aux Mathématiciens, jeunes ou non, voulant s'initier à ces belles théories qui sont encore récentes et promettent d'être fécondes. Quelques-uns des Chapitres, et non des moins intéressants, ne font qu'amorcer des sujets importants, et qui n'auraient pu être traités à fond qu'en faisant appel à des notions assez étendues de la théorie des groupes. Je suis persuadé que plus d'un lecteur, arrivé à la fin de ces Chapitres, éprouvera un peu le même regret qu'un amateur de romans-feuilletons lorsque, au moment le plus pathétique de sa lecture, il rencontre les mots fatidiques « la suite à demain ». Espérons que M. Cartan nous donnera lui aussi une suite, et ne la fera pas attendre trop longtemps.

E. GOURSAT.

ÉMANAUD (MAURICE), chef des Travaux graphiques à l'École Polytechnique. — GÉOMÉTRIE PERSPECTIVE. Un volume in-18. G. Doin, Paris, 1921.

Quand on représente sur le plan un corps de l'espace, on peut chercher une figuration ou relever facilement les grandeurs qu'il faut connaître pour construire effectivement le corps. On peut aussi le représenter tel qu'on le voit dans la réalité, c'est-à-dire déformé selon les lois de la vision. Un dessin de la première sorte est dit *dessin géométral*, et on l'obtient par diverses méthodes, dont la plus importante de beaucoup est celle dite *de Monge* ou *des projections orthogonales conjuguées*. Un dessin de la seconde sorte est une *perspective*. L'ensemble de tous les procédés de représentation constitue la *Géométrie descriptive*. En France, il est assez courant de réserver cette dénomination à la méthode de Monge, sans doute parce que c'est la seule enseignée dans les lycées, alors que la perspective n'est guère abordée que par une classe restreinte d'étudiants, les élèves des grandes écoles. L'opinion la plus répandue voit ainsi dans la représentation par projections orthogonales la Descriptive tout entière. C'est naturel, mais fâcheux, parce que l'étude de la Perspective forme l'esprit à l'intuition de l'espace au moins autant que celle de la « Descriptive » au sens étroit (qui n'en est d'ailleurs qu'un cas particulier). Cela, quant à sa valeur éducative. Pratiquement, son importance n'est pas moins grande, et l'on sait quelle extension a prise de nos jours la *Métrophotographie*, qui est l'application de la perspective aux levers d'édifices et de terrains.

Le livre de M. Émanaud, qui fait partie de l'*Encyclopédie scientifique* dirigée par le Dr Toulouse, contient un très bon et très complet exposé d'une science trop négligée en dehors d'un cercle restreint.

L'auteur s'est conformé à l'habitude française de rattacher la Perspective à la méthode de Monge. On procède autrement à l'étranger, et la perspective y est généralement exposée comme mode de représentation indépendant des projections orthogonales (« freie Perspektive », disent les Allemands). Le passage d'un mode à l'autre constitue la *Perspective appliquée*. Je dirai franchement que cette conception de la Perspective me paraît nettement supérieure à la nôtre, et je suis d'autant plus à l'aise pour exprimer

cette opinion que la « Perspective indépendante » est d'origine française, étant l'invention de Cousinery dont la *Géométrie perspective* parut en 1828. Elle n'attira pas chez nous l'attention qu'elle méritait (voir cependant le bien qu'en dit Chasles dans son *Aperçu historique*), à cause peut-être d'une dévotion trop étroite à la mémoire de Monge. Le grand géomètre était mort en 1818, dix ans seulement avant l'apparition du livre de Cousinery, et nul n'aurait osé, dans la patrie de la Géométrie descriptive, chercher le salut en dehors des projections orthogonales. Sans doute, s'il avait encore vécu, le maître, moins attaché que ses élèves à la lettre de ses idées, aurait-il accueilli en Cousinery le disciple de son esprit.

A lire certains passages du livre de M. Émanaud, et particulièrement ceux qu'il consacre à la méthode de Cousinery, il semble qu'il n'est pas éloigné d'en reconnaître la supériorité, et qu'il deviendrait facilement « cousineriste », s'il ne l'est déjà. Ce n'est donc pas à lui que s'adresse mon léger reproche, c'est à une tradition que j'estime injustifiée.

Après un Chapitre substantiel sur les principes de la Géométrie projective, l'auteur expose les procédés classiques de mise en perspective en partant de la représentation géométrale, puis il passe aux constructions directes, et c'est à ce propos qu'il parle de la méthode de Cousinery. Il indique aussi des procédés intéressants d'invention plus récente : celui du lieutenant-colonel de la Fresnaye, celui de Coblyn. Il passe ensuite aux *problèmes d'ombres*.

Un Chapitre est consacré à la *Perspective cavalière* (cas particulier de la perspective conique, avec point de vue à l'infini).

Le Chapitre des *restitutions* prépare à l'étude de la Métrophotographie. La *Perspective relief* est une application intéressante de l'homologie centrale de l'espace.

Viennent ensuite les *instruments perspecteurs*, dont certains sont fort ingénieux, en particulier celui que M. de la Fresnaye a fondé sur sa méthode.

Enfin les trois derniers Chapitres sont au nombre des plus attrayants. Sur les rapports de la *Géométrie perspective et de l'art*, l'auteur expose des vues originales et pénétrantes. Dans quelle mesure l'artiste est-il tenu de se conformer aux règles de la perspective ? Quelles sont les infractions permises ou même recommandables (comme celle de représenter une sphère par un cercle,

quelle que soit sa position) ? Ce sont là des questions auxquelles on ne peut évidemment donner de réponse définitive. Le sentiment là-dessus varie suivant les époques, et il est certain qu'à la nôtre, par exemple, le respect de la perspective n'est pas en honneur.

La *Décoration théâtrale* est une des applications les plus notables de la perspective. Les principes et la technique en sont peu connus en général, et bien des lecteurs apprendront pour la première fois dans l'ouvrage de M. Émanaud ce que sont les *panneaux*, les *rues*, les *costières*, etc., et par quels artifices on arrive à concilier tant bien que mal les exigences de la vision et celles de la mise en scène.

Comme dernières applications, il faut citer les perspectives sur tableaux-plans non verticaux, sur tableaux courbes, les dioramas, les panoramas.

Le livre se termine par une Bibliographie importante.

Raoul BRICARD.

KRAÏTCHIK. — THÉORIE DES NOMBRES. Un volume, 25cm de 230 pages; Paris, Gauthier-Villars, 1922.

J'ai eu, à diverses reprises, l'occasion de faire remarquer que, contrairement à un préjugé assez répandu, il n'est pas ordinaire de trouver réunis chez une même personne un talent distingué de mathématicien et une aptitude particulière pour le calcul numérique; il s'agit, en réalité, là de deux dons parfaitement distincts, de même que ceux de la composition et de l'exécution musicales; encore un compositeur de musique sera-t-il bien plus généralement bon exécutant qu'un mathématicien habile calculateur; tels illustres analystes, ayant puissamment contribué au progrès de nos connaissances dans les parties les plus élevées de la théorie pure, n'ont jamais cessé de se montrer, dans le maniement des chiffres, d'une véritable maladresse. Ce n'est donc pas donner de l'auteur de cet ouvrage une caractéristique banale que de dire qu'il est à la fois bon mathématicien et très remarquable calculateur; il peut, suivant la locution de Jacobi, chère à Hermite,

être regardé comme un *vir arithmeticus*; il se trouvait donc voué, en quelque sorte, par prédestination, à poursuivre les études d'où est sortie cette *Théorie des nombres* qu'il m'a fait l'honneur de me demander de présenter au public.

J'ai accepté d'autant plus volontiers de le faire (bien que n'ayant point de compétence spéciale en la matière), que M. Kraïtchik, qui s'est fait connaître comme un ingénieur distingué, en même temps qu'il poussait fort loin ses études mathématiques, s'est aussi classé parmi les adeptes les plus fervents de la nomographie dont il a publié nombre de très importantes applications, particulièrement aux calculs financiers. Cela atteste la souplesse de son esprit capable de se plier à la fois à la rigide discipline de la théorie du nombre pur et à la multiple variété des procédés destinés à réduire à son maximum de simplicité l'exécution des calculs approchés, seulement requis par les besoins de la pratique courante. Les habitudes d'esprit qu'il a prises en se familiarisant avec ces procédés ne l'ont d'ailleurs peut-être pas desservi au cours de ses études de pure théorie des nombres. On verra, en effet, quel parti il a su tirer de certains procédés graphiques — voire mécaniques — dans ses recherches relatives aux propriétés des nombres entiers.

La théorie des nombres occupe une place à part dans le domaine des mathématiques, et son développement n'a pas été absolument concomitant de celui des autres parties de ce domaine, ses plus notables progrès s'étant produits, en quelque sorte, par brusques à-coups.

L'aurore de cette discipline spéciale est dominée par deux grands noms, ceux de Fermat et d'Euler.

La participation de Fermat (1601-1665) à l'éclosion de cette science ne laisse pas d'être entourée d'une sorte de mystère: ce profond mathématicien s'est borné à formuler les énoncés des théorèmes qu'il avait découverts en faisant de leur démonstration, proposée aux autres chercheurs, l'objet d'une sorte de défi. Il n'a d'ailleurs jamais fait connaître lui-même la voie par laquelle il les a obtenus, se bornant à affirmer que s'il la divulguait, on serait étonné de sa simplicité.

Émanant d'un homme tel que lui, une telle déclaration ne doit pas être regardée comme faite à la légère, et cela incite d'autant

plus à déplorer qu'il n'ait jamais révélé le secret de sa méthode, vu les efforts qui ont été dépensés depuis lors par nombre de chercheurs, dont quelques-uns des plus éminents, pour venir à bout des questions ardues qu'il a offertes à leur sagacité. Ces efforts ont, au reste, été couronnés de succès dans un grand nombre de cas et n'ont abouti jusqu'ici à infirmer qu'une seule proposition avancée par Fermat, celle-ci, au reste, sous forme dubitative (*voir* p. 3 et 21). De celles qu'il a formulées sans réserve, aucune, si l'on n'est pas encore parvenu à l'établir, n'a en tout cas été trouvée en défaut.

Parmi les vainqueurs de cette sorte de tournoi arithmétique, une place à part revient à Euler (1707-1783) dont le génie, universel en mathématiques, s'est attaché en particulier à ce sujet difficile.

L'objet de cette étude étant principalement la recherche des propriétés des nombres entiers, donc d'une suite essentiellement discontinue, échappait *a priori* aux méthodes de l'analyse infinitésimale; d'où la nécessité de créer les modes d'investigation entièrement différents qui lui fussent spécialement applicables; telle a été, en ce domaine, l'œuvre propre d'Euler.

Depuis lors, de nouveaux horizons ont été ouverts sur cette science captivante par les travaux de plusieurs grands mathématiciens, parmi lesquels je me bornerai à citer Lagrange, Legendre, Gauss, Lejeune-Dirichlet, Hermite.

Mais, bien que se rattachant encore étroitement par leur essence à l'arithmétique supérieure, ces travaux débordent le cadre primitif où les premiers pionniers de cette branche spéciale avaient borné l'objet de leurs explorations. C'est la théorie arithmétique des formes quadratiques à deux variables que cette nouvelle pléiade de chercheurs a eu surtout en vue.

Rappelons d'un mot de quelle extraordinaire fécondité s'est montrée l'idée, conçue par le génie d'Hermite, de l'introduction, en ce domaine, de variables continues, fécondité encore attestée dernièrement par les élégantes recherches poursuivies par Georges Humbert, pendant les dernières années de sa carrière trop tôt terminée.

Pour en revenir à la théorie des nombres proprement dite, il convient de noter qu'en dépit de sa prodigieuse ingéniosité, Euler n'a pu absolument affranchir ses procédés d'investigation d'une

sorte de tâtonnement ou, plus exactement, de recours à la méthode expérimentale consistant en des séries d'essais numériques propres à réaliser un véritable *criblage*. Hermite aimait à souligner ce caractère quasiment expérimental de certaines recherches d'arithmétique pure.

Il va sans dire que ce mode opératoire, véritablement fondé sur l'expérience, ne vise que la résolution de certains problèmes, non la démonstration des théorèmes, qui exige, comme dans les autres parties des mathématiques, toute la rigueur des raisonnements purement logiques.

Mais, quand il s'agit de résoudre des problèmes, il convient de noter que, même dans les cas où l'on peut donner une solution directe, l'emploi du procédé par tâtonnement, tout aussi sûr, l'emporte généralement en simplicité. (Comparer à cet égard les n°s 24 et 25 du Chapitre IV, p. 83 et 85.)

Le tâtonnement devant, d'après cela, être regardé comme inévitable en ce genre de recherche, la question qui se posait consistait à le perfectionner. L'introduction par Euler des diviseurs linéaires de formes quadratiques, dont l'usage fut étendu par Gauss, permit déjà de réaliser, à cet égard, un sensible progrès.

Il y avait néanmoins plus encore à faire : il s'agissait d'imaginer des procédés opératoires aussi sûrs, faciles et rapides que possible, permettant d'effectuer les criblages dont il vient d'être question sur des ensembles de nombres assez considérables pour décourager toutes les tentatives poursuivies par les voies ordinaires. C'est ici qu'intervient l'intéressante contribution due, en ces matières, à M. Kraïtchik lui-même.

Alors que les procédés de criblage anciens ne pouvaient guère s'appliquer pratiquement à plus d'une trentaine ou une quarantaine de valeurs possibles, celui de M. Kraïtchik permet, sans plus de dépense d'effort ni de temps, d'étendre l'opération à des ensembles comprenant plusieurs millions et même plusieurs dizaines de millions de nombres, sans que, grâce à l'emploi d'un dispositif graphique approprié, il soit nécessaire d'écrire ces nombres.

M. Kraïtchik est même allé plus loin; il a imaginé un projet de machine (*voir* p. 42) qui permettrait l'application purement auto-

matique du procédé et son extension à des ensembles pouvant comporter des milliards de valeurs à étudier.

J'ai tenu à insister sur ce qui précède pour mieux mettre en lumière la part qui, dans le travail qu'on va lire, revient plus personnellement à l'auteur; mais, en fait, dans la façon de présenter les parties plus classiques de son sujet et d'établir les démonstrations, il fait encore montre d'une incontestable originalité.

Le présent Volume, borné à ce qui constitue les éléments proprement dits de la théorie des nombres, peut être considéré comme une sorte d'introduction à cette théorie. Il est dans les intentions de M. Kraïtchik de poursuivre, dans des Volumes ultérieurs, l'exposé des développements théoriques qui s'y rattachent.

Tel qu'il est, ce premier Volume, grâce en partie à l'abondance des Tables numériques auxiliaires qu'il renferme, me semble appelé à rendre déjà de grands services à tous ceux qu'attirent les recherches variées auxquelles les nombres peuvent donner naissance.

MAURICE D'OCAGNE.

WEYL (H.). — TEMPS, ESPACE, MATIÈRE. — Traduit sur la quatrième édition allemande par G. JUVET et R. LEROY. 290 pages, 17 × 26^{cm}. Paris. A. Blanchard, 1922.

Cet Ouvrage donne un exposé tout à fait systématique de la théorie de la relativité généralisée, complétée par l'extension que l'auteur y a apportée pour *géométriser* l'électromagnétisme comme Einstein avait géométrisé la gravitation.

Une introduction philosophique, qui contient d'ailleurs nombre d'idées fort intéressantes, pourrait d'abord donner, de ce livre une idée toute contraire à ce qu'il est. En réalité, aussitôt close cette digression métaphysique, on y aborde un exposé où l'auteur a recherché au contraire, avec succès, une logique déductive rigoureuse, débarrassée de tout autre souci que la construction d'un édifice mathématique précis et complet. C'est là le caractère propre de cet Ouvrage, et il attache à son étude un intérêt tout particulier, en même temps qu'il exige d'ailleurs du lecteur des efforts très soutenus.

Le premier Chapitre étudie l'espace euclidien, son expression mathématique et son rôle en Physique.

Il expose d'abord les bases de la géométrie affine et de la géométrie métrique : La première, dont les axiomes caractérisent les opérations fondamentales de la théorie des équations linéaires, permet de réaliser des représentations *affines* d'une figure, dans lesquelles on fait correspondre, aux vecteurs et points, d'autres vecteurs et points *images* assujettis seulement aux mêmes relations d'addition et de multiplication. La seconde introduit de plus, en partant de la notion de produit scalaire, une forme quadratique fondamentale qui caractérise la métrique et permet de comparer les longueurs de segments non parallèles : une représentation affine devient une congruence si les vecteurs qui s'y correspondent deux à deux donnent les mêmes valeurs à cette forme métrique fondamentale (dont la racine carrée positive représente, *par définition*, la longueur du vecteur).

La forme quadratique fondamentale permet d'introduire les notions de transformations contragrédientes et cogrédientes, sur lesquelles est basée la définition des tenseurs; l'auteur donne celle-ci sous la forme suivante : « Une forme linéaire de plusieurs séries de variables dépendant d'un système de coordonnées est un tenseur si elle a une valeur indépendante de ce système quand on y remplace chaque série de variables contragrédientes par les composantes d'un vecteur contravariant arbitraire, et chaque série de variables cogrédientes par un vecteur covariant quelconque. »

C'est, en somme, sur la notion de tenseurs que repose tout la théorie de la relativité, laquelle vise tout simplement, en définitive, à atteindre les lois physiques fondamentales, à partir de cette seule condition qu'elles doivent *a priori* être indépendantes des systèmes de référence. Au cours de cette recherche, elle a d'ailleurs été conduite à une synthèse bien plus complète qu'elle ne l'avait d'abord attendue, puisqu'elle a fini par ne voir dans les phénomènes divers que des manifestations de la *nature* géométrique de l'Univers. C'est cette idée fondamentale qu'exprime M. Weyl en disant : « Les grandeurs géométriques et physiques sont des scalaires, des vecteurs et des tenseurs; c'est par elles que s'exprime la nature mathématique de l'espace dans lequel ces grandeurs existent. Ces calculs symétriques ont leur application en Physique

aussi bien qu'en Géométrie, car les phénomènes naturels se déroulent dans un espace métrique ; le calcul tensoriel est l'instrument naturel pour l'expression des lois auxquelles ces phénomènes sont soumis. »

Toute la fin du Chapitre est consacrée à l'Algèbre et à l'Analyse tensorielle, avec leur application, à titre d'exemple, à l'étude du champ électromagnétique stationnaire.

Le Chapitre II est une étude abstraite de la géométrie du continuum métrique. Riemann y apparaît comme un précurseur de génie : il avait pressenti les applications physiques des conceptions géométriques nouvelles — si abstraites en apparence — par lesquelles il a préparé la voie si brillamment suivie par Einstein.

Dans la géométrie infinitésimale d'un continu riemannien à n dimensions, un vecteur ou un tenseur ne sont plus définis qu'en chaque point déterminé. Dans l'infiniment petit, les formules de transformation y étant *linéarisées*, on peut appliquer l'algèbre tensorielle. La multiplicité est à *connexion affine*, si l'on sait en quel vecteur se transforme un vecteur quelconque, donné en P, par un *déplacement parallèle* de P au point infiniment voisin P′; et elle est *euclidiennement affine* si le résultat est indépendant du chemin suivi entre P et P′. Les multiplicités à envisager dans la théorie sont censées admettre en chaque point une détermination métrique; c'est-à-dire que les éléments linéaires de directions diverses construits en ce point peuvent se comparer quant à leur longueur : celle-ci est définie par la forme quadratique fondamentale, supposée donnée en chaque point. M. Weyl observe que cette forme ne se trouve définie qu'à un facteur près, dont le choix *étalonne* la multiplicité en P : c'est d'ailleurs cette observation qui fournira le point de départ de l'extension apportée par lui à la théorie d'Einstein.

Un dernier paragraphe assez étendu cherche à éclairer la notion de métrique de l'espace. De même que la connexion affine est liée à la notion de déplacement parallèle, la métrique est essentiellement liée au groupe des rotations.

Le Chapitre III traite de la relativité de l'espace et du temps. Du principe de relativité de Galilée, le théorème de relativité de Lorentz pour les champs électromagnétiques variables conduit au principe de relativité d'Einstein.

Après avoir passé en revue la géométrie, la cinématique, et

l'optique, qui en résultent, puis l'électrodynamique des corps en mouvement, et la mécanique avec les conséquences connues relatives à la masse et à l'énergie, l'auteur expose la théorie de Mie, qui prétend ramener la connaissance de toutes les lois physiques, à celle d'une seule fonction d'Univers, définissant son *action* totale.

Le Chapitre IV est consacré à la théorie générale de la relativité. Il comporte d'abord toute la théorie de la gravitation d'Einstein, jusques et y compris ses prolongements relatifs aux dimensions de l'Univers. M. Weyl développe ensuite la théorie qu'il y a ajoutée, et qui lie le champ électromagnétique aux variations de l'étalonnage, comme le champ de gravitation est lié à la non-conservation de la direction. Il définit de la sorte le parallélisme des deux points de vue : « Nous sommes ainsi parvenus à un point supérieur d'où l'on saisit tout l'ensemble d'une manière vraiment synthétique. La théorie de la gravitation d'Einstein reconnaît dans l'égalité de la masse inerte et de la masse pesante une *nécessité* et non pas une conséquence des lois de la nature; la théorie que nous venons de développer reconnaît que la structure des équations de Maxwell et les théorèmes de conservation sont *nécessaires*, et qu'on ne doit pas chercher leur origine dans les phénomènes. »

L'étude de cet Ouvrage s'impose à tous ceux qui désirent juger la théorie de la relativité autrement que sur les argumentations vagues des discussions vulgarisées, où les prétentions philosophiques dispensent du gros effort nécessaire pour connaître d'abord ce dont on parle. L'essentiel de la théorie est une synthèse d'ordre logique qui ne se peut préciser qu'en faisant appel aux notions mathématiques les plus abstraites. Sauf quelques envolées lyriques, où l'auteur se laisse deux ou trois fois entraîner par l'ardeur de sa conviction (au risque de mettre à tort le lecteur en défiance), l'ouvrage se réduit à un exposé purement logique, peut-être un peu touffu parfois, bien éloigné de l'inadmissible prétention de transformer en roman des raisonnements fort ardus, et qui ne dissimule pas l'effort exigé des lecteurs. J. VILLEY.

BAKER (H.-F.). — Principles of Geometry. Volume I. Foundations. Un volume in-8°, XII-182 pages. Cambridge, University Press 1922.

Ce premier Volume a pour but de développer les théories logiques qui servent de base à la Géométrie, sans rien emprunter à l'expérience (sauf, bien entendu, que c'est l'expérience qui a suggéré ces théories; sauf aussi que l'Ouvrage s'accompagne de figures où les points, droites, etc. sont représentés à la façon ordinaire, mais qui ne sont que des schémas où il n'y a nullement besoin de supposer que ces points, droites, etc. soient ce qu'on entend vulgairement par ces mots).

L'auteur n'a pas cherché à développer toutes les géométries possibles logiquement, mais seulement la géométrie ordinaire, non forcément euclidienne toutefois. Il ne présente pas, dès le début, toutes les notions et postulats qui sont à la base de cette géométrie; mais seulement les plus indispensables. Les autres seront présentés au fur et à mesure des besoins. On remarquera que la notion de longueur ou de mesure d'un segment n'intervient absolument pas dans tout le Volume.

Le Chapitre I débute par les *propositions d'incidence*. Ce sont les premières lois auxquelles obéissent les objets appelés *points*, *droites*, *plans*, à savoir :

Par un point passent une infinité de droites. Par deux points passe une droite et une seule. Toute droite contient une infinité de points. Par toute droite passent une infinité de plans.... Deux droites d'un plan ont toujours un point commun. Deux plans ont toujours une droite commune. On remarquera ces deux derniers énoncés.

Les propositions d'incidence suffisent à établir le théorème de Desargues : *Si deux triades de points* ABC, A'B'C' *sont telles que* AA', BB', CC' *sont concourantes, alors les points d'intersection de* BC, B'C' *de* CA, C'A' *et de* AB, A'B' *sont alignés; et réciproquement.*

Dans ce qui précède, on a considéré trois dimensions. Si l'on se borne à deux, c'est-à-dire si l'on ne garde des propositions d'incidence que celles qui sont relatives à des points et à des droites situés dans un même plan, et si l'on n'énonce le théorème de Desargues que dans le cas où les six points A, B, C, A', B', C' sont

dans un même plan, il est remarquable alors que ce théorème ne peut pas se déduire des propositions d'incidence. C'est un exemple de l'avantage qu'il y a, pour démontrer des théorèmes à n dimensions, à considérer des espaces à plus de n dimensions. Ainsi se trouve justifiée l'introduction, qui sera faite plus loin, des espaces à plus de trois dimensions.

On définit maintenant la *division harmonique*. Soient trois points alignés A, B, C. Soit R un point non sur la droite ABC. On joint RA et RB. Dans le plan RABC, on mène par C une droite qui coupe RA en Q et RB en P. On joint AP et BQ qui se coupent en U. On joint RU qui coupe ABC en D. On démontre que D est indépendant de R et de la droite CP. Ce point D ainsi défini par A, B, C, se nommera *conjugué harmonique* de C par rapport à A et B. Remarquons que dans cette définition de la division harmonique la notion de longueur ne joue aucun rôle. Il en sera de même, comme nous l'avons déjà dit, dans tout l'Ouvrage.

On arrive maintenant à la notion de *points en relation* (c'est la relation homographique, je ne sais pourquoi l'auteur n'emploie pas ce mot). Deux rangées de points sur deux droites ABC, ..., A′B′C′, ... sont dites *en relation* lorsqu'elles peuvent se déduire l'une de l'autre par une perspective (AA′, BB′, CC′, ... étant concourants), ou par une suite de perspectives. On démontre d'ailleurs que si deux rangées de points sont en relation par un nombre quelconque de perspectives intermédiaires, elles peuvent être mises en relation par deux perspectives au plus.

Voici maintenant une construction importante, définissant un point d'une droite sur laquelle on en connaît cinq. Soient sur une droite D deux couples de points A, B et O, U et un point E. Dans un plan quelconque passant par cette droite on mène, par A, B, O, U respectivement quatre droites a, b, o, u; telles que la droite qui joint le point d'intersection de a, u au point d'intervention de b, o passe par E. Alors la droite qui joint le point d'intersection de a, o à celui de b, u, coupe D en un point P. On démontre que P est indépendant du choix des droites a, b, o, u, par conséquent P est déterminé par A, B; O, U et E.

Dans la construction précédente, échangeons O et U. Nous obtiendrons, au lieu de P, un point P′. Les propositions d'incidence, seuls postulats admis jusqu'à maintenant, ne permettent

pas de démontrer que P′ est le même point que P, ce qui est le cas dans la géométrie ordinaire (où les trois couples AB, OU, EP forment ce qu'on appelle *une involution*). Donc, les propositions d'incidence donnent une géométrie plus générale que la géométrie ordinaire. Pour trouver cette dernière, il faut ajouter quelque chose aux propriétés d'incidence, par exemple justement le postulat que, dans la construction précédente, P et P′ coïncident.

On peut évidemment remplacer ce postulat par d'autres, par exemple par le suivant que l'auteur appelle *théorème de Pappus*.

Si sur deux droites dans un même plan on prend trois points L, M, N *sur l'une et trois points* L′M′N′ *sur l'autre, alors le point d'intersection de* MN′ *et* M′N, *celui de* NL′ *et* N′L, *celui de* LM′ *et* L′M *sont alignés.*

Quel que soit le postulat choisi, il paraît un peu arbitraire. Il sera supprimé dans le Chapitre II ou plutôt, remplacé par d'autres de nature tout à fait différente. En attendant, on peut lui donner une forme plus simple par l'introduction de symboles. Les symboles dont il est fait usage sont de deux espèces : les symboles-éléments qui représentent des points, et les symboles algébriques. Le calcul de ces symboles est défini de façon à traduire les propositions d'incidence. On voit alors que le théorème de Pappus est équivalent à ce postulat que : *la multiplication des symboles algébriques est commutative.* D'ailleurs l'usage des symboles n'est nullement nécessaire, et tous les résultats subséquents peuvent s'obtenir sans en faire usage.

La géométrie développée dans le Chapitre I est appelée par l'auteur géométrie *abstraite.* Le Chapitre II est consacré à celle qu'il appelle *réelle*, qui est un cas particulier de la précédente, et qui s'obtient en y introduisant des notions et postulats nouveaux. D'abord la notion de *point entre deux autres.* Étant donnés sur une droite deux points A et B, il existe toujours sur cette droite un point C qu'on dira être *entre* A et B. Si l'on suppose C entre A et B et C′ entre A et C ou entre B et C, alors C′ est entre A et B. Réciproquement, tout point entre A et B est entre A et C, ou entre C et B, à moins qu'il ne soit C lui-même. Il résulte de ce qui précède qu'entre deux points A et B, il y a sur la droite AB une infinité de points et que ces points sont placés dans un certain ordre. Ils forment, avec A et B, le *segment* AB.

Soient trois points A, B, D non alignés. Soit F un point du segment BD et soit G un point du segment AF. On admet qu'il y a un point H du segment AB, tel que C soit sur le segment DH. On peut alors arriver à la notion de la division d'un plan en deux régions par une droite; d'un espace à trois dimensions par un plan, etc.

Mais l'admission des notions précédentes, conjointement avec celle de la coupure dont il sera parlé plus loin nous forcerait à admettre qu'il y a des droites d'un même plan qui ne se rencontrent pas. Cela est contraire à ce que nous avons admis dans la géométrie abstraite. Pour parer à cet inconvénient il suffit de regarder, dès maintenant, un point comme toujours donné par deux droites; et, quand deux droites ne se rencontrent pas de dire tout de même qu'elles définissent un point, mais un point *inaccessible*. Un point ainsi défini par deux droites, qu'il soit accessible ou non, s'appellera un point *postulé*. Alors il faut donner des règles permettant d'effectuer les constructions où intervient un point postulé, par exemple de joindre deux points postulés, de reconnaître si deux points postulés coïncident, etc. C'est facile.

Il faut remarquer que la géométrie à laquelle on arrive ainsi n'est pas la géométrie euclidienne, parce que rien n'empêche qu'il y ait sur une droite plus d'un point inaccessible. Par suite, d'un point on peut mener plus d'une droite qui ne rencontre une droite donnée qu'en un point inaccessible.

L'introduction des points inaccessibles force à modifier les notions de segment et d'ordre, données plus haut. Soient une droite D et un point extérieur O; à tout point A de la droite D correspond une droite OA et réciproquement. Si l'on considère deux telles droites OA et OB, il y a deux façons de faire tourner OA autour de O pour l'amener sur OB, donc il doit y avoir deux façons de déplacer A sur D de façon à l'amener en B, celle dans laquelle le point mobile passe par les points que nous avons appelés plus haut intérieurs au segment AB et celle dans laquelle il passe par les points extérieurs. Mais dans la seconde façon la droite mobile, à certains moments, coupe D en des points inaccessibles. Alors les deux points A, B définissent deux segments AB qui n'ont en commun que les points A, B. Le sens de l'expression : *point entre deux autres* se trouve, par suite, étendu. L'auteur en vient ensuite à la définition d'un point sur une droite

par une coupure. Soit sur une droite un segment AB. Supposons qu'on ait une règle permettant de classer tous les points de ce segment en deux catégories, les points α et les points β, de façon que n'importe quel point α soit entre A et n'importe quel point β. On admet alors qu'il y a un point C tel que tout point entre A et C soit un point α, et que tout point entre C et B soit un point β.

Moyennant ce postulat, on peut *démontrer* le théorème de Pappus.

Pour terminer le Chapitre II, l'auteur, revenant sur la notation symbolique exposée au Chapitre I, montre que les symboles algébriques dont on fait usage ont, en géométrie réelle, les mêmes propriétés que les nombres réels ordinaires.

Dans le Chapitre III, l'auteur revient à la géométrie abstraite. Il n'y fait pas usage de postulats nouveaux. Il généralise la relation entre rangées de points ou faisceaux de rayons par une relation générale entre les points d'un plan ou de l'espace (relation homographique).

Enfin il introduit la notion d'éléments imaginaires, de façon que certains problèmes, par exemple celui de trouver les points doubles d'une relation sur une droite, aient toujours des solutions.

Considérons sur une droite une triade de points A, B, C. Une autre triade A'B'C' sera dite équivalente à la première, lorsque les trois rangées de quatre points A'ABC, B'BAC et C'CAB seront en relation. L'ensemble de toutes les triades équivalentes entre elles forme une *série ponctuelle*. Or si l'on suppose que dans l'une de ces triades les trois points coïncident en un seul A, toutes les autres triades de la série sont aussi confondues au point A. Ainsi, une série ponctuelle peut être considérée comme une généralisation d'un point. On définit d'une manière analogue des généralisations de la droite et du plan. Ce sont ces généralisations qui jouent le rôle des imaginaires de l'algèbre. Le sujet, d'ailleurs, n'est pas traité complètement, certaines démonstrations et développements étant réservés à un prochain Volume.

Un Appendice donne l'historique et la bibliographie. Il en résulte que Pappus, Képler, Desargues, Descartes, Cayley, Von Staudt, Riemann, Poncelet, Clifford, Pasch, Segre, Klein, Wiener, Peano sont les noms principaux à citer parmi ceux des penseurs dont l'effort séculaire a rendu possible la publication d'un livre tel que celui dont nous nous occupons.

L'analyse précédente suffit, j'espère, à montrer tout l'intérêt qui doit s'attacher à l'Ouvrage de M. Baker. Pour bien en comprendre l'esprit, il faut se rappeler que lorsqu'il sera complet, il ne constituera pas seulement une étude sur les fondements de la géométrie. Une telle étude avait déjà été faite, en particulier par M. Hilbert; il en résultait la possibilité d'un Ouvrage, développant ces principes et constituant un Traité de Géométrie. Il restait, ce qui n'était pas facile, à réaliser cette possibilité et c'est ce que fera M. Baker, avec le plus grand succès, semble-t-il, d'après ce premier Volume.

On serait peut-être tenté de formuler quelques critiques de détail relatives, par exemple, à l'ordre dans lequel se suivent les sujets traités, mais je ne les formulerai pas, parce que peut-être changerais-je d'avis si j'essayais d'en trouver un meilleur.

Ainsi ce livre est certainement très intéressant. Quant à en faire usage pour l'enseignement ordinaire, à des étudiants se préparant à devenir ingénieurs ou physiciens, il me paraît douteux, malgré l'avis de l'auteur que cela puisse réussir. Une telle façon de procéder, impeccable au point de vue logique, répugnerait cependant à la plupart des esprits pour ce qu'elle a de trop abstrait. De plus, si l'on veut appliquer la Géométrie ainsi constituée au moindre problème pratique, et c'est ce qu'auront à faire les ingénieurs et les physiciens, il faudra tout de même en revenir aux conceptions ordinaires.

Il ne résulte pas de là, d'ailleurs, qu'on ne puisse rien tirer de l'Ouvrage de M. Baker pour l'enseignement, tout au moins dans les classes supérieures. On pourrait, à son exemple, bien préciser les postulats, tous les postulats, mais y compris celui de longueur dont on ne peut, je crois, se passer avec des élèves ordinaires. Il y aurait aussi peut-être avantage à traiter la théorie des parallèles indépendamment de toute idée de mesure, indépendamment par conséquent de la théorie des perpendiculaires.

Ainsi l'Ouvrage de M. Baker n'aura pas d'intérêt que pour les seuls mathématiciens, il en aura aussi pour les professeurs. En tout cas il leur servira en les faisant réfléchir, une fois de plus, aux fondements de la science qu'ils enseignent. E. CAHEN.

MÉLANGES.

RÉDUCTION DES SYSTÈMES ALGÉBRIQUES DE POINTS APPARTENANT A UNE MÊME COURBE ALGÉBRIQUE. THÉORÈME D'ABEL.

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

Introduction.

1. Sylvester a énoncé la proposition suivante :

Supposons que, parmi les $p(m+n)$ *points communs à deux courbes algébriques* C_p *et* C_{m+n} *de degré respectif* p *et* $m+n$, $p \leqq m+n$, *on puisse extraire* pm *points formant l'intersection de* C_p *et d'une courbe algébrique* C_m : *il en résulte que les* pn *points restants constituent l'intersection de* C_p *et d'une certaine courbe algébrique de degré* n.

Si la courbe C_p n'a pas de point singulier, rien à ajouter. Si la courbe C_p a des points singuliers, mais si C_{m+n} ne passe par aucun d'eux, la proposition reste exacte, et dans ce cas C_m ni C_n ne passent par aucun point singulier de C_p. Dans le cas où C_{m+n} contient un ou plusieurs points singuliers de C_p, la proposition peut être en défaut.

Si p était supérieur à $m+n$, on a considéré pm points communs à C_p, C_m, C_{m+n}, donc C_m et C_{m+n} ont en commun plus de $m(m+n)$ points et dans ce cas la proposition de Sylvester revient à dire que C_{m+n} se décompose nécessairement en la courbe C_m et une autre courbe C_n.

La démonstration de cette proposition, telle qu'elle est exposée dans certains Ouvrages classiques, celui de Salmon en particulier, présente des lacunes. Une démonstration, correcte et complète, figure dans les Leçons de Clebsch ou l'Ouvrage de MM. Picard et Simart (début du Tome II), comme prélude à la géométrie des systèmes de points sur les courbes algébriques. M. Lebesgue a reproduit la démonstration de Salmon dans un récent Mémoire

sur les *Polygones de Poncelet* [1]; pour compléter ce raisonnement dont je lui ai signalé l'insuffisance, il a, dans une Note complémentaire [2], donné une adaptation plus élémentaire des démonstrations de Clebsch ou MM. Picard et Simart signalées plus haut; il montre que l'on peut, connaissant les premiers membres C_p, C_m, C_{m+n} des équations des trois courbes en jeu, calculer les polynomes C_{m+n-p} et C_n de façon à réaliser l'identité de Noether

$$(1) \qquad C_{m+n} = C_p C_{m+n-p} + C_m C_n$$

qui démontre aussitôt la proposition. Je renvoie aux deux Mémoires de M. Lebesgue; je signale que le genre de raisonnement employé est indépendant de la valeur particulière de l'entier p et que M. Lebesgue se borne à supposer $p = 3$, simplement pour abréviation.

2. Si nous nous bornons à l'étude des cubiques effectivement de genre 1, c'est-à-dire sans point de rebroussement ni point double, le grand intérêt de la proposition de Sylvester est d'offrir une propriété géométrique dispensant dans un enseignement élémentaire de recourir au théorème d'Abel ou aux propriétés des fonctions elliptiques.

Un corollaire immédiat de la proposition de Sylvester est le suivant : deux groupes de points G et G′ de C_p étant dits *résiduels* l'un de l'autre si le groupe G + G′ forme l'intersection complète de C_p et d'une certaine courbe algébrique C, deux groupes G et Γ étant dits *corésiduels* s'il existe *un* groupe auxiliaire G′ résiduel soit de G, soit de Γ, *tout* résiduel de G est aussi résiduel de Γ.

3. Dans le travail que je présente, je démontrerai le résultat suivant : les $3m$ points d'intersection d'une courbe algébrique C_m *quelconque* avec la cubique C_3 peuvent être obtenus par l'intermédiaire d'un certain nombre p de droites $D_1, D_2, \ldots, D_p$ que j'appellerai *positives* et d'un certain nombre q de droites $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_q$ que j'appellerai *négatives* : le système des $3q$ points, déterminés sur C_3 par les droites négatives, réuni au système des $3m$ points

(1) *Annales de Toulouse*, 1922.

(2) *Annales de Toulouse*, 1923.

communs à C_3 et C_m, reproduit précisément l'ensemble des $3p$ points communs à C_3 et aux p droites positives. On a évidemment

$$p - q = m.$$

En reprenant une méthode due à Darboux, j'obtiens le théorème d'Abel pour les trois points d'intersection de C_3 avec une droite, autrement dit la formule d'addition des fonctions elliptiques; le théorème d'Abel s'étend immédiatement au système des points communs à C_3 et C_n, grâce au système des droites positives et négatives dont j'ai prouvé l'existence.

Je montrerai ensuite que les points d'intersection d'une courbe algébrique C_n de degré quelconque avec une courbe algébrique C_m de degré supérieur ou égal à $(m - 1)$ peuvent toujours être obtenus en coupant C_n par une série de courbes algébriques positives ou négatives, au même sens que plus haut, dont le degré est au plus $m - 2$.

Cela me permettra, par une extension de la méthode de Darboux, de démontrer le théorème d'Abel aussi pour les quartiques de genre 3.

Au cours de la rédaction de ce travail, M. Lebesgue m'a donné quelques conseils dont je lui exprime ici ma reconnaissance.

CHAPITRE I.

Réduction des systèmes algébriques de points découpés sur une cubique par une courbe C_m.

1. Je démontre d'abord la proposition suivante : *toutes les courbes C_m passant par $3m - 1$ points donnés de C_3 passent par un même point complémentaire de C_3*. Autrement dit, *parmi les divers résiduels de $3m - 1$ points donnés, il y en a un et un seul qui se réduit à un point unique.*

Il est évident que l'on peut toujours, quel que soit m, faire passer une courbe C_m par les $3m - 1$ points donnés; pour $m = 1$ ou $m = 2$, il y a une seule courbe C_m et le théorème, bien qu'encore exact, n'a plus de raison d'être si on le prend sous la première des deux formes. Si m 3, on obtient, pour déterminer les coefficients

de l'équation ponctuelle de C_m, $3m-1$ équations linéaires et homogènes à $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ inconnues, admettant donc une solution générale contenant au moins

$$\rho = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - (3m-1)$$

paramètres homogènes. Or l'équation

$$(1) \qquad C_3 C_{m-3} = 0,$$

où C_{m-3} est un polynome entier quelconque de degré $m-3$ est une solution particulière contenant un nombre de paramètres homogènes égal à

$$\rho' = \frac{(m-2)(m-1)}{2}.$$

On a

$$\rho - \rho' = 1.$$

Il existe donc des C_m qui n'admettent pas C_3 comme morceau de décomposition et qui contiennent les $(3m-1)$ points; il en existe même une infinité, car si C_m est l'une d'elles, l'équation

$$(2) \qquad C_3 C_{m-3} + \lambda C_m = 0$$

représente une infinité de C_m répondant encore à la question. La fin de la démonstration montrera même que c'est bien l'équation générale, mais peu importe pour l'instant. Traçons deux courbes C_m, C'_m contenant les $(3m-1)$ points donnés: elles coupent C_3 en un point complémentaire, A pour la première, A′ pour la seconde: A et A′ sont corésiduels; menons par A une droite *arbitraire* coupant C_3 en deux points P, Q; le système P, Q est résiduel de A, donc aussi de A′; P, Q, A′ sont en ligne droite, donc A et A′ coïncident. C. Q. F. D.

C'_m contenant tous les points communs à C_3 et C_m, l'équation de C'_m, d'après les principes rappelés dans l'introduction, est bien de la forme (2).

(La démonstration, si C_3 est unicursale, suppose que le point double α n'est pas compris parmi les $3m-1$ points et alors le résiduel A est lui-même distinct de α.)

Ce $3m^{\text{ième}}$ point déterminé ainsi, sans ambiguïté ni indétermi-

nation, par la connaissance des $3m-1$ premiers, nous l'appellerons *mono-résiduel* de ces $(3m-1)$ points de façon à bien signaler l'importance de ce résiduel particulier dans l'ensemble des résiduels de nos $(3m-1)$ points.

2. Coupons donc une courbe C_3 par une courbe C_m; nous obtenons des points d'intersection

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \ldots, \quad \omega_p \qquad (p = 3m).$$

Si C_3 est unicursale, on évite les courbes C_m qui passent par le point double; si un point est multiple dans l'intersection, la lettre ω correspondante est répétée plusieurs fois dans la suite ω_1, ω_2, ..., ω_p. Pour traduire ce fait que les ω constituent l'intersection complète de C_3 et C_m, je pourrai adopter l'écriture symbolique

$$(3) \qquad \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_p = 0,$$

et je désignerai par (C_m) l'ensemble de ces ω. On peut évidemment ajouter deux égalités symboliques de cette espèce car l'intersection de C_3 avec la courbe $C_m + C_{m'}$ s'obtient en totalisant (C_m) et $(C_{m'})$.

D'autre part, si dans la somme

$$\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{p'} + \omega_{p'+1} + \ldots + \omega_p$$

supposée nulle, $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{p'})$ constituent l'intersection complète de C_3 avec une certaine courbe algébrique, le théorème de la résiduation de Sylvester nous apprend que le système $(\omega_{p'+1}, \ldots \omega_p)$ forme lui-même l'intersection de C_3 avec une autre courbe algébrique, de sorte que nos égalités symboliques possèdent quelques propriétés des égalités ordinaires : on peut ajouter deux égalités symboliques; on peut, dans une égalité symbolique, supprimer une somme partielle, si elle est symboliquement nulle.

Cela posé, coupons C_3 par C_m, d'où

$$(4) \qquad \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{3m-4} + \omega_{3m-3} + \omega_{3m-2} + \omega_{3m-1} + \omega_{3m} = 0.$$

Nous avons appris à déterminer par une courbe C_{m-1} le mono-résiduel de $(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{3m-4})$, soit Ω_1 de sorte que

$$(5) \qquad \omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{3m-4} + \Omega_1 = 0.$$

Par Ω_1 menons une droite *arbitraire* C_1, elle donne deux points Ω_2, Ω_3 avec

$$(6) \qquad \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 0.$$

Formons la combinaison (4) + (6) — (5), légitime d'après ce qui précède : il reste

$$(7) \qquad \omega_{3m-3} + \omega_{3m-2} + \omega_{3m-1} + \omega_{3m} + \Omega_2 + \Omega_3 = 0$$

ce qui prouve que les six points intervenant dans l'égalité (7) sont sur une conique C_2 et nous avons donc obtenu

$$(8) \qquad (C_m) = (C_{m-1}) + (C_2) - (C_1).$$

Si donc on démontre que *tout* groupe (C_2) (C_3) ... (C_{n-1}) est susceptible d'être obtenu par une somme algébrique de groupes de trois points en ligne droite, il en sera de même de *tout* groupe (C_m). Il suffit donc de faire la démonstration pour un groupe (C_2) quelconque. Soit donc une conique C_2 donnant six points ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, ω_5, ω_6. Les droites $C_1\,(\omega_1, \omega_2)$, $C'_1\,(\omega_3, \omega_4)$ et $C''_1\,(\omega_5, \omega_6)$ donnent lieu aux équations

$$(9) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \omega_1 + \omega_2 + \Omega_1 = 0, \\ \omega_3 + \omega_4 + \Omega_2 = 0, \\ \omega_5 + \omega_6 + \Omega_3 = 0; \end{array} \right.$$

en ajoutant membre à membre ces égalités on en déduit

$$(10) \qquad \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 0,$$

de sorte que les trois points $\Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$ sont sur une droite C'''_1 et l'on a

$$(11) \qquad (C_2) = (C_1) + (C'_1) + (C''_1) - (C'''_1).$$

Si l'on adopte ce mode de réduction par récurrence, la formule (8) montre que (C_m) fera intervenir *cinq* droites de plus que (C_{m-2}), dont *trois* positivement et *deux* négativement. Nous allons voir que l'on peut opérer autrement de façon à obtenir un nombre plus restreint de droites.

En passant remarquons que si C_3 est unicursale et si C_m ne contient pas le point double, les mono-résiduels successivement

déterminés sont toujours distincts du point double, donc les diverses courbes successives remplissent toutes les conditions nécessaires pour l'application de notre théorie.

3. Essayons d'obtenir un nombre moindre de droites. Supposons qu'il s'agisse d'abord d'une courbe de degré pair, soit C_{2m}. Nous déterminons trois mono-résiduels par les égalités

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 + \ldots\ldots + \omega_{3m-1} + \Omega_1 &= 0 \qquad (C_m)\\ \omega_{6m} + \omega_{6m-1} + \ldots\ldots + \omega_{3m+2} + \Omega_2 &= 0 \qquad (C'_m)\\ \omega_{3m} + \omega_{3m+1} + \Omega_3 &= 0 \qquad (C_1)\end{aligned}\right.$$

qui entraînent

$$(13)\qquad \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 0 \qquad (C'_1)$$

de sorte que les trois mono-résiduels Ω_1, Ω_2, Ω_3 sont sur une même droite C'_1 et nous avons

$$(14)\qquad (C_{2m}) = (C_m) + (C'_m) + (C_1) - (C'_1).$$

Pour une courbe C_{2m+1} de degré impair, on aura de même

$$(12')\quad \left\{\begin{aligned} \omega_1 + \omega_2 + \ldots\ldots + \omega_{3m+2} + \Omega_1 &= 0 \qquad (C_{m+1})\\ \omega_{6m+3} + \omega_{6m+2} + \ldots\ldots + \omega_{3m+5} + \Omega_2 &= 0 \qquad (C_m)\\ \omega_{3m+3} + \omega_{3m+4} + \Omega_3 &= 0 \qquad (C_1)\end{aligned}\right.$$

$$(13')\qquad \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3 = 0 \qquad (C'_1)$$

$$(14')\qquad (C_{2m+1}) = (C_{m+1}) + (C_m) + (C_1) - (C'_1).$$

Or on sait réduire (C_2) par la formule (11) qui donne quatre droites, dont trois positives et une négative; un système (C_1) est tout réduit, car on n'a que la droite C_1 elle-même. Si donc on démontre jusqu'à un certain rang que (C_{p+1}) fait intervenir trois droites de plus (deux positivement, une négativement) que (C_p), les formules (14) et (14′) montrent que cette loi subsiste indéfiniment; en effet dans (C_{2m+1}) comparé à (C_{2m}), on a remplacé un système (C_m) par un système (C_{m+1}) sans changer l'espèce des autres; même remarque pour passer d'un (C_{2m-1}) à un (C_{2m}).

Il en résulte donc que (C_m) fait intervenir un total de $3m-2$ droites, dont $2m-1$ positivement et $m-1$ négativement.

Dans le procédé primitivement indiqué, la réduction d'un système (C_2) était la même, mais à chaque échelon successif il y avait cinq droites supplémentaires, au lieu de trois. La méthode actuelle permet d'ailleurs de faire la réduction de bien des façons : la structure des relations (12) montre que l'on peut obtenir la réduction (14) de

$$C_{6m}^{3m-1}\,C_{3m-1}^{2}$$

manières diverses, en employant cette fois les symboles de l'analyse combinatoire; il serait facile de suivre ensuite les décompositions successives pour obtenir, par multiplication, le nombre total des réductions diverses à un système de $6\,m - 2$ droites pour cet ensemble de points (C_{2m}). Mêmes remarques pour (C_{2m+1}). Nous verrons un peu plus bas que certains systèmes *convenablement choisis* (C_m) peuvent être obtenus par moins de $(3\,m - 2)$ droites; le raisonnement employé donnera comme assez vraisemblable que la réduction du système (C_m) *le plus général* ne peut s'effectuer par moins de $3\,m - 2$ droites.

CHAPITRE II.

Théorème d'Abel pour les cubiques.

1. Rappelons une propriété élémentaire d'algèbre : un polynome $F(x)$ entier en x, de degré m, dépendant ou non de paramètres arbitraires, donne lieu, si les racines $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont distinctes, aux relations

$$(1)\qquad \sum_i \frac{1}{F'(x_i)} = 0, \qquad \sum_i \frac{x_i}{F'(x_i)} = 0, \qquad \ldots, \qquad \sum_i \frac{x_i^{m-2}}{F'(x_i)} = 0.$$

2. Soit une courbe C_m quelconque de degré m, supposons que Oy ne soit pas direction asymptotique; l'équation de C_m est

$$(2)\qquad f(x, y) \equiv y^m - y^{m-1}\varphi_1(x) - \ldots - y^{m-p}\varphi_p(x) - \ldots - \varphi_m(x) = 0,$$

où chaque φ est un polynome entier en x de degré au plus égal à son indice. Je coupe C_m par une courbe P_h que, par abréviation,

je qualifierai *parabolique*

$$(P_h) \qquad y = p_0 + p_1 x + \ldots + p_h x^h,$$

h est un entier $\geqq 0$ et p_h n'est pas nul. Pour $h = 1$, on a une droite. L'équation aux x d'intersection est, sans réduction possible, de degré mh si $h \geqq 2$, car $y^{m-p}\varphi_p(x)$ donne un terme de degré maximum

$$(m-p)h + p = mh - p(h-1).$$

Ce degré, quand $h > 1$, n'égale mp que pour $p = 0$; si $h = 1$, il y a plusieurs termes de degré mp, mais comme on suppose la droite P_1 *variable*, on peut supposer l'équation aux x de degré mp, même pour $h = 1$. Posons

$$(3) \qquad F(x, p_0, p_1, \ldots, p_h) = f(x, p_0 + p_1 x + \ldots + p_h x^h).$$

Soit F'_x la dérivée $\frac{\partial F}{\partial x}$

$$(4) \qquad \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}(p_1 + 2p_2 x + \ldots + hp_h x^{h-1}).$$

Les mh racines de $F(x, p)$ sont des fonctions des lettres p donnant lieu à la relation

$$(5) \qquad \left\{ \begin{array}{c} F'(x_i)\,dx_i + \dfrac{\partial f}{\partial y_i}(dp_0 + x_i\,dp_1 + \ldots + x_i^h\,dp_h) = 0 \\ (i = 1, 2, \ldots, mh) \end{array} \right.$$

ou encore

$$(6) \qquad \frac{dx_i}{\dfrac{\partial f}{\partial y_i}} + \frac{dp_0 + x_i\,dp_1 + \ldots + x_i^h\,dp_h}{F'(x_i)} = 0.$$

En vertu des relations (1), on a

$$(7) \qquad \sum_i \frac{dx_i}{\dfrac{\partial f}{\partial y_i}} = 0.$$

En multipliant (6) par $x_i^k\,y_i^{m-3-k-k'}$ où k et k' sont des

entiers $\geqq 0$, tels que $k + k' \leqq m - 3$, on aura de même

$$(7') \qquad \sum_i \frac{x_i^k y_i^{m-3-k-k'} \, dx_i}{\dfrac{\partial f}{\partial y_i}} = 0,$$

En effet, au numérateur de la fraction en $F'(x_i)$, on a, après la multiplication indiquée, un terme en x_i de degré au plus

$$(m - 3 - k)h + k - h \leqq mh - 2,$$

car cette inégalité revient à

$$k + 2 \leqq h(k + 2) \qquad \text{ou} \qquad 1 \leqq h.$$

Les égalités (7) *et* (7′) *constituent le théorème d'Abel, si le genre de* C_m *est égal au maximum possible*, c'est-à-dire $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$; mais nous n'avons démontré ce théorème qu'en l'appliquant au cas très spécial où la courbe sécante variable est une courbe parabolique. Si le genre de C_m est inférieur à $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$, les équations (7), (7′) comprennent d'abord celles que fournit le théorème d'Abel, puis quelques relations complémentaires, la démonstration n'étant encore faite que pour une courbe sécante parabolique.

Mais si m est égal à 3, nous allons pouvoir, en appliquant les résultats du Chapitre précédent, démontrer le théorème d'Abel sans restriction, l'étendant au système de points où la cubique C_3 est rencontrée par une courbe sécante quelconque.

Je dois, en hommage à la mémoire de Darboux, signaler que le raisonnement employé dans ce paragraphe est une simple généralisation du procédé que Darboux a employé pour étudier les surfaces de translation de Sophus Lie (*Théorie des Surfaces*, t. I, seconde édition).

3. Considérons maintenant les intégrales curvilignes prises le long de C_m

$$I_{k,k'} = \int \frac{x^k y^{m-3-k-k'} \, dx}{\dfrac{\partial f}{\partial y}} \qquad (k,\ k' \geqq 0;\ k + k' \leqq m - 3).$$

La somme des valeurs prises par $I_{k,k'}$, quand k et k' sont fixes et que l'on prend pour limite supérieure les divers points

$$(x_1, y_1) \ldots (x_{mh}, y_{mh})$$

communs à C_m et P_h est constante, quand p_0, p_1, ..., p_h varient arbitrairement, on suppose les limites inférieures fixes.

Si $h = 1$, on a comme courbe sécante une droite mobile; le théorème d'Abel est donc démontré pour une droite, quel que soit le genre de la courbe. Si la courbe C_m est une cubique C_3, nous obtenons l'égalité unique

$$(8) \qquad \frac{dx_1}{\frac{\partial f}{\partial y_1}} + \frac{dx_2}{\frac{\partial f}{\partial y_2}} + \frac{dx_3}{\frac{\partial f}{\partial y_3}} = 0$$

qui donne le théorème d'addition des fonctions elliptiques.

Dans le cas d'une cubique de genre 1, appelons ω l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

comptée sur la courbe depuis une origine fixe jusqu'à un point (x, y) arbitraire : la somme $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ relative aux trois points d'intersection de la courbe avec une droite arbitraire est une constante K, indépendante des deux paramètres qui fixent la position de la droite; grâce au procédé de réduction employé, la somme $\omega_1 + \omega_2 + \ldots + \omega_{3m}$ relative aux $3\,m$ points communs à la cubique C_3 et à une courbe C_m *arbitraire*, mais de degré fixe m, est évidemment égale à $m\,K$; car cette somme peut se calculer en considérant les p droites positives D_1, D_2, ..., D_p qui donnent chacune K, donc $p\,K$ au total, puis retranchant les intégrales relatives aux points surabondants où C_3 est coupée par les droites négatives Δ_1, ..., Δ_q; on a finalement $p\,K - q\,K$, c'est-à-dire $m\,K$.

Si nous choisissons, pour limite inférieure commune des intégrales, l'un des points d'inflexion, on a $K = 0$, comme on le voit en opérant sur une droite infiniment voisine de la tangente au point d'inflexion choisi. On retrouve donc l'égalité symbolique employée plus haut et l'on en voit l'origine géométrique.

4. Remarquons que dans l'ordre d'idées de Nœther et Sylvester, suivi aussi par M. Lebesgue dans le second Mémoire cité, la réduction du système de points communs à C_3 et C_m revient à obtenir l'identité

$$(9)\qquad D_1 D_2 \ldots D_p = C_3 C_{p-3} + C_m \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_{p-m},$$

où les inconnues sont les coefficients entrant dans les équations des droites D, Δ et de la courbe C_{p-3}. On peut prendre les polynomes D et Δ de la forme $y - ax - b$, sauf un que l'on prendra de la forme $cy - ax - b$; le polynome C_{p-3} contient $\frac{(p-2)(p-1)}{2}$ coefficients arbitraires; le nombre total d'inconnues est donc

$$(10)\qquad I = 2p + 2(p-m) + 1 + \frac{(p-2)(p-1)}{2} = \frac{p^2+5p}{2} + 2 - 2m.$$

Le nombre d'équations d'identification est

$$(11)\qquad E = \frac{(p+1)(p+2)}{2} = \frac{p^2+3p}{2} + 1,$$

d'où l'on déduit

$$(12)\qquad I - E = p + 1 - 2m.$$

Donc pour $p < 2m - 1$, les équations sont plus nombreuses que les inconnues : bien que ce dénombrement ne soit pas péremptoire, nous pouvons regarder comme assez *vraisemblable* qu'une courbe C_m ne pourra être remplacée, au point de vue de ses points communs avec la cubique C_3, par un système de droites, positives et négatives, de nombre total inférieur à $3m - 2$, que si cette courbe C_m n'est pas *quelconque*.

Pour $p = 2m - 1$, on a juste autant d'équations que d'inconnues; or la méthode de réduction adoptée en dernier lieu a précisément donné ce nombre de droites positives, d'où $m - 1$ droites négatives et le total de $3m - 2$ droites [1]. A vrai dire, nous n'avons pas démontré que la méthode employée est la seule qui puisse donner $3m - 2$ droites au total; mais cette coïncidence renforce

---

[1] La méthode a même donné un nombre *fini* de réductions diverses à $3m - 2$ droites et l'on a indiqué le moyen de calculer ce nombre.

la vraisemblance de cette affirmation que le nombre minimum de droites est bien $3m-2$ pour une C_m *quelconque*. En tout cas, pour $m=2$, toute conique non décomposable donne bien comme minimum le nombre 4 résultant du dénombrement.

D'autre part, il est bien clair que l'on peut augmenter *ad libitum* le nombre de droites total à partir d'une réduction déjà connue : il suffit d'ajouter arbitrairement un même groupe de droites simultanément au groupe positif et au groupe négatif.

Il est évident que certaines courbes C_m *spéciales vis-à-vis de la cubique* C_3, mais non spéciales au point de vue absolu, peuvent donner des réductions où le nombre total des droites est inférieur à $3m-2$. Par exemple, prenons arbitrairement h ($h \geqq 3$) droites $d_1, d_2, \ldots, d_h$ et une courbe C_{h-3} ; le polynome

$$(13) \qquad d_1 d_2 \ldots d_h - C_3 C_{h-3}$$

n'admettra, en général, aucun facteur linéaire en x, y. En l'égalant à zéro, on trouve donc une courbe spéciale de degré h donnant lieu à une réduction composée de h droites seulement, toutes positives. Si le polynome (13) admet plusieurs facteurs linéaires en nombre k, supprimons-les : on obtient une courbe de degré $h-k$ admettant une réduction de $h+k$ droites : d_1, d_2, ..., d_h sont les h droites positives, et les k facteurs linéaires les droites négatives; pour avoir une courbe spéciale il suffit donc que l'on ait

$$h+k < 3(h-k)-2$$

ou simplement

$$2k < h-1.$$

Pour $2k \geqq h-1$, nous rentrons dans le cas général.

Voici quelques procédés simples pour obtenir des courbes spéciales : d'abord celles qui correspondent à une série de droites toutes positives, sans droite négative; le premier membre de l'équation d'une telle courbe est de la forme (11) où nous laissons indéterminés les polynomes $d_1, d_2, \ldots, d_h$ et C_{h-3}.

Prenons maintenant, dans un second procédé, un nombre arbitraire q de droites, donnant $3q$ points sur C_3. Considérons ces droites comme négatives; menons par chacun des $3q$ points une droite arbitraire qui sera la droite positive issue de ce point; ces $3q$ droites donnent $6q$ nouveaux points qui, d'après la théorie

de la résiduation de Sylvester, sont sur une courbe de degré $2q$ et par suite sur une infinité de courbes C_{2q}. Une telle courbe C_{2q} donne lieu, par cette construction même, à $3q$ droites positives et q droites négatives. Le procédé indiqué aux paragraphes précédents conduit pour une courbe de degré $2q$ à $4q-1$ droites positives et $2q-1$ droites négatives; nous avons donc bien obtenu une courbe spéciale.

Remarquons maintenant que, C_h et C_k étant deux courbes spéciales, il en est de même pour toutes les courbes d'équation

$$(14)\qquad C_3 C_{h+k-3} + C_h C_k = 0,$$

où C_{h+k-3} est un polynome arbitraire de degré $h+k-3$. Ainsi, si l'on essaie d'appliquer cette remarque aux deux procédés précédents, on s'aperçoit qu'on est conduit à ajouter un même groupe de droites aux deux groupes positifs et négatifs fournis par une première courbe, spéciale ou non; on retrouve ainsi une remarque antérieure. La méthode est donc intéressante surtout si C_h et C_k ne donnent ni l'une ni l'autre une réduction composée de droites toutes positives. Il suffit même que l'une des deux courbes C_h, C_k soit spéciale pour que le procédé fournisse une nouvelle courbe spéciale.

5. Soit maintenant une courbe *fixe* de degré supérieur à 3, C_m, que nous coupons par une courbe *variable* C_n [1]. On peut chercher si, *quelle que soit la courbe variable* C_n, les mn points communs à C_m et C_n peuvent être obtenus par différence entre un groupe de mp points communs à C_m et p droites positives $D_1, D_2, \ldots, D_p$ et un groupe de $m(p-n)$ points communs à C_m et $(p-n)$ droites négatives $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{p-n}$ La réponse paraît négative, de sorte que la propriété en question semble caractériser les cubiques. Cela revient à essayer de résoudre l'identité

$$(15)\qquad D_1 D_2 \ldots D_p = C_m C_{p-m} - C_n \Delta_1 \Delta_2 \ldots \Delta_{p-n},$$

où C_m, C_n sont données et où les inconnues sont les polynomes D et Δ du premier degré et le polynome C_{p-m} de degré $p-m$. Il

---

[1] On suppose toujours que C_n ne contient aucun des points singuliers de C_m.

est nécessaire que p soit à la fois au moins égal à n et à m. On a un nombre d'inconnues

$$I = 2p - 2(p-n) - 1 - \frac{(p-m+1)(p-m+2)}{2},$$

et un nombre d'équations d'identification

$$E = \frac{(p-1)(p-2)}{2}.$$

On a aisément

$$I - E = \frac{m^2 - m(2p+3) + 8p - 4n + 2}{2}.$$

Pour $m = 3$, nous avons déjà étudié la question; pour $m = 4$, le résultat est indépendant de p et se réduit à $3 - 2n$, quantité toujours négative, car le cas $n = 1$ donnerait pour C_n une droite et n'a aucun intérêt; donc pour $m = 4$, le nombre des inconnues est inférieur à celui des équations. Pour $m \geq 5$, remarquons que m, n étant fixes, $I - E$ décroît si p croît; p doit être au moins égal à m, comme nous l'avons remarqué; or, pour $p = m$, la quantité $2(I - E)$ se réduit à

$$-m(m-5) - 4n + 2,$$

quantité évidemment négative; donc, pour $m > 4$, quelle que soit la valeur de p, le nombre des équations surpasse toujours celui des inconnues. Ce dénombrement, bien que non péremptoire, rend assez vraisemblable l'impossibilité de la réduction demandée, pour $m > 3$ et C_n *quelconque*.

Comme précédemment, on acquiert la notion de courbes C_n *spéciales vis-à-vis de* C_m, c'est-à-dire telles que les mn points d'intersection puissent s'obtenir par une série de droites positives et négatives. Le procédé géométrique employé plus haut réussit pour donner de telles courbes spéciales. Pour de telles courbes, le théorème d'Abel se trouve établi par le raisonnement déjà employé.

Il va être intéressant de prouver que le système des points communs à la courbe fixe C_m et une courbe arbitraire C_n peut être obtenu par une série de courbes positives et une série de courbes négatives associées à C_m, courbes dont le degré est au plus $m - 2$; cette propriété doit être considérée comme la vraie généralisation de celle qui a été démontrée pour les cubiques.

CHAPITRE III.

Réduction des systèmes algébriques des points découpés sur une courbe C_m fixe par une courbe C_n arbitraire. Théorème d'Abel pour les quartiques.

1. Soit C_m une courbe algébrique fixe dont nous étudions les points d'intersection avec diverses courbes algébriques C_n [1] de degré arbitraire. Les points communs à C_m et à C_n peuvent s'obtenir comme différence entre le total des points découpés sur C_m par un premier lot de courbes algébriques $C, C', \ldots, C^{(p)}$ de degré au plus égal à $m-2$ et le total relatif à un second lot Γ, $\Gamma', \ldots, \Gamma^{(q)}$ de même définition. Je dirai encore que les courbes C sont positives et les courbes Γ négatives. La somme des degrés des courbes C surpasse de n unités la somme relative aux Γ'.

Si n est un nombre entier égal ou inférieur à $m-2$, c'est immédiat : C_n sera la seule courbe positive et il n'y a pas de courbe négative.

Si n est égal à $m-1$, il y a $m(m-1)$ points d'intersection que nous partageons en trois groupes que j'appellerai $\omega, \omega', \omega''$; ω et ω' contiennent chacun $\frac{(m-2)(m+1)}{2}$ points et ω'' se compose de deux points. Le groupe ω détermine une courbe C_{m-2} (accidentellement plusieurs, mais peu importe) qui découpe sur C_m un groupe Ω de $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points complémentaires. On obtient de même avec ω' une courbe C'_{m-2} et un groupe Ω'. Enfin, les deux points ω'' déterminent une droite C_1 qui coupe C_m en $(m-2)$ points formant le groupe Ω''. En vertu des égalités symboliques

$$(1)\qquad \omega - \Omega = 0, \qquad \omega' + \Omega' = 0, \qquad \omega'' - \Omega'' = 0;$$

$$(2)\qquad \omega + \omega' + \omega'' = 0.$$

on a aussi

$$(3)\qquad \Omega + \Omega' - \Omega'' = 0.$$

[1] Pour éviter toute difficulté dans l'application du théorème de la résiduation, on supposera que C_n ne contient aucun point singulier de C_m ; il sera même commode de supposer que C_m n'admet aucune singularité ponctuelle.

Les points Ω, Ω', Ω'' sont en nombre total $m(m-2)$, donc ils sont sur une courbe C''_{m-2} et je puis écrire

$$(4) \qquad (C_{m-1}) = (C_{m-2}) + (C'_{m-2}) + (C_1) - (C''_{n-2}),$$

ce qui démontre la propriété pour toute courbe de degré $m-1$.

La démonstration précédente s'étend presque textuellement à une courbe C_{n+1} où n est supérieur ou égal à $m-1$; je partage en effet les $m(n+1)$ points d'intersection de C_m et C_{n+1} en un groupe ω de $mn - \frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points, un groupe ω' de $\frac{(m-2)(m+1)}{2}$ points et enfin un groupe ω'' de deux points. Si n est égal à $m-1$, le groupe ω définit *une* courbe C_{m-1} et par suite *un* groupe complémentaire Ω de $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points; accidentellement ω pourrait définir un système linéaire de courbes C_{m-1}, on en choisirait une au hasard; si n surpasse $m-1$, le groupe ω définit un système linéaire de C_n qui percent, en général, toutes C_m en un même groupe de $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points complémentaires, que j'appelle Ω. Si le système linéaire de C_n déterminait sur C_m une série linéaire de groupes de points, il suffirait de prendre pour Ω un de ces groupes. Quant à ω' et ω'', je les traite comme plus haut : nous pouvons donc écrire encore les égalités symboliques (1), (2), (3) d'où nous déduisons

$$(5) \qquad (C_{n+1}) = (C_n) - (C'_{m-2}) + (C_1) - (C''_{m-2}).$$

Donc de proche en proche, on ramènera un système (C_n) à une somme algébrique de systèmes découpés sur C_m par des courbes algébriques de degré $m-2$ au plus. La méthode suivie ici, parce que commode pour l'exposition, n'introduit que des courbes de degré $m-2$ et des droites.

Mais on pourrait employer bien d'autres méthodes; soit par exemple une C_5 fixe; la réduction des points découpés par une C_4 ou par une C'_5 différente a été expliquée; si l'on coupe C_5 par une C_6, les 30 points communs seront partagés en quatre groupes de 9, 9, 9, et 3 points respectivement et l'on a, pour courbes et

points complémentaires, ce qu'indique le Tableau

9	9	9	3	
6	6	6	7	C'_5
C_3	C'_3	C''_3	C_2	

et l'égalité de réduction

$$(C_6) = (C_3) - (C'_3) + (C''_3) + (C_2) - (C'_5),$$

et il suffit de réduire ensuite (C'_5). Le premier procédé n'eût fait intervenir que des cubiques et des droites : ici on trouve une conique, des cubiques et des droites.

On aurait démontré par le même procédé que tout système (C_n) découpé sur une C_m donnée peut encore être obtenu par une série de courbes positives et négatives de degré $(m-1)$ au plus; par exemple le système (C_6) de 30 points découpé sur C_5 pourrait être décomposé ainsi que l'indique le Tableau

14	14	2	
6	6	3	C_3
C_4	C'_4	C_1	

avec l'égalité symbolique

$$(C_6) = (C_4) + (C'_4) + (C_1) - (C_3),$$

et ceci permet ensuite de ne garder que des courbes de degré $(m-2)$ au plus, en réduisant chaque système (C_{m-1}).

Ce second procédé résulte de la remarque suivante : prenons sur une C_m donnée un groupe ω contenant $\frac{(m-2)(m+1)}{2}$ points; on détermine une courbe C_{m-2} contenant ω (accidentellement plusieurs courbes, mais peu importe) et découpant sur C_m un groupe complémentaire de $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points Ω; les points Ω sont moins nombreux que les points ω, il y a $(m-2)$ points de moins. Si donc on considère le système (C_n), on obtient par division

$$mn = \frac{(m-2)(m+1)}{2}k + r$$

et l'on divise les mn points (C_n) en k groupes de $\frac{(m-2)(m+1)}{2}$ points et un dernier groupe de r points; celui-ci peut servir à déterminer une courbe de degré inférieur à $m-2$ découpant sur C_m ρ points complémentaires. Les points des $(k+1)$ groupes complémentaires sont en nombre total

$$\frac{(m-2)(m-1)}{2}k+\rho,$$

nombre inférieur à mn, comme on le voit par une discussion arithmétique que je n'indique pas; les k premiers groupes donnent un déficit $k(m-2)$ au total; si ρ est lui-même inférieur à r, c'est évident; si ρ surpasse r, on constate que l'excès $\rho-r$ est inférieur à $k(m-2)$; l'ensemble des points complémentaires est donc sur une courbe Cn_1 de degré inférieur à n et l'on a eu la réduction

$$(C_n)=(C^{(1)}_{m-2})+(C^{(2)}_{m-2})+\ldots+(C^{(k)}_{m-2})+(C_{m-\rho})-(C_{n_1}),$$

et il n'y a plus qu'à recommencer sur (Cn_1).

De même si l'on remarque que $\frac{(m-1)(m+2)}{2}$ points choisis sur C_m déterminent une C_{m-1} et $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points complémentaires, on voit que les points complémentaires sont moins nombreux que les points initiaux et la différence est $2(m-1)$, donc le procédé permet d'obtenir une réduction par courbes de degré $m-1$ au plus.

Ce procédé appliqué à un système (C_3) sur une C_5 donne immédiatement 5 cubiques positives et une C_6 négative; ou bien appliqué à un système (C_{14}) sur une C_5, on a immédiatement 5 quartiques positives et une C_6 négative et l'on achève ensuite la réduction suivant les diverses méthodes expliquées.

2. Dans le paragraphe précédent, si C_m a des points singuliers, nous supposons que C_n n'y passe pas; quand un groupe de $\frac{(m-2)(m+1)}{2}$ points ou $m(n-1)-\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points ou de 2 points est choisi, nous obtenons des points complémentaires qui ne dépendent plus de notre arbitraire et qui par suite

pourraient contenir un ou plusieurs points singuliers, si m est supérieur à 3. Donc pour éviter toute difficulté, nous devons garder simplement le cas où C_m ne possède aucun point singulier, si m surpasse 3.

Le fait intéressant, c'est que la propriété géométrique développée ici donne le théorème d'Abel encore pour les quartiques de genre 3. En effet tout système (C_n) tracé sur une telle C_4 est une somme algébrique de systèmes (C_1) et (C_2). Or le théorème d'Abel est démontré, d'après Darboux, pour un système (C_1) quelconque; si l'on remarque qu'une transformation homographique ne change pas la forme des intégrales dites *de première espèce*, on effectuera une perspective renvoyant à l'infini une tangente de C_2, de façon à la transformer en parabole : mais alors la démonstration de Darboux donne encore le théorème d'Abel pour cette parabole et par suite pour la conique primitive.

Le raisonnement que nous venons de faire ne suppose pas que le système (C_1) ou (C_2) soit tracé sur une C_4 plutôt que sur une C_m, où m est un entier quelconque. Les constructions géométriques, expliquées en fin du Chapitre précédent, permettent d'associer à une courbe C_m donnée des courbes C_n de plus en plus compliquées, telles que le système (C_n) découpé sur C_m, soit somme algébrique de systèmes (C_1) et (C_2); donc le théorème d'Abel se trouve encore démontré pour les points communs à C_m et une telle courbe variable C_n que nous avons dénommée spéciale vis-à-vis de C_m.

3. La propriété, pour une courbe C_m donnée, que tout système (C_n), tracé sur C_m par une courbe C_n *quelconque*, puisse être converti en somme algébrique de systèmes (C_1) et (C_2), semble une propriété caractéristique des quartiques.

De même si le système découpé sur une courbe C donnée par une courbe C_n *quelconque* peut être obtenu comme somme algébrique de systèmes découpés par des courbes de degré μ au plus, il semble bien que la courbe C doive être de degré au plus $\mu + 2$.

Ces énoncés, joints à celui relatif aux C_3 déjà donné, me paraissent assez curieux de forme pour pouvoir les présenter au lecteur avant d'en avoir rigoureusement reconnu l'exactitude. Le dénombrement fait pour $\mu = 1$, au Chapitre II, paragraphe 5,

n'est pas péremptoire; il ne servirait à rien de recommencer un dénombrement analogue pour $\mu < 1$. Il vaut mieux songer à une propriété géométrique, de caractère moins élémentaire que celles utilisées jusqu'ici : la séparation entre les courbes de degré 1, 2, ..., $m-3$ d'une part et les courbes de degré $m-2$, $m-1$, m, ... de l'autre n'est pas factice, tout au moins si l'on envisage les groupes de points qu'elles déterminent sur une C_m donnée : les premières découpent sur C_m des séries *spéciales*, les autres des séries *non spéciales*. En effectuant une somme algébrique de groupes de points (C_1), (C_2), ..., (C_{m-3}), on conçoit bien que l'on ne puisse obtenir le système algébrique de points le plus général sur C_m et qu'il faille y ajouter un ou plusieurs systèmes (C_{m-2}) pour obtenir ce système général. Ces indications pourraient sans doute conduire à une démonstration rigoureuse; elles pourraient aussi donner une limite du nombre de courbes positives et négatives strictement suffisantes pour effectuer la réduction étudiée ici.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DE DONDER (TH.). — PREMIERS COMPLÉMENTS DE LA GRAVIFIQUE EINSTEINIENNE. Un fascicule gr. in-4° de 38 pages. Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1922. Prix : 5 fr.

Ces compléments, s'ajoutant au bel Ouvrage de M. De Donder déjà analysé, le présent article s'ajoute de même à celui publié, dans ce *Bulletin*, au mois de juin dernier et dont les notations sont conservées.

Six questions différentes ont été reprises et prolongées par l'éminent mathématicien et physicien belge.

La première a trait au champ électromagnétique pur. Quitte à nous expliquer après coup, disons tout de suite que la fonction caractéristique Λ est désormais définie par l'égalité

$$(1) \qquad \Lambda\sqrt{-g} = \frac{1}{4}\sum_{\alpha}\sum_{\beta}(-1)^{\alpha+\beta+1}\mathrm{M}_{\alpha\beta}\mathrm{M}_{*}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\mathfrak{L}\sigma\mathrm{W}.$$

Les $\mathrm{M}_{\alpha\beta}$ sont toujours les fonctions fondamentales représentant le déplacement électrique et la force magnétique. Les $\mathrm{M}_{*}^{\alpha\beta}$ sont *dualistiquement* liées aux précédentes par l'intermédiaire des potentiels gravifiques $g_{\alpha\beta}$. Si l'on s'en tient à cette partie du second membre précédent, on rencontre une contradiction déjà signalée dans le gros travail de l'an dernier. La force totale généralisée, comme dans tout problème gravifique, doit être nulle, ce qui entraîne des équations de la forme

$$\sum_{\beta}\mathrm{M}_{\beta i}^{*}u^{\beta} = 0,$$

dont la compatibilité n'est assurée, en général, que par la nullité du déterminant des $\mathrm{M}_{\beta i}^{*}$, alors que cette nullité, toujours en général, n'a pas lieu identiquement. M. De Donder avait déjà indiqué plusieurs manières de tourner la difficulté, mais aucune n'avait le

caractère définitif de celle qui consiste à compléter le second membre de (1) par le terme en $\zeta\sigma W$.

W est identiquement égal à 1 de par la structure de la forme quadratique fondamentale, σ est le densité de l'électricité et ζ se révèle bientôt, en conservant les équations de Maxwell-Lorentz, comme un invariant du mouvement électrique. Cette simplicité des facteurs du nouveau terme suffirait déjà à justifier son introduction. Mais ce n'est pas tout.

Il ne faut pas perdre de vue que le plus beau titre de gloire des théories einsteiniennes est de constituer une Mécanique qui peut être à la fois électromagnétique et massique. Si, notamment pour le champ massique incohérent, on retrouve facilement les géodésiques et les équations mécaniques classiques, il a fallu plus de pénétration pour retrouver chose analogue en électromagnétisme. Or il se produit précisément un fait de ce genre en partant de la fonction Λ définie en (1). La combinaison $W - \log \zeta^2$ satisfait à une équation du type lagrangien.

Tous ces résultats, relatifs à l'espace-temps, se séparent aisément dans l'espace et le temps; ils donnent notamment les équations du mouvement d'un électron en variables lagrangiennes et hamiltoniennes.

Le Complément II étend au champ matériel les considérations précédentes.

L'équation (1) conserve la même forme, mais W devient un W_e particulier au mouvement de l'électricité cependant qu'il faut ajouter un terme μW_m particulier aux mouvements massiques.

Il y a là une véritable électrodynamique des corps en mouvement où sont conservées les équations de Maxwell-Lorentz et les invariances précédentes ou, pour mieux dire, les formes de ces invariances à des termes massiques près.

Si masse et électricité sont animées des mêmes mouvements, on retrouve une dynamique des électrons, à forme hamiltonienne, comparable à celle de l'électron purement électrique.

Le Complément III a trait à des « catastrophes » (Hadamard, Einstein, Schwarzschild) qui, espérons-le, resteront toujours du domaine analytique car, à côté d'elles, les catastrophes géologiques pourraient passer pour choses insignifiantes. Ici elles menacent l'existence même du ds^2, c'est-à-dire de tout un espace-temps; une

condensation, un apport de masses dans un champ massique peuvent mettre son ds^2 dans un cas singulier. Après tout qui sait s'il n'y a pas là tout au moins une indication sur la nature de certains accidents stellaires et, pour qui ne voudrait pas croire à ces accidents, il y aurait alors une raison de penser que certaines variations massiques sont interdites dans l'Univers. Là encore on a l'exemple d'une question qui semble devoir aboutir à de prodigieuses intuitions.

Le Complément IV se rattache aux champs massiques à symétrie sphérique.

M. Marcel Brillouin a généralisé le problème de Schwarzschild en considérant une sphère à densité variable. M. De Donder a perfectionné la question de la continuité des potentiels einsteiniens à la surface de cette sphère. De plus, le cas de la densité variable a permis de reconnaître que les variables R et r' des problèmes extérieur et intérieur sont liées par une relation qui, quoique présentée sous une forme intégrale, n'en est pas moins d'une simplicité et d'une symétrie remarquables.

Le Complément V a trait à l'électron purement électrique. La théorie d'un tel électron rappelle celle de la couche sphérique newtonienne; à l'intérieur, rien d'autre que le très simple champ de Minkowski; à l'extérieur, le ds^2 se complique de certains facteurs qui lui donnent un aspect assez analogue à celui du ds^2 extérieur à la sphère massique.

Enfin le Complément VI revient sur les étalons de longueur et de temps de la Relativité restreinte. En revenant à la transformation de Lorentz, il est loisible d'imaginer deux observateurs qui s'accuseraient *réciproquement* d'avoir l'étalon de longueur le plus petit ou l'étalon de temps le plus grand. Cela n'a rien qui choque la logique, pas plus que le fait pour deux observateurs quelque peu éloignés, qui se regarderaient dans l'espace ordinaire, de croire, chacun pour leur compte, que le personnage observé semble le plus petit.

Après ces paragraphes, rédigés de manière concise, il est permis de dire encore combien l'exposition de M. De Donder soulèvera de problèmes aux développements féconds. Ce sont toujours les méthodes ordinaires de l'Analyse qui entrent en jeu; elles concordent, dans leurs résultats, avec tout ce que l'on peut tirer des

divers procédés de calcul symbolique. N'oublions pas non plus que le savant professeur de l'Université de Bruxelles nous donne le premier grand ouvrage einsteinien rédigé en français et que la chaire où il enseigne est un foyer de clartés, des plus originales, inspirant les travaux de nombreux élèves.

A. BUHL.

RÉVEILLE (J.). — DYNAMIQUE DES SOLIDES; GYROSCOPES. Paris J.-B. Baillière, 1923.

L'ensemble de travaux, constituant une *Encyclopédie de mécanique appliquée* doit comprendre tout d'abord l'*Exposition des principes généraux de la mécanique* admis dans la science actuelle. Il faut ensuite, avant d'attaquer les applications qui font l'objet de l'encyclopédie, s'arrêter quelque temps sur l'étude aussi concrète que possible du mouvement des corps solides, qui joue un rôle fondamental dans ces applications. Telle est la raison d'être et tel est l'objet de l'ouvrage qui vient de paraître sur la dynamique des solides (*Dynamique des solides; Gyroscopes*, par M. J. Réveille).

L'introduction résume en une cinquantaine de pages les notions essentielles de la Dynamique, telles qu'elles figurent dans les ouvrages classiques. Mais on voit, par certaines indications placées à côté de questions bien connues, que l'auteur s'est donné la peine (et peut-être le plaisir) de remonter aux sources. C'est ainsi qu'il nous donne l'énoncé et même l'esprit de la démonstration du principe de d'Alembert, tel que ce géomètre les a produits dans sa *Dynamique* en 1743. D'Alembert n'y parle pas des forces d'inertie; les accélérations même n'y paraissent que sous le nom de *mouvements imprimés aux corps* et l'on sait que dans le vocabulaire de la Mécanique du XVIII[e] siècle, le mot *corps* signifie souvent *point matériel*. Quoi qu'il en soit, ce principe de d'Alembert opéra dans la Mécanique une véritable révolution, comme l'indique Lagrange dans le bel historique qu'il expose au deuxième volume de sa *Mécanique analytique*. Les démonstrations actuelles introduisent les forces d'inertie en qualité de *forces*

fictives. Or les ingénieurs savent bien quels effets réels ont ces forces et combien il serait imprudent d'admettre qu'elles n'ont qu'une existence de fiction. Elles existent et sont appliquées, non aux points matériels en mouvement, mais aux liaisons, aux liens qui les plient à ces mouvements. Dans un solide ce lien est la cohésion des molécules. Mais ceci ne devait être indiqué qu'en passant, car il n'y avait pas à traiter dans cet ouvrage les questions de résistance et d'effort intérieur qui sont liées aux effets de l'inertie dans les solides en mouvement.

On voit encore dans cette introduction que la priorité de la découverte de l'ellipsoïde d'inertie semble, d'après le témoignage de Saint-Guilhem dans une brochure de 1837, appartenir à Cauchy. C'est ce qui avait déjà été signalé par Bour. Cauchy avait vu là simplement une manière de figurer la distribution des moments d'inertie. C'est Poinsot qui retrouva l'ellipsoïde d'inertie par une conception autrement féconde, en montrant qu'il donne une représentation géométrique simple et élégante de la relation qui existe entre le plan d'un couple d'impulsion et la rotation qui en résulte.

Après l'introduction, l'auteur entre dans le sujet propre de l'ouvrage, distribuant son travail en six chapitres, dont le premier est consacré au mouvement d'un solide autour d'un axe fixe, le deuxième au mouvement d'un solide parallèlement à un plan fixe, le troisième au mouvement autour d'un point fixe, le quatrième au mouvement d'un solide libre, le cinquième au mouvement d'un solide pesant s'appuyant sur un plan horizontal fixe. Enfin un sixième chapitre traite des *applications des propriétés gyroscopiques*.

On peut imaginer un plan plus logique, par exemple celui qui serait uniquement fondé sur le nombre des paramètres indépendants. Mais ce plan aurait peu modifié la distribution des matières et la division de l'ouvrage. En somme, telles qu'elles sont disposées, les diverses questions se trouvent groupées de façon satisfaisante.

Il faut remarquer qu'il eût été aussi de bonne logique de rassembler au début de ces chapitres et peut-être même de joindre à l'introduction toutes les considérations générales relatives au frottement; mais, comme dans toutes les questions ultérieurement

traitées, le frottement se présente uniquement sous sa forme classique et que de plus longs développements sur cette partie de la mécanique où des vues nouvelles ont été produites, très intéressants sans doute par eux-mêmes, n'auraient pas trouvé d'application dans la suite de l'ouvrage, ces questions ont été reportées au début du Chapitre II.

Le Chapitre I expose par les méthodes usuelles le mouvement d'un solide qui a un axe fixe et qui est soumis à un système quelconque de forces. On sait quel est l'intérêt pratique que présente l'étude des réactions de l'axe, pour l'équilibrage des masses tournantes. Le cas des meules de moulin est classique. L'équilibrage des grandes masses à rotation rapide a conduit à la considération des balourds, particulièrement pour les roues de locomotive. L'auteur démontre cette propriété, établie pour simplifier le problème de l'équilibrage, que l'on peut toujours, quand l'axe est rigide, arriver à un équilibrage parfait au moyen de deux masses additionnelles placées dans deux plans arbitraires perpendiculaires à l'axe de rotation.

Mais avec les vitesses de rotation que présentent les disques des turbines à action, comme les turbines Laval, la bonne marche de la masse tournante ne peut être obtenue que par un équilibrage fait avec une précision pratiquement impossible à atteindre. La difficulté a été tournée par la disposition de l'arbre flexible qui permet au plan moyen du disque de prendre une *orientation stable* et qui oppose son élasticité à l'effort centrifuge provenant de l'erreur de centrage. Ici se présente la notion des vitesses critiques; et, de plus, les effets gyroscopiques commencent à apparaître par la tendance de l'arbre à garder une orientation fixe quand ses supports se déplacent, comme cela a lieu pour les turbines actionnant les dynamos à bord des navires. Il en résulte pour l'arbre une fatigue proportionnelle à la vitesse de rotation du disque et à la vitesse angulaire du changement d'orientation de l'arbre. C'est ce que l'auteur aurait certainement montré s'il avait repris cette question dans la partie de son ouvrage qui traite des effets gyroscopiques.

Le pendule composé est traité par la méthode ordinaire, complétée par le calcul des réactions de l'axe. Le frottement est introduit dans une question très voisine, celle du mouvement de

l'aiguille d'inclinaison dans le plan du méridien magnétique. Le mouvement d'un solide, parallèlement à un plan fixe, fait l'objet du chapitre suivant. On y voit traités les mouvements bien connus d'un disque centré sur une droite, avec glissement ou roulement. L'appareil Desdouits, imaginé pour donner à chaque instant la mesure de l'accélération d'un train, fournit le seul exemple d'une application pratique des mouvements étudiés dans ce chapitre.

Le problème d'un disque vertical se mouvant avec frottement en contact avec un disque vertical fixe ne se rattache pas à une question d'application pratique; mais il sert à faire bien comprendre la méthode générale et les changements de phase dans le mouvement. L'énoncé en est emprunté aux Concours d'Agrégation; on en trouvera d'autres dans le cours de l'ouvrage. Je ne pense pas qu'on puisse faire un reproche à l'auteur de les avoir introduits dans un volume où la mécanique est envisagée dans son aspect tourné vers la pratique. Ces énoncés choisis avec soin par des géomètres éminents peuvent être très utiles à ceux qui veulent se rendre maîtres des méthodes que la mécanique applique à certaines questions, aux pratiques comme aux autres et provoquent souvent devant certaines difficultés de profitables réflexions.

Le Chapitre III nous conduit au mouvement d'un solide autour d'un point fixe, c'est-à-dire à un domaine si bien exploré de la mécanique classique, qu'il est difficile d'innover, même dans l'exposition. Signalons seulement en passant une propriété qui semble avoir été peu remarquée, bien qu'elle résulte immédiatement des formules connues dans le mouvement de Poinsot : c'est que dans le cas où la polhodie dégénère en une ellipse et l'herpolhodie en une double spirale, le rayon vecteur de l'herpolhodie tourne avec une vitesse angulaire constante. L'auteur donne une démonstration directe très simple de cette propriété d'où résulte la forme en spirale de l'herpolhodie.

Entre l'étude du mouvement de Poinsot et celle du mouvement d'un solide pesant se trouvent insérées quelques pages relatives à l'effet de percussions appliquées à un solide qui a un point fixe; et, d'après l'auteur, c'était là leur place. Car c'est justement cette question qui a amené Poinsot à imaginer l'ellipsoïde d'inertie et à s'en servir pour sa remarquable représentation du mouvement. En effet, dit l'auteur, Poinsot appelle

force d'un point en mouvement ce que nous appelons *quantité de mouvement* et, considérant un solide immobile qui a un point fixe, il suppose que tout à coup chaque molécule de masse m est animée d'une vitesse u compatible avec le mouvement d'ensemble du solide. Il réduit le système de vecteurs ainsi conçu à ses éléments, résultante générale et couple résultant, et il montre que la rotation correspondante est le diamètre conjugué du plan du couple. Il raisonne donc sur ce que nous appelons maintenant des *quantités de mouvement et des percussions.*

Passant au cas général du solide pesant qui a un point fixe, l'auteur l'étudie dans le cas des petits mouvements et montre qu'il se réduit, comme l'a établi M. Lecornu, à la superposition de trois mouvements dont deux sont oscillatoires, le troisième étant une rotation uniforme très lente autour de la verticale du centre de gravité.

Le Chapitre IV consacré au mouvement d'un solide libre contient une partie importante inédite. C'est l'exposé et le résumé d'une étude qui a été faite à Gavres pendant la guerre par M. Esclangon, professeur à la Faculté de Bordeaux, actuellement directeur de l'Observatoire de Strasbourg. Les exigences de la balistique, dans la dernière guerre, ont conduit à serrer d'aussi près que possible l'action de l'air sur les projectiles et à ne plus négliger le frottement produit par la rotation du projectile au contact de l'air. Il semble bien que ce frottement seul peut expliquer certains faits que l'expérience signale, par exemple ce ronflement périodique que l'on entend souvent au départ, qui paraît dû à un mouvement de nutation accentué, lequel s'atténue et disparaît pour faire place à une sorte de sifflement régulier. En effet, la résistance de l'air à la translation du projectile se réduisant à une résultante passant par l'axe, ne pourrait avoir pour effet de supprimer la nutation au départ.

Le mouvement du projectile autour de son centre de gravité, soumis dans ces conditions à l'analyse, se présente comme s'ordonnant autour d'une droite passant par ce centre, dont la direction change d'une manière continue, et que M. Esclangon appelle *axe d'équilibre dynamique.* L'écart entre cet axe et l'axe du projectile est mesuré par une série qui n'est convergente que quand un certain *coefficient d'amortissement* est négatif. Dès lors, il est bien certain

que les projectiles à coefficient d'amortissement positif sont à rejeter, puisque l'écart augmente et que la nutation au départ s'accentue au lieu de s'atténuer. Ce coefficient dépendant de la forme et de la nature de la surface extérieure du projectile, on conçoit qu'il puisse en résulter une méthode permettant de séparer les mauvais projectiles des bons.

Après une application des méthodes de la dynamique à l'étude de la précession des équinoxes, l'auteur aborde la question de l'effet des percussions sur un corps libre, du choc de deux solides, en l'absence de frottement, avec l'introduction du paramètre de percussion, et enfin l'application de ces principes au battage des pieux de fondation. Quelques pages seulement sont consacrées au choc avec frottement plutôt pour montrer la difficulté de la question que pour la résoudre.

C'est dans le chapitre suivant que nous arrivons au mouvement d'un solide pesant s'appuyant sur un plan horizontal fixe. Après les généralités d'introduction, viennent les applications classiques à la toupie, sans frottement, et en cas de frottement à la sphère homogène. Signalons en passant cette remarque de l'auteur sur le mouvement de la sphère dans la phase finale du roulement; c'est que ce mouvement se ramène au roulement, avec vitesse constante, d'un cylindre de révolution sur un plan qui n'est pas horizontal.

Avec le roulement et le pivotement qui se présentent dans le mouvement du cerceau, nous rencontrons les liaisons non holonomes, c'est-à-dire, comme on sait, les liaisons qui ne peuvent se traduire que par des équations différentielles entre les coordonnées et le temps. On sait à quelles erreurs peuvent conduire les équations de Lagrange appliquées sans discernement suffisant aux mouvements donnés à de telles liaisons. C'est ce que l'auteur s'est efforcé de mettre en évidence sur un exemple emprunté au *Cours de Mécanique de l'École Polytechnique* de M. Lecornu. Vient ensuite la méthode qu'a donnée M. Appell, sous le nom de *forme générale des équations du mouvement convenant à tous les systèmes holonomes ou non holonomes;* l'auteur suit ce guide de près et lui emprunte l'application qui est faite au mouvement du cerceau.

Pour l'étude du mouvement de la bicyclette, les méthodes et les principaux résultats sont empruntés au traité bien connu

de C. Bourlet, particulièrement en ce qui concerne l'équilibre de la marche en ligne droite, le rétablissement et le redressement par le guidon et enfin le virage tant horizontal qu'incliné.

Enfin le dernier chapitre est tout entier occupé par les applications des propriétés gyroscopiques.

Personne n'ignore que c'est Foucault qui a introduit le gyroscope dans le domaine des réalisations pratiques. Foucault n'était pas géomètre. Ses expériences et ses inventions procèdent d'un sens mécanique ou mieux d'un instinct mécanique très sûr et très exercé. Rien n'est plus curieux que la manière dont il explique, dans sa correspondance, la conception de sa célèbre expérience du pendule et de la loi de la rotation relative du plan du pendule. Je *pose effrontément ce principe*, écrit-il, ..., ce principe est que, hors du pôle, le plan d'oscillation du pendule, puisqu'il ne peut pas rester invariable dans l'espace, *doit tourner le moins possible*, et là-dessus il édifie une sorte de démonstration qui ne vaut d'ailleurs que pour le moment où le plan d'oscillation, primitivement dans le méridien, commence de s'en écarter. Il a posé de la même manière le principe de la *tendance au parallélisme*, que la mécanique explique en mesurant les limites de son exactitude. C'est alors qu'il a réalisé son gyroscope et montré l'analogie avec l'aiguille aimantée d'inclinaison et de déclinaison. La pensée devait venir dès lors qu'il y avait là un moyen de suppléer le compas magnétique. Justement, à cette époque, on se préoccupait des troubles apportés au compas par les masses de fer, de jour en jour plus importantes, qui entraient dans la construction des navires. Mais l'installation du gyroscope de Foucault comme aiguille de déclinaison présentait deux difficultés qui ont arrêté les inventeurs : celle d'assurer l'horizontalité constante du cercle horizontal du gyroscope et l'impossibilité d'entretenir le mouvement du gyroscope sans déranger son orientation. On conserva donc le compas magnétique que l'on parvint à compenser; c'est ainsi que le compas Thomson a remplacé partout l'ancienne boussole. Mais quand il fallut installer un compas dans le blockhaus, réduit étroit et blindé, et surtout dans les sous-marins, on se retourna vers le gyroscope.

La découverte des champs tournants résolut le problème de l'entretien du mouvement. D'autre part, au lieu de suspendre le

gyroscope par son centre de gravité, on adopta une sorte de pendule gyroscopique. C'est au mouvement de ce pendule que l'auteur applique les méthodes et les équations de la dynamique, en admettant cette simplification (que l'expérience légitime), que le plan passant par l'axe de la tige de suspension et l'axe du gyroscope reste à peu près vertical. L'analyse montre que l'axe du gyroscope est animé de deux mouvements périodiques : l'un dit *de précession* qui se fait de part et d'autre du plan méridien, l'autre dit : *de nutation* au-dessus et au-dessous de l'horizon ; et les dispositions des compas en usage tendent à amortir ces deux mouvements. On y parvient dans le *compas Anschütz* par un volet obturateur qui prend une position dissymétrique tant que l'appareil n'est pas en équilibre et dans le *compas Sperry* par l'action d'un contrepoids en forme de croissant. Les deux compas diffèrent aussi par leur mode de suspension et par la commande de la rose des vents. L'auteur entre dans les détails de réalisation de ces deux ingénieux appareils; pour la théorie, il est regrettable que l'auteur n'ait pu avoir à temps connaissance des méthodes et des résultats exposés dans la remarquable thèse de M. Béghin.

Remarquons que si le magnétisme du bord n'apporte aucun trouble au fonctionnement de ces compas, ils sont sensibles à d'autres influences d'origine mécanique. Le navire, par le seul fait qu'il se déplace sur la surface courbe de la Terre, tend à incliner l'axe du gyroscope suivant le changement en latitude; il en résulte, par suite de la tendance au parallélisme, un écart de l'axe en dehors du méridien, autrement dit une *déviation* du compas. De même si la vitesse augmente rapidement, le compas est soumis à une accélération qui se traduit par une déviation du même genre. Enfin le roulis, le changement d'orientation du navire dans les évolutions et les girations, apportent de nouveaux troubles aux indications du compas et l'on voit ainsi que les compas gyroscopiques doivent être surveillés de près et contrôlés comme les compas magnétiques.

Dans la direction des torpilles (appareil Obry), l'auteur nous ramène au gyroscope de Foucault; c'est un doigt fixé au cercle vertical qui commande le gouvernail, en agissant sur le tiroir d'une petite machine à air comprimé. On comprend combien la transmission doit être délicate, car si elle exigeait un effort appréciable de la part du cercle vertical, ce cercle ressentirait une réaction

égale dont l'effet serait de changer l'orientation de l'axe du gyroscope et par conséquent de changer la ligne de direction.

Ce n'est plus l'effet gyroscopique qui entre en jeu quand il s'agit de l'appareil qui réalise à bord l'horizon nécessaire aux observations et qui manque souvent la nuit et par temps de brume. Il faut se reporter au mouvement de la toupie. Il est intéressant de lire par quelles dispositions ingénieuses l'amiral Fleuriais a adapté sa toupie au sextant, et comment il a réalisé l'horizon dans la lunette par l'emploi d'un collimateur qui tourne avec la toupie. Là aussi des corrections sont nécessaires pour tenir compte du frottement et de la rotation de la Terre. Une autre adaptation de la toupie au sextant, pour les observations de navigation aérienne, a été réalisée par M. Le Prieur qui a repris l'idée émise par l'inventeur Serson au XVIII[e] siècle, d'une glace réfléchissante placée horizontalement à la partie supérieure de la toupie.

Dans les appareils gyroscopiques que nous avons passés en revue à la suite de l'auteur, le gyroscope n'a servi qu'à indiquer une direction par la fixité de son orientation; dans les applications suivantes, il agit par sa force vive pour assurer la stabilité de l'appareil qui le supporte. Tel est d'abord le monorail Brennau dont l'auteur expose la théorie, où un système de deux forces symétriques permet, grâce aux réactions exercées par leurs axes, à un wagon de rouler sur un rail unique.

La maison Sperry construit des gyroscopes d'une grande masse animés d'une grande vitesse de rotation et disposant par conséquent d'une énorme force vive. L'auteur nous les montre destinés à supprimer le roulis sur les navires en eau agitée et, d'après des expériences faites sur des navires d'un tonnage important, y ayant bien réussi. Mais c'est grâce à une disposition inspirée par une vue très ingénieuse, qui arrête le roulis au moment même où il tend à naître, de sorte que l'appareil n'est jamais aux prises avec des mouvements d'une amplitude telle qu'il serait impossible d'en aborder la force vive.

Le gyroscope n'a pas dit son dernier mot dans cette fonction importante d'assurer la stabilité, surtout pour les appareils de navigation aérienne. Il y a là un chapitre qui reste ouvert. Mais on peut voir quel intérêt présente dès à présent l'étude des mouvements gyroscopiques et de leurs applications; il justifierait à lui

seul la publication du volume que nous analysons. Et les développements théoriques qui les accompagnent et les précèdent ne seront pas sans présenter quelque utilité aux ingénieurs que ne rebutent pas les études et les démonstrations de Mécanique analytique. L. L.

BURALI FORTI (C.) e MARCOLONGO (R.). — ELEMENTI DI CALCOLO VETTORIALE. 2e edizione, riordinata e ampliata. Un volume de xx-250 pages. Bologne, Nicola Zanichelli.

L'analyse de l'Ouvrage de MM. Burali Forti et Marcolongo a déjà été faite dans ce *Bulletin* (¹) par J. Tannery, sur la traduction française de la première édition. Depuis que cette analyse a paru, le calcul vectoriel a quelque peu pénétré chez nous dans l'enseignement. Tannery disait : « il n'y a guère d'étudiant ayant suivi dans nos Universités les cours d'Analyse et de Mécanique rationnelle qui ne sache (sans s'en douter) ce que sont un produit scalaire et un produit vectoriel, le gradient d'une fonction de points, le tourbillon ou la divergence d'un vecteur fonction de point et même, au moins dans certains cas, l'opération *nabla*; qui ne sache aussi les propositions fondamentales concernant ces objets; mais, le plus souvent, il ignore qu'il sait tout cela, parce qu'on n'a pas prononcé devant lui les noms que je viens de rappeler, qu'on ne lui a pas parlé de notations, qu'on a négligé quelques rapprochements désirables ». Or maintenant la situation a changé, l'étudiant français n'ignore plus qu'il sait tout cela; toutes ces notions et dénominations sont devenues classiques. Et même certains professeurs ne craignent pas, dans certains cas, d'écrire des équations vectorielles; mais ils ne le font guère d'une façon systématique. Je ne discuterai pas ici la question de savoir si c'est à tort ou à raison. Ce qui est sûr, c'est que l'étudiant en possession des méthodes françaises n'aura plus que peu de chose à faire pour s'assimiler les méthodes du calcul vectoriel. Et pour cela il ne pourra trouver de meilleur guide que l'Ouvrage de MM. Burali

---

(¹) 2e série, t. XXXIV, 1910, 1re partie, p. 213.

Forti et Marcolongo. Cet Ouvrage est extrêmement clair et bien rédigé, tellement que la question de langue elle même n'y est guère un obstacle. Avec la connaissance de quelques mots indispensables et des premiers éléments de la grammaire italienne, on peut le lire à livre ouvert. Espérons d'ailleurs qu'une traduction française ne tardera pas à paraître (celle de la première édition est épuisée).

Nous ne referons pas, après J. Tannery, l'analyse des matières contenues dans la première édition. Nous indiquerons seulement les additions et les changements (dont quelques-uns avaient déjà trouvé place dans la traduction française) qui y ont été apportés. Les auteurs ont ajouté une bibliographie; quelques nouvelles identités vectorielles intéressantes; un appendice à la première partie traitant des formes de seconde et troisième espèce. Ces formes sont destinées à introduire dans le calcul comme éléments absolus la droite, le plan, les forces appliquées à un solide. Par exemple, la condition d'équilibre d'un système de forces appliquées à un solide s'exprime par l'annulation d'une forme de seconde espèce. Dans la seconde partie de l'Ouvrage, réservée aux applications, les auteurs ont ajouté : les asymptotes, les plans asymptotiques, les hélices, les lignes de courbure, les lignes asymptotiques, les lignes géodésiques, les surfaces réglées, les surfaces de révolution, les surfaces hélicoïdales, les aires et les volumes.

Les changements portent principalement sur l'ordre des matières, ils sont destinés à simplifier quelques démonstrations. La divergence a reçu une définition nouvelle, analogue à celle du gradient et du rotationnel (tourbillon) et qui met en évidence sa signification physique.

Souhaitons à cette nouvelle édition le succès mérité qui a accueilli la précédente.

E. Cahen.

BRAHY (Ed.). — Exercices méthodiques de calcul intégral. Quatrième édition. Paris, Librairie Gauthier-Villars, 1922.

Il est impossible de trouver, assez vite, une primitive, même simple, si l'on n'a pas fait un grand nombre d'exercices. Il faut,

d'abord, retenir un certain nombre de primitives classiques, sortes de repères géodésiques, auxquels on s'accrochera constamment. Chacun, d'après son expérience, choisit ainsi une sorte de triangulation fondamentale, prenant plus ou moins de bases, suivant qu'il utilise, plus ou moins, sa mémoire.

A l'étudiant inexpérimenté, il faut un guide, sinon la recherche des primitives semblera un jeu de hasard. Telle intégrale paraît effrayante, qui se transforme aisément en une autre, classique; mais il faut avoir fait beaucoup de transformations variées, pour tomber sur la bonne, sans des tâtonnements interminables. M. Brahy pourra être pris comme guide, pour aider dans la recherche des artifices normaux d'intégration, artifices dans lesquels, avec de l'expérience, on discerne souvent des méthodes.

Avec l'expérience, le savoir, la réflexion, on prévoit, et l'on peut éviter bien des recherches vaines.

Marquons le ton et l'orientation du livre, en citant quelques-uns des problèmes résolus :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}}, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{1 \pm x^2}}, \quad \int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x},$$

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx, \quad \int \frac{dx}{(a + b \cos x)^n};$$

$$\int x^m (a + b x^n)^p dx, \quad \int \frac{(1 + x^2)\, dx}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^4}}, \quad \ldots$$

Puis nous trouvons la quadrature des aires planes, pour l'ellipse, la spirale d'Archimède, la lemniscate, la cissoïde de Dioclès, la cycloïde, la chaînette, la conchoïde de Nicomède, le limaçon de Pascal, le folium de Descartes, etc. Vient ensuite la rectification des courbes (on remarquera, page 118, l'emploi des séries). Puis, les cubatures et les aires des surfaces courbes.

Nous arrivons aux équations différentielles. Il y a celles dont la solution crève les yeux, et les cas simples, équations homogènes, linéaires, types de Lagrange et Clairaut. On trouvera même l'équation de Pfaff ultra-simple :

$$M\,dx + N\,dy + P\,dz = 0$$

avec la condition

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial z};$$

telle qu'il existe une solution de la forme $f(x, y, z) = \text{const.}$ Bien entendu, il ne faut chercher qu'une simple vérification.

A propos des équations linéaires, nous rencontrons la méthode de la variation des constantes (Lagrange), terme lapidaire, expressif et qui ne peut être mal interprété, si l'on réfléchit un peu.

Nous trouvons même des équations différentielles non linéaires, d'ordre n.

Il y a des exercices sur les équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires ou non, sur des équations linéaires du second ordre, sur l'emploi des séries.

Par exemple, le développement en série de

$$\int_0 e^{-x^2}\,dx,$$

ou encore de la solution des équations

$$x^2 y'' - 2y' - xy = 0, \qquad y'' + a x^4 y = 0.$$

On peut dire que ces exercices forment un bloc autonome pour la Quadrature. Pour les équations différentielles, ils se suffisent encore, parce qu'il n'y a guère qu'un effort analogue à la recherche d'une primitive. Quand on arrive aux équations aux dérivées partielles, il faut s'appuyer, en même temps, sur un Cours, il faut un courant d'idées, au moins intuitives, pour éclairer, diriger tous ces calculs; sinon, on s'embrouillera !

Lorsqu'on utilise les séries, il faut se rappeler qu'une série ne tient pas dans le creux de la main, comme un polynome; on ne dérive pas une série, sans précaution.

Ce livre atteint des questions d'ordre élevé et ne peut les toucher que par l'extérieur, étant essentiellement une initiation au Calcul. Par le choix des questions, il sera excellent pour délier (algébriquement) les doigts du physicien, de l'ingénieur, du jeune géomètre.

R. d'Adhémar.

MÉLANGES.

SUR L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES;

Par M. P. WORONETZ.

Considérons une équation aux dérivées partielles

$$(1)\qquad \frac{\partial W}{\partial t} = H(t, q_i, p_i) \qquad \left(p_i = \frac{\partial W}{\partial q_i};\ i = 1, 2, \ldots n\right)$$

et admettons que nous avons trouvé les équations

$$F_\nu(t, q_i, p_i) = a_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k;\ k < n)$$

qui peuvent être résolues par rapport à p_i, par exemple

$$(2)\qquad p_\nu = \varphi_\nu(t, q_i, p_j, a_\nu) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k;\ j = k+1, k+2, \ldots, n),$$

où a_ν sont des constantes arbitraires; admettons de plus que ces équations (2) forment un système en involution

$$(3)\qquad \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q_\nu} - \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial q_\mu} = \sum_{j=k+1}^{n} \left(\frac{\partial \varphi_\mu}{\partial q_j}\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial p_j} - \frac{\partial \varphi_\mu}{\partial p_j}\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial q_j}\right) \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k),$$

et que les équations (2) sont en involution avec (1)

$$\frac{\partial H}{\partial q_\nu} + \sum_{\mu=1}^{k} \frac{\partial H}{\partial p_\mu}\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial q_\mu} = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t} + \sum_{j=k+1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial q_j}\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial p_j} - \frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial q_j}\right),$$

ou

$$(4)\qquad \frac{\partial \overline{H}}{\partial q_\nu} = \frac{\partial \varphi_\nu}{\partial t} + \sum_{j=k+1}^{n} \left(\frac{\partial \overline{H}}{\partial q_j}\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial p_j} - \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_j}\frac{\partial \varphi_\nu}{\partial q_j}\right) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k).$$

où $\overline{H}$ désigne ce que devient la fonction H quand on y remplace p_1, p_2, ..., p_k par leurs valeurs tirées des formules (2) :

$$H(t, q_i, p_i) = \overline{H}(t, q_i, p_j, a_\nu)$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n;\ \nu = 1, 2, \ldots, k;\ j = k+1, k+2, \ldots, n).$$

Ceci étant admis, nous allons montrer que l'intégrale complète $W(t, q_i, a_i) + a_{n+1}$ de l'équation (1) peut être présentée sous la forme suivante :

$$(5)\quad \begin{cases} W = \Omega(t, q_\nu, q_j, a_\nu, a_j) - \omega(q_\nu, a_\nu, a_j) + a_{n+1} \\ (\nu = 1, 2, \ldots, k;\ j = k+1, k+2, \ldots, n), \end{cases}$$

la fonction Ω étant l'intégrale complète de l'équation aux dérivées partielles

$$(6)\quad \frac{\partial \Omega}{\partial t} = \overline{H}(t, q_\nu, q_j, p_j, a_\nu) \qquad \left(p_j = \frac{\partial \Omega}{\partial q_j};\ q_1, q_2, \ldots, q_k = \text{const.}\right),$$

dans laquelle le nombre des variables est diminué de k unités (t et q_j sont des arguments et q_ν des paramètres) et la fonction ω des variables $q_1, q_2, \ldots, q_k$ s'obtiendra, après l'intégration de l'équation (6), par des quadratures.

Pour démontrer la proposition énoncée, souvenons-nous que, d'après la théorie de Jacobi-Liouville, le problème de l'intégration de l'équation (1) peut être remplacé par le suivant : déterminer n fonctions p_i des arguments t et q_i et des constantes arbitraires a_i telles que l'expression différentielle

$$H\,dt + \sum_{i=1}^{n} p_i\,dq_i$$

soit une différentielle totale

$$H\,dt - \sum_{i=1}^{n} p_i\,dq_i = d\,W(t, q_i, a_i).$$

$W + a_{n+1}$ sera l'intégrale complète de l'équation (1). Si l'on a les équations (2) et si les conditions (3) et (4) sont vérifiées, alors k des fonctions cherchées sont déjà exprimées au moyen des $n-k$

restantes. Substituons ces fonctions dans les coefficients des différentielles dans la dernière équation

$$(7)\qquad \overline{\mathrm{H}}\,dt + \sum_{\nu=1}^{k} \varphi_\nu\, dq_\nu + \sum_{j=k+1}^{n} p_j\, dq_j = d\,\mathrm{W}(t,\, q_i,\, a_i).$$

Cherchons maintenant à déterminer les fonctions p_j de telle façon que l'expression

$$\overline{\mathrm{H}}\,dt - \sum_{j=k+1}^{n} p_j\, dq_j$$

soit une différentielle totale d'une certaine fonction

$$\Omega(t,\, q_\nu,\, q_j,\, a_\nu,\, a_j) - a_{n+1},$$

en regardant $q_1, q_2, \ldots, q_k$ comme des paramètres

$$\overline{\mathrm{H}}\,dt - \sum_{j=k+1}^{n} p_j\, dq_j = d\,\Omega(t,\, q_\nu,\, q_j,\, a_\nu,\, a_j) \qquad (q_1,\, q_2,\, \ldots,\, q_k = \text{const.}).$$

Pour cela, d'après la théorie de Jacobi-Liouville, il suffit d'intégrer l'équation (6) sous les conditions indiquées plus haut; l'intégrale complète de cette équation sera la fonction Ω, et alors les fonctions cherchées p_j seront déterminées par les formules

$$(8)\qquad p_j = \frac{\partial\Omega}{\partial q_j} \qquad (j = k+1,\, k+2,\, \ldots,\, n).$$

Supposons que l'on a intégré l'équation (6), c'est-à-dire que la fonction Ω est trouvée. Différentions à présent Ω par rapport à toutes les variables

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t}\,dt + \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\partial\Omega}{\partial q_\nu}\,dq_\nu + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial\Omega}{\partial q_j}\,dq_j = d\Omega,$$

et retranchons le résultat obtenu de la formule (7); alors, en vertu de (6) et (8), nous aurons

$$(9)\qquad \sum_{\nu=1}^{k} \left(\varphi_\nu - \frac{\partial\Omega}{\partial q_\nu}\right) dq_\nu = d(\mathrm{W} - \Omega).$$

Il est facile de voir qu'après la substitution de (8) dans les coefficients des différentielles, l'expression obtenue devient une différentielle totale d'une certaine fonction ω des variables $q_1, q_2, \ldots, q_k$ et des constantes arbitraires

$$(10) \qquad \sum_{\nu=1}^{k} \left(\varphi_\nu - \frac{\partial \Omega}{\partial q_\nu}\right) dq_\nu = d\,\omega(q_\nu, a_\nu, a_j);$$

en d'autres termes, les coefficients des différentielles dans l'expression (9), après la substitution indiquée, seront des fonctions des seules variables $q_1, q_2, \ldots, q_k$ et des constantes arbitraires. D'ailleurs pour ces fonctions les conditions d'intégrabilité sont satisfaites :

$$(11) \quad A_{\mu,\nu} = \frac{\partial}{\partial q_\mu}\left(\varphi_\nu - \frac{\partial \Omega}{\partial q_\nu}\right) - \frac{\partial}{\partial q_\nu}\left(\varphi_\mu - \frac{\partial \Omega}{\partial q_\mu}\right) = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k).$$

Pour démontrer cette proposition, substituons dans l'équation (6) son intégrale complète et différentions l'identité obtenue par rapport au paramètre q_ν en ayant égard à (8) :

$$\frac{\partial^2 \Omega}{\partial t\, \partial q_\nu} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial q_\nu} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial \overline{H}}{\partial p_j} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial q_j\, \partial q_\nu}.$$

Mais en vertu des équations canoniques correspondant à (6), nous avons

$$(12) \quad \frac{dp_j}{dt} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial q_j}, \quad \frac{dq_j}{dt} = -\frac{\partial \overline{H}}{\partial p_j} \qquad (q_\nu = \text{const.}; \; j = k+1, k+2, \ldots, n),$$

de sorte que l'égalité précédente donne

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \Omega}{\partial q_\nu} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial q_\nu} \qquad (q_\nu = \text{const.}).$$

D'autre part, la condition (4), en tenant compte de (12), peut s'écrire

$$\frac{d\varphi_\nu}{dt} = \frac{\partial \overline{H}}{\partial q_\nu} \qquad (q_\nu = \text{const.}).$$

En retranchant de cette équation la précédente. nous aurons

$$\frac{d}{dt}\left(\varphi_\nu - \frac{\partial \Omega}{\partial q_\nu}\right) = 0 \qquad (q_\nu = \text{const.}),$$

ce qui démontre la première partie de la proposition

$$(13)\qquad \varphi_\nu - \frac{\partial\Omega}{\partial q_\nu} = \text{fonct.}(q_1, q_2, \ldots, q_k) \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k).$$

Passons maintenant aux conditions d'intégrabilité (11); en développant leurs premières parties et en ayant égard à (8), nous trouvons

$$A_{\mu,\nu} = \left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial q_\mu} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial p_j}\frac{\partial^2\Omega}{\partial q_j\,\partial q_\mu}\right) - \left(\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial q_\nu} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial p_j}\frac{\partial^2\Omega}{\partial q_j\,\partial q_\nu}\right),$$

ou, d'après (13),

$$A_{\mu,\nu} = \left(\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial q_\mu} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial\varphi_\nu}{\partial p_j}\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial q_j}\right) - \left(\frac{\partial\varphi_\mu}{\partial q_\nu} + \sum_{j=k+1}^{n} \frac{\partial\varphi_\mu}{\partial p_j}\frac{\partial\varphi_\nu}{\partial q_j}\right),$$

ce qui démontre, d'après (3), la formule (11)

$$A_{\mu,\nu} = 0 \qquad (\mu, \nu = 1, 2, \ldots, k).$$

En résumé, quand on a trouvé de (10) la fonction ω par des quadratures, on aura la formule fondamentale (5) en comparant (10) avec (9).

Soit donnée, par exemple,

$$H = -\frac{1}{2}p_1^2 - p_2 p_3 - \frac{p_1}{q_2 q_3}.$$

Posons

$$F_1 = p_1, \qquad F_2 = q_2 p_2 - q_3 p_3,$$

de sorte que les formules (2) donnent

$$(14)\qquad p_1 = a_1, \qquad p_2 = \frac{a_2 + q_3 p_3}{q_2}.$$

Calculons $\overline{H}$ et intégrons l'équation (6)

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = -\frac{a_1^2}{2} - \frac{a_2 + q_3 p_3}{q_2}p_3 - \frac{a_1}{q_2 q_3} \qquad (q_2 = \text{const.}),$$

d'après la méthode d'Imschénetzky, en posant

$$(15)\qquad \frac{a_2 + q_3 p_3}{q_2}p_3 + \frac{a_1}{q_2 q_3} = a_3.$$

on obtient

$$\frac{\partial\Omega}{\partial t} = -\left(\frac{a_1^2}{2} + a_3\right)$$

et en déterminant de (15)

$$p_3 = \frac{1}{q_3}\left(-\frac{a_2}{2} \pm \sqrt{\frac{a_2^2}{4} + a_1 + a_3 q_2 q_3}\right),$$

nous trouvons

$$\Omega = -\left(\frac{a_1^2}{2} + a_3\right)t - \frac{a_2}{2}\log q_3 \pm \int\sqrt{\frac{a_2^2}{4} + a_1 - a_3 q_2 q_3}\,\frac{dq_3}{q_3},$$

de sorte que

$$\frac{\partial\Omega}{\partial q_1} = 0,$$

$$\frac{\partial\Omega}{\partial q_2} = +\frac{a_3}{2}\int\frac{dq_3}{\sqrt{\frac{a_2^2}{4} + a_1 - a_3 q_2 q_3}} = \pm\frac{1}{q_2}\sqrt{\frac{a_2^2}{4} + a_1 + a_3 q_2 q_3}.$$

Mais de (14) d'après (15), on a

$$\varphi_1 = a_1, \qquad \varphi_2 = \frac{1}{q_2}\left(\frac{a_2}{2} \pm \sqrt{\frac{a_2^2}{4} - a_1 - a_3 q_2 q_3}\right),$$

donc de la formule (10), on tire

$$d\omega = a_1\,dq_1 + \frac{a_2}{2q_2}\,dq_2,$$

d'ici on obtient

$$\omega = a_1 q_1 + \frac{a_2}{2}\log q_2$$

et, finalement, d'après la formule (5), on reçoit

$$W = -\left(\frac{a_1^2}{2} + a_3\right)t + a_1 q_1 + \frac{a_2}{2}\log\frac{q_2}{q_3} \pm \int\sqrt{\frac{a_2^2}{4} - a_1 + a_3 q_2 q_3}\,\frac{dq_3}{q_3} + a_4.$$

En comparant la méthode ci-dessus exposée à celle bien connue de M. S. Lie, nous voyons qu'il n'y a ici aucune nécessité d'employer la substitution de Jacobi-Mayer :

$$q_\nu = q_{\nu,0} + k_\nu t \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, k).$$

D'ailleurs l'équation (6), en général, est plus simple que l'équation correspondante de M. S. Lie

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \overline{\Pi} + \sum_{\nu=1}^{k} k_\nu \varphi_\nu \qquad (k_\nu = \text{const.}).$$

D'autre part, l'intégration de l'équation de Lie donne immédiatement la fonction cherchée W, tandis que l'intégration de l'équation (6) ne donne que la fonction Ω, de sorte que pour trouver W il faut encore déterminer la fonction ω. D'ailleurs la détermination de ω ne présente pas de difficultés, car la fonction ω, comme on l'a vu, s'obtient par des quadratures.

PROGRÈS RÉCENTS DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS ABÉLIENNES;

Par M. S. LEFSCHETZ.

---

1. La théorie des fonctions abéliennes est sans contredit une des plus importantes qui aient occupé les géomètres. Il est d'autant plus remarquable que notre connaissance des matrices aux périodes *per se* soit restée jusqu'à toute récente date, plutôt fragmentaire. On possédait bien quelques théorèmes fondamentaux pour le genre p quelconque et le regretté Georges Humbert, surtout (¹), avait étudié à fond le cas $p = 2$. Mais pour ce cas le calcul direct, sans être facile, est tout au moins abordable; aussi ses méthodes ne se prêtent-elles guère à une extension facile. C'est surtout à M. Scorza que l'on doit d'avoir largement levé le voile (²). Ses travaux auraient sans nul doute suscité une attention plus considérable, n'était d'abord leur apparition en pleine guerre, ensuite la méthode dont il s'est servi. Relevant de la géométrie projective, appliquée en l'occasion à une question très importante pour les analystes, elle exige de ces derniers un entraînement spécial que l'on ne peut guère s'attendre à les voir posséder. Il semblerait donc fort désirable qu'on arrive un jour aux résultats de M. Scorza par voie analytique (³). Je tiens à rappeler qu'au cours de certaines

---

(¹) Je n'oublie pas les travaux que l'on doit à MM. Picard, Enriques, Severi, Bagnera, de Franchis, entre autres, mais ils ont porté plutôt sur les surfaces hyperelliptiques et le côté théorie des fonctions.

(²) Ses travaux sont exposés surtout dans ces deux Mémoires : *Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann*. Palermo Rendiconti. Vol. 41, 1916. — *Le algebre di ordine qualunque*, *Ibid.*, vol. 45, 1921.

Le premier est de beaucoup le plus important.

(³) Tel était le sens que j'entendais donner à une remarque faite à la fin d'une causerie (Cours de M. Hadamard au Collège de France, au printemps de 1921) où j'analysais les travaux de M. Scorza. J'ai dû m'exprimer de manière bien obscure pour qu'un savant à l'esprit aussi aigu que M. Lebesgue

recherches (¹), sa méthode, dont l'élégance est hors de doute, me fut d'une aide considérable. Je crois donc faire œuvre utile en résumant ici ses travaux dans leurs grands traits.

2. Partons d'une matrice à p lignes et $2p$ colonnes

$$\Omega = \| \omega_{j\mu} \| \qquad (j = 1, 2, \ldots, p;\ \mu = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Pour qu'il puisse lui correspondre un corps de fonctions abéliennes, il faut et il suffit, nous l'affirme un théorème classique, qu'il existe une forme alternée à coefficients rationnels

$$(1) \qquad \sum_{\mu,\nu}^{2p} c_{\mu\nu} x_\mu y_\nu \qquad (c_{\mu\nu} = - c_{\nu\mu})$$

telle que :

1° Elle s'annule quand on y remplace les x et les y par les éléments de deux lignes quelconques de Ω;

2° Soit

$$\xi_\mu + i\eta_\mu = \sum_j \lambda_j \omega_{j\mu}.$$

On doit avoir quelles que soient les λ

$$(2) \qquad \sum c_{\mu\nu} \xi_\mu \eta_\nu \neq 0.$$

Lorsque Ω satisfait à ces deux conditions, nous dirons, avec M. Scorza, que c'est une *matrice de Riemann*.

---

m'ait interprété comme il l'a fait dans sa Leçon inaugurale du Collège (voir ce *Bulletin*, juin 1922, p. 226).

Il convient de rappeler ici que M. Rosati par la méthode duelle de celle de M. Scorza a obtenu des résultats importants sur les correspondances entre les courbes algébriques. Enfin dans sa Thèse de 1912, M. Cotty a employé la méthode Scorza, que G. Humbert aurait communiquée en 1909 à ses auditeurs du Collège de France. Toutefois M. Cotty ne l'appliqua qu'au cas $p = 2$, alors que les résultats de M. Scorza sont surtout significatifs pour $p > 2$. D'ailleurs M. Scorza n'apprit l'existence du travail de M. Cotty que de moi-même et ceci en décembre 1920.

(¹) *Transactions of the American Math. Soc.*, vol. 22, 1921.

Le corps de fonctions abéliennes relatif à Ω se réduit à des fonctions rationnelles de certaines fonctions entières dites *intermédiaires*, qu'un changement linéaire de variables permet de ramener à des thêtas.

3. Introduisons maintenant les deux entiers h, k, tels que :

1° $1 - k =$ le nombre de formes alternées (1) distinctes satisfaisant à la première condition ci-dessus;

2° $1 + h =$ le nombre de formes non alternées, distinctes, telles que (1), satisfaisant à la même condition.

Enfin, s'il y a une deuxième matrice de Riemann Ω', de genre p', nous considérons l'entier λ, nombre de formes distinctes à coefficients rationnels,

$$\sum_{1}^{2p}{}_{\mu}\sum_{1}^{2p'}{}_{\nu}\, c_{\mu\nu} x_{\mu} y_{\nu},$$

s'annulant quand on y remplace les x par les éléments d'une ligne quelconque de Ω, en même temps que les y par ceux d'une ligne quelconque de Ω'.

Tout ceci s'éclaire d'un jour nouveau avec l'interprétation géométrique suivante qui forme la base des raisonnements de M. Scorza. Considérons $\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \ldots, \omega_{j2p}$, comme coordonnées homogènes de point dans un S_{2p-1} (nous désignons par S_k un espace à k dimensions); les p points ainsi obtenus déterminent un espace linéaire de dimensions minimum les contenant, soit τ. Désignons par $\bar{\tau}$ l'espace imaginaire conjugué, c'est-à-dire celui analogue à τ, relatif aux p points aux coordonnées imaginaires conjuguées de celles des p précédents. Alors *une forme* (1), *alternée ou non, représente, quand on l'égale à zéro, une réciprocité rationnelle de* S_{2p-1} *maintenant invariants les deux espaces conjugués* τ, $\bar{\tau}$. D'une façon plus précise, si l'on remplace les x par les coordonnées d'un point M quelconque de l'un de ces espaces,

$$\sum c_{\mu\nu} x_{\mu} y_{\nu} = 0 \tag{3}$$

est l'équation d'un hyperplan qui passe par M. Si (1) est alternée,

(3) *est l'équation d'un complexe rationnel auquel appartiennent toutes les droites de* τ *ou de* $\bar{\tau}$. De là, un sens géométrique précis pour h, k, λ, que je me dispense d'énoncer.

Du théorème fondamental, on déduit que :

1° τ *est un* S_{p-1} *sans points réels*, c'est-à-dire qu'il est indépendant de $\bar{\tau}$;

2° *Ni* τ *ni* $\bar{\tau}$ *ne sont contenus dans des hyperplans réels:*

3° *Les éléments d'une colonne de* Ω *ne peuvent être tous nuls.*

4. L'étude des fonctions abéliennes conduit à ne pas différentier entre une matrice Ω et une autre Ω', représentable en notation symbolique par $\Omega' = A.\,\Omega.\,B$, où A est une matrice carrée quelconque d'ordre p et B en est une d'ordre $2p$, à coefficients rationnels, leurs déterminants n'étant pas nuls. On dit que Ω et Ω' sont *isomorphes*. Il s'agit donc surtout d'étudier les propriétés invariantes par rapport à l'isomorph sme. La représentation ci-dessus montre que l'effet de A consiste à remplacer simplement les p points fixant τ par p autres, tandis que B est une homographie effectuée sur S_{2p-1}. D'où, résultat immédiat, h, k, λ *sont invariants par rapport à l'isomorphisme.*

5. Du théorème d'existence, on déduit encore qu'une réciprocité rationnelle générique de Ω n'est pas dégénérée. Soient r_1, r_2 deux d'entre elles. $B = r_1 r_2$ est une *homographie rationnelle* de S_{2p-1} qui maintient τ et $\bar{\tau}$ invariants. En exprimant que le transformé de chacun des p points servant à définir τ appartient encore à cet espace, on obtient les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de B

$$(4) \qquad \sum^{\nu} \omega_{j\nu} b_{\nu\mu} = \sum^{k} \lambda_{jk}\, \omega_{k\mu},$$

où les b sont les termes de B et les λ des nombres définis par (4) elle-même. Symboliquement, on peut écrire, Λ étant la matrice aux λ_{jk},

$$(4') \qquad \Omega B = \Lambda \Omega.$$

Ces relations ne sont autres que celles bien connues que fournit la multiplication complexe.

Réciproquement, si Ω possède l'homographie rationnelle B et la réciprocité rationnelle r, Br en est une réciprocité rationnelle aussi. On en conclut de suite que *le nombre d'homographies rationnelles linéairement indépendantes est précisément* $1 + h$.

Il est clair que si B et B' sont deux homographies rationnelles, B + B' et BB' en sont aussi. Par suite, résultat fort important, *les homographies rationnelles se combinent comme les nombres d'une algèbre à* $1 + h$ *unités, attachée au domaine des nombres rationnels.*

Dans toute algèbre il existe un entier ρ tel que tout nombre en satisfasse une équation de degré ρ au plus, à coefficients appartenant au domaine de rationalité sur lequel on a bâti l'algèbre. Ici toute homographie rationnelle de Ω va satisfaire à une équation

$$a_0 B^{\rho} + a_1 B^{\rho-1} + \ldots + a_{\rho} I = 0,$$

où les a_i sont des entiers et I représente la matrice identique. Le nombre ρ est encore un invariant par rapport à l'isomorphisme. C'est largement à l'étude de cet entier qu'est dévouée la deuxième partie du second Mémoire de M. Scorza, la première en étant consacrée à un exposé de la théorie des algèbres à plusieurs unités. Il obtient nombre de propriétés simples de ρ, ses limites supérieures, etc. Cette discussion le conduit à une de ses découvertes les plus intéressantes, celle de l'existence de *matrices non singulières et cependant douées de multiplication complexe*, c'est-à-dire pour lesquelles $h \neq 0$, $k = 0$. Ces matrices existent pour toutes les valeurs du genre sauf la valeur *deux*, qui offre ainsi la seule exception. Humbert, à qui rien de ce qui se passe pour $p = 2$ ne présentait de mystère, avait déjà remarqué, ce qui lui avait paru assez curieux, que seules les surfaces hyperelliptiques singulières possèdent des multiplications complexes. Cela veut dire que pour $p = 2$, $h \neq 0$ entraîne $k \neq 0$. La question est maintenant complètement éclaircie. Je puis dire, en passant, que j'ai obtenu un résultat un peu plus général que celui de M. Scorza, comprenant même le sien comme cas particulier, sans passer par les fourches caudines des algèbres hypercomplexes. A l'époque, M. Scorza

n'avait d'ailleurs fait qu'énoncer son résultat sans le démontrer.

6. Écrivons que le déterminant de $B - \xi I$ est nul. On obtient ainsi une équation de degré $2p$ à coefficients entiers, $f(\xi) = 0$. C'est l'*équation caractéristique* de l'homographie (Frobenius). On a

$$f(\xi) = f_1(\xi) f_2(\xi),$$

où f_1 et f_2 sont des polynomes de degré p à coefficients imaginaires conjugués. $f_1(\xi) = 0$ est l'équation caractéristique de la matrice A de la relation (4') relative à B. On conclut de ceci que les racines réelles de f sont de multiplicité paire. L'étude de ces racines peut servir de base à une classification des matrices de Riemann. On en obtient le type le plus simple quand f est irréductible dans le domaine des nombres rationnels, auquel cas Ω est isomorphe à

$$\| 1, \ \xi_j, \ \xi_j^2, \ \ldots, \ \xi_j^{2p-1} \| \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$, étant les racines de f_1. Ce résultat, dû à Frobenius, peut se généraliser, comme j'ai eu l'occasion de le faire récemment. La démonstration qu'en donne M. Scorza est d'ailleurs d'une simplicité remarquable.

7. Certes un des résultats les plus élégants de toute la théorie des fonctions abéliennes est le théorème de Picard-Poincaré sur la réduction des périodes. En substance, il revient à ceci : Supposons Ω isomorphe à une matrice de la forme

$$\left\| \begin{matrix} \Omega_1 & 0 \\ P & Q \end{matrix} \right\|,$$

où Ω_1 est de Riemann de genre $p_1 < p$, P et Q sont des matrices quelconques et le zéro représente une matrice à termes tous nuls. Ω_1 est ce que M. Scorza nomme *axe* de Ω, terme qui se justifie par des considérations de géométrie projective. Une matrice en possédant un est dite *impure*. Supposons Ω impure et isomorphe à

$$\left\| \begin{matrix} \Omega_1 & 0 \\ 0 & \Omega_2 \end{matrix} \right\|.$$

Les axes Ω_1, Ω_2 sont dits *complémentaires.* Le théorème que nous avions en vue s'énonce ainsi : *A tout axe Ω_1 en correspond un complémentaire Ω_2.* En d'autres termes, si Ω est impure elle est isomorphe à une matrice du type que nous venons d'écrire. Il faut lire la démonstration de M. Scorza, qui ne comprend guère qu'une demi-page, pour comprendre la puissance de sa méthode, dont c'est bien là la caractéristique : Une fois le début admis, le reste va de soi-même.

Prenant le théorème de Picard-Poincaré comme point de départ, notre auteur fait une étude à fond des matrices impures, des relations entre leurs nombres h, k et les nombres h, k, λ, des axes, soit dans le cas particulièrement simple ci-dessus, soit dans le cas plus général où la matrice est isomorphe à une autre de type

$$\left\| \begin{array}{cccc} \Omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Omega_2 & \dots & . \\ .. & .. & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \Omega_n \end{array} \right\|$$

La conclusion de la discussion est ce beau théorème : *Toute matrice de Riemann est isomorphe à une matrice du type précédent, où chaque Ω est de la forme*

$$\left\| \begin{array}{cccc} \omega & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega & \dots & . \\ . & . & \dots & . \\ 0 & 0 & \dots & \omega \end{array} \right\|$$

ω étant elle-même pure. Deux ω relatives à des Ω_i distinctes ne sont pas isomorphes. L'ensemble des Ω_i est essentiellement unique.

De là et d'une discussion ultérieure s'ensuit toute une série de corollaires relatifs aux nombres h, k, dont nous allons rappeler quelques-uns :

1° Pour une matrice pure h [illegible] $2p - 1$, k [illegible] $2p - 2$;

2° Pour toute matrice h [illegible] $2p^2 - 1$, k [illegible] $p^2 - 1$. Les valeurs

limites sont effectivement atteintes quand Ω est isomorphe à

$$\begin{Vmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & \ldots & . & . \\ . & . & . & . & \ldots & . & . \\ 0 & . & . & . & \ldots & 1 & \alpha \end{Vmatrix}$$

où α est un nombre quadratique imaginaire;

3° Les nombres h, k peuvent avoir des valeurs quelconques au plus égales à leurs maxima. Cependant ces valeurs ne peuvent être associées arbitrairement. Au contraire, pour les matrices impures, il y a des valeurs lacunaires, sur lesquelles M. Scorza apporte d'importantes précisions.

8. La deuxième partie du premier Mémoire de M. Scorza contient une des plus belles applications qu'il ait considérées : détermination complète des groupes de transformations birationnelles des surfaces hyperelliptiques. Les surfaces qui en possèdent ont fait l'objet de nombreuses recherches. Il faut signaler tout particulièrement les Mémoires de MM. Enriques et Severi et de MM. Bagnera et de Franchis, consacrés à la détermination des surfaces à groupes finis et à leur étude géométrique; enfin un travail de Humbert où il étudie les groupes des surfaces dites « de Jacobi » (surfaces images des couples de points d'une courbe de genre deux). M. Scorza a jugé avec raison, que même n'eût-il pas de résultat nouveau à nous donner, ce qui n'est pas le cas, il valait la peine de refaire l'étude de la question en se plaçant strictement au point de vue de la première partie de son travail. Ω étant de genre deux, il remarque qu'il s'agit en somme de déterminer ses homographies à termes entiers, de déterminant unité, ce qu'il réussit à faire de façon aussi complète qu'élégante.

Tout d'abord, il faut classifier les matrices en question suivant les valeurs de h et k. On trouve ainsi neuf types qu'il est inutile d'énumérer. Indiquons, à titre d'exemple, ce qui se passe dans un des cas les plus intéressants, celui où $h = 3$, $k = 1$. Trois types de groupes peuvent alors se présenter. Les deux les plus dignes de mention se rapportent à des surfaces images d'involutions

attachées à la surface de Jacobi de la courbe hyperelliptique $y^2 = x^5 + 1$. Le groupe de cette dernière surface ayant déjà été étudié par Georges Humbert, M. Scorza lui a donné le nom de « surface de Jacobi-Humbert ». Les multiplicateurs des homographies à termes entiers (ce ne sont autres que les racines de l'équation caractéristique) peuvent alors être exprimés de façon fort simple en termes des solutions en entiers de l'équation indéterminée $x^2 \pm 3\,xy + y^2 = \pm 5$.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

BOREL (Émile). — Méthodes et problèmes de la théorie des fonctions. Un volume gr. in-8° de IX-147 pages, de la collection de monographies *Sur la théorie des fonctions*. Paris, Gauthier-Villars, 1922.

Pour définir la nature de ce nouvel Ouvrage de M. Borel et pour montrer le but qu'il s'est proposé en l'écrivant, je ne puis mieux faire que de reproduire textuellement la fin de sa préface.

« Cet Ouvrage, qui est le neuvième publié sous ma signature dans cette Collection, sera donc vraisemblablement mon dernier livre de théorie des fonctions; j'y ai rassemblé un certain nombre de Notes et de Mémoires qui n'avaient pas trouvé place dans les Ouvrages antérieurs et dont certains me paraissent cependant pouvoir être le point de départ de recherches nouvelles. Je les ai fait précéder d'une courte *Introduction* où j'ai indiqué de quelle utilité peuvent être les comparaisons et le langage de la biologie en théorie des fonctions.

» Dans une brève conclusion, je signale quelques-unes des questions qui me semblent devoir être étudiées, sinon résolues; elles sont difficiles; mais il est rare que les efforts tentés pour résoudre une question difficile soient entièrement vains; s'ils ne conduisent pas à la solution de la question, ils ouvrent d'autres voies, parfois plus intéressantes encore. »

Il est impossible de résumer ici cette *Introduction* de quelques pages où M. Borel esquisse la comparaison entre le but, le développement, les tendances de la théorie des fonctions et ceux de la biologie, il faut la lire; avec son talent habituel, l'auteur y indique les analogies et les différences et montre de quel secours cette comparaison peut être pour faire comprendre en peu de mots l'intérêt et la légitimité de l'étude de certaines théories mathématiques.

Le corps de l'Ouvrage est divisé en quatre Chapitres groupant 18 Notes extraites des *Comptes rendus* et 9 Notes et Mémoires divers, publiés de 1890 à 1919.

Le premier Chapitre *sur les domaines et la théorie des ensembles* expose les idées de l'auteur sur la mesure et la classification des ensembles. Bien que, dans la petite introduction qui précède les sept Mémoires constituant ce Chapitre, M. Borel parle avec sympathie des efforts des mathématiciens qui étudient les ensembles en eux-mêmes d'une façon de plus en plus abstraite, ce point de vue est tout l'opposé du sien; dans ses recherches sur la mesure des ensembles, sur l'intégration, sur la représentation des fonctions, comme d'ailleurs dans tous les domaines où il a déployé son activité, il a toujours été guidé par le souci des applications. Ses idées à ce sujet sont exposées d'une façon magistrale dans le Mémoire *Sur le calcul des intégrales définies* (1) qui est le développement des seconde et troisième Notes de ce Chapitre et dans la Note *Sur les définitions analytiques et sur l'illusion du transfini* (quatrième Note du Chapitre). C'est ce sens des réalités qui a conduit M. Borel à n'employer que des définitions constructives et à chercher à écarter des raisonnements mathématiques les êtres qui ne sont pas bien définis, c'est-à-dire dont on ne possède pas un mode de construction régulier à partir d'êtres plus simples. A ce même souci de préparer les applications se rattache la première Note du Chapitre dans laquelle l'auteur démontre, sans les nombres transfinis, un cas particulier du théorème de M. Baire sur les fonctions limites de fonctions continues. C'est de même l'édification de la théorie des fonctions monogènes non analytiques, dont l'intérêt a encore été accru par les communications récentes de MM. Borel, Denjoy et Carleman, qui a conduit l'auteur à faire une étude approfondie des ensembles de mesure nulle. Les principaux résultats obtenus à ce sujet sont donnés dans les deux Mémoires sur *Les ensembles de mesure nulle* et *Sur la classification des ensembles de mesure nulle* qui terminent le premier Chapitre. M. Borel appelle *ensemble régulier* (linéaire) *de mesure nulle* un ensemble défini au moyen d'une double suite d'intervalles $\sigma_{n;h}$,

(1) *Journal de Mathématiques*, 1912.

appartenant à un segment *ab*, tels que la somme des longueurs des intervalles $\sigma_{n,1}$ soit finie et que $\sigma_{n,h+1}$ soit intérieur à $\sigma_{n,h}$ et tende vers un point déterminé A_n de *ab* lorsque *h* croît indéfiniment; l'ensemble régulier est l'ensemble des points intérieurs, quel que soit *h*, à l'un au moins des intervalles $\sigma_{n,h}$, les points A_n en sont les points fondamentaux. Tout ensemble de mesure nulle appartient à un ensemble régulier. On peut ramener l'étude d'un ensemble régulier dont les points fondamentaux sont denses sur *ab* à celle d'un autre dont les points fondamentaux sont les points d'abscisse rationnelle compris entre 0 et 1; il en résulte qu'un ensemble régulier a la puissance du continu. On classe ces ensembles d'après la rapidité de la décroissance du reste de la série $\sum_n \sigma_{n,h}$. Dans le second Mémoire, M. Borel considère une classe particulière d'ensembles réguliers : étant donnée sur un segment une suite infinie d'intervalles σ_p dont la série des longueurs est convergente, les points appartenant à une infinité de ces intervalles constituent un ensemble simple. Tout ensemble régulier, sauf peut-être certains points fondamentaux, peut être obtenu en prenant les points communs à une suite d'ensembles simples. L'auteur étudie les ensembles simples en les comparant à des ensembles simples particuliers définis par des intervalles dont les extrémités sont des points d'abscisses décimales jouissant de certaines propriétés. M. Borel montre sur un exemple que sa classification des ensembles de mesure nulle a une valeur absolue.

Le second Chapitre réunit trois Mémoires sur *les opérations et les développements en séries*. Dans le premier (de 1890) l'auteur montre notamment qu'un changement de l'ordre des termes d'une série semi-convergente n'altère pas la somme lorsque le produit du déplacement du terme de rang *n* par la valeur absolue maximum des termes qui le suivent tend vers zéro lorsque *n* croît indéfiniment. Le Mémoire *Sur les fonctions de deux variables réelles* donne, pour celles de ces fonctions qui sont indéfiniment différentiables dans un carré du plan Oxy, un développement en série dérivable terme à terme. Ce résultat généralise celui donné par M. Borel dans sa thèse; dans la démonstration le théorème de P. du Bois-Reymond sur les fonctions croissantes est utilisé pour prouver la conver-

gence de certaines approximations successives et celle du développement. Le Mémoire sur *l'intégration des fonctions non bornées et les définitions constructives*, écrit en réponse à une polémique récente ouverte par M. Lebesgue, précise de nouveau le point de vue de l'auteur sur l'orientation qu'il convient de donner aux recherches de théorie des fonctions. Tant au point de vue des applications qu'à celui de la simplicité de l'exposition dans l'enseignement, M. Borel pense qu'il y a intérêt à se limiter actuellement dans la théorie de l'intégration et de la mesure aux fonctions de classe finie, au sens de M. Baire. Les difficultés qui se présentent lorsqu'on veut passer d'une théorie plus générale à des applications précises sont en somme celles que l'on rencontre dès les éléments lorsqu'on introduit les nombres irrationnels quelconques, celles aussi auxquelles on se heurte lorsqu'on essaye de classer les fonctions croissantes les plus générales. Les réflexions qui terminent ce Mémoire se rattachent ainsi à celles qui sont développées au Chapitre suivant.

Le troisième Chapitre renferme dix Notes consacrées à *la théorie de la croissance* et à l'étude *du rôle des constantes arbitraires*. On sait l'importance des contributions apportées par M. Borel à la théorie des fonctions entières, l'une des plus originales et des plus fécondes semble être d'avoir distingué et étudié la classe des fonctions à croissance régulière, les seules que l'on rencontre en pratique; il donna pour la première fois les résultats relatifs à ces fonctions dans une Note des *Comptes rendus*, la troisième de ce Chapitre, dans laquelle il signalait en même temps un procédé simple pour construire des fonctions à croissance très irrégulière. Ce procédé est développé dans la Note suivante, il a été utilisé depuis lors par divers auteurs. La première Note du Chapitre, *Sur la croissance des fonctions définies par des équations différentielles*, a un objet différent, on s'y occupe de donner une limitation de la croissance d'une classe de fonctions ne dépendant que d'un nombre fini de constantes, en utilisant le théorème de du Bois-Reymond sur les suites de fonctions croissantes et en faisant l'hypothèse essentielle que les constantes ne peuvent prendre que les valeurs d'un certain ensemble dénombrable; la croissance ne serait plus limitée si les constantes étaient arbitraires. Ce rôle des

constantes arbitraires est encore mis en évidence dans la Note de la page 112; l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \psi(x, y),$$

où le second membre est une fonction entière convenablement choisie des deux variables peut admettre pour solution unique une fonction non analytique lorsque l'irrationnelle a satisfait à certaines conditions. Pour étudier la nature arthmétique des irrationnelles, on peut chercher à les approcher par certaines classes de nombres (formant un ensemble dénombrable), à cet ordre d'idées se rattachent les Notes *sur l'approximation du nombre e par les nombres algébriques* et *sur l'approximation des nombres quelconques par les nombres quadratiques.* Dans une autre Note, *sur l'approximation des nombres réels par des nombres rationnels*, qui a été développée en partie dans les Leçons sur la théorie de la croissance. M. Borel donne notamment cet important résultat : à tout nombre entier A on peut faire correspondre un entier B tel que tout nombre a puisse être approché à moins de $1 : q^2\sqrt{5}$ par une fraction au moins dont le dénominateur q est compris entre A et B. Ailleurs l'auteur introduit la notion de hauteur d'un nombre x appartenant à un ensemble dénombrable donné E de nombres réels : la hauteur qui est un entier positif tel que, à chacune de ses valeurs ne corresponde qu'un nombre fini d'éléments de E et qui est en relation avec le nombre des opérations élémentaires permettant de définir x, semble devoir jouer un rôle important dans les questions d'approximation.

Le dernier Chapitre contient sept Notes traitant plus particulièrement de la *théorie des fonctions d'une variable complexe.* On sait qu'il y a une infinité de fonctions entières prenant des valeurs données pour une suite de valeurs données de la variable (admettant le point à l'infini pour seul point limite); dans la Note *sur l'interpolation* on montre que la solution est unique si l'on ajoute la condition que la fonction cherchée est celle qui croît le moins vite, mais il est nécessaire que les données satisfassent elles-mêmes à certaines conditions comme cela a lieu dans certains problèmes analogues. En particulier, on peut écrire une série

entière de rayon de convergence unité sous la forme $\Sigma f(n) z^n$, où $f(x)$ est une fonction entière bien déterminée si $\Sigma f(n)$ converge: les propriétés de la série entière sur son cercle de convergence dépendent de la façon dont cette fonction entière se comporte à l'infini sur l'axe réel positif (deuxième Note). Le problème général de l'étude de l'indétermination d'une fonction analytique dans le voisinage d'un point singulier essentiel isolé, auquel M. Carleman vient de faire faire un progrès décisif, est abordé dans la septième Note. Une question connexe est celle de l'*étude asymptotique des fonctions méromorphes*, en utilisant son théorème bien connu qui est à la base de la théorie de la mesure des ensembles, M. Borel montre les conséquences que l'on peut tirer dans cette étude d'une méthode donnée par Boutroux dans sa thèse. Boutroux utilisait les propriétés asymptotiques des dérivées de la dérivée logarithmique d'une fonction entière dans l'étude de la croissance des solutions des équations différentielles de M. Painlevé. Une remarque importante à ce sujet (sixième Note) est que les équations différentielles actuellement connues dont toutes les solutions sont des fonctions entières s'écrivent de façon très simple en introduisant les invariants de certaines formes binaires. Dans la Note *sur la détermination de classes singulières de séries de Taylor*, on trouvera une méthode originale donnant des séries du type lacunaire admettant leur cercle de convergence comme coupure quels que soient les coefficients (pourvu qu'ils assurent la convergence). Enfin la Note *sur les fonctions de genre infini* donne, comme conséquence d'une formule de M. Jensen, une relation précise entre le nombre des zéros d'une fonction entière d'ordre infini intérieurs à un cercle et le maximum du module de la fonction sur ce cercle.

J'espère avoir montré par cette simple analyse de son contenu, quelle est la variété et en même temps l'unité de ce Livre. Tous ceux qui s'intéressent à la théorie des fonctions sauront gré à M. Borel d'avoir rassemblé pour eux sous une forme commode des travaux qui se trouvaient dispersés dans divers périodiques, dont quelques-uns sont déjà anciens mais n'ont pas perdu leur fraîcheur, et qui sont tous remarquables par la beauté des résultats qu'ils renferment ou par la lumière nouvelle qu'ils jettent sur des questions non encore résolues.

Georges Valiron.

ANNUAIRE POUR L'AN 1923, PUBLIÉ PAR LE BUREAU DES LONGITUDES, avec des notices scientifiques.

L'*Annuaire du Bureau des Longitudes pour* 1923 est divisé comme d'habitude en cinq Chapitres, dont voici l'analyse succinte.

Le Chapitre I contient le calendrier astronomique, avec toutes les données qui en dépendent, et les astrologues eux-mêmes s'il en reste, y trouveront de quoi construire leurs horoscopes dans les pages consacrées aux phénomènes célestes, c'est-à-dire aux aspects des astres. Il est terminé par une étude sommaire sur les règles des calendriers julien et grégorien, accompagnée de nombreux tableaux fournissant tous les renseignements qui peuvent intéresser les chronologistes et les computistes, en particulier la concordance entre les divers calendriers en usage.

Dans le Chapitre II, on trouve les notions indispensables sur la forme, les dimensions et la densité de la Terre, sur la pesanteur et ses variations, sur les coordonnées qui fixent la position d'un lieu terrestre; des tables étendues permettent le calcul des altitudes par les observations barométriques comme celui des réfractions. Un paragraphe spécial est consacré à l'étude de la température et de ses variations suivant l'altitude ou la profondeur du sol, suivant aussi les lieux et les saisons. Un autre est consacré aux données magnétiques. On peut regretter que ces dernières remontent à plus de dix ans, de sorte que leur utilisation actuelle dépend d'une large interpolation toujours un peu incertaine : mais la carte magnétique de la France est en cours de revision, et l'on doit espérer avoir bientôt des résultats plus satisfaisants.

Le Chapitre III est consacré à l'Astronomie. Après les explications relatives aux coordonnées astronomiques, vient un tableau fort utile donnant d'une façon complète l'heure légale dans les colonies françaises et à l'étranger. Les indications relatives au Soleil sont complétées par un très intéressant résumé de physique solaire dû à M. H. Deslandres; on trouve ensuite les données relatives à la Lune, aux grosses planètes et à leurs satellites, aux comètes périodiques et aux trois comètes apparues en 1921, aux constellations, avec les cartes qui facilitent leur observation, enfin un tableau des principales parallaxes stellaires.

Le Chapitre IV contient d'abord le tableau général des unités commerciales et industrielles dressé en exécution de la loi du 2 avril 1919 et du décret du 26 juillet de la même année : il est d'autant plus utile que tout le monde ne sait peut-être pas encore que la pression atmosphérique normale de $0^{m},76$ de mercure, par exemple, devrait être représentée légalement par 1,013 *hectopièze*, sans que l'on puisse d'ailleurs discerner le genre qu'il convient d'attribuer aux substantifs *pièze* et *sthène;* ceci doit nous aider à comprendre pourquoi tant d'années ont été nécessaires avant que le système métrique passât dans l'usage courant. On trouve ensuite des tables de comparaison avec les mesures des pays étrangers qui n'ont pas encore adopté complètement le système métrique, une note sur les mesures employées dans la pratique de la navigation et sur le tonnage des navires. Ce Chapitre devrait aussi contenir normalement un tableau complet des monnaies françaises et étrangères : il a paru qu'on pouvait le supprimer provisoirement sans dommage.

Contrairement aux précédents, le cinquième et dernier Chapitre ne conserve pas chaque année le même titre : consacré en 1922 aux données physiques et chimiques, il renferme en 1923 les statistiques géographiques et démographiques, et en outre des tables de survie, d'intérêt et d'amortissement. MM. L. Gallois et L. Gentil, professeurs à l'Université de Paris, ont bien voulu prêter leur concours au Bureau des Longitudes pour la rédaction difficile de cette importante partie de l'Annuaire. Au cours de ces dernières années, en effet, il s'est produit de nombreux changements dans la géographie politique : de nouveaux États ont été créés; les territoires d'un certain nombre de pays ont été modifiés; mais les traités et conventions qui changent l'ancien état de choses ne sont pas encore tous signés ou ratifiés. Dans l'est de l'Europe ainsi que dans l'Asie Mineure, la situation politique ne permet pas de pouvoir donner des résultats présentant quelque certitude.

Les très nombreux tableaux qui forment ce Chapitre sont donnés dans l'ordre suivant : généralités sur la Terre; — les parties du Monde moins la France; — la France; — les possessions françaises; — Paris. Malgré leur incertitude sur quelques points, ils seront sans doute bien accueillis des lecteurs désireux de se rendre compte avec quelque netteté de la géographie nouvelle.

La partie purement documentaire de l'Annuaire est complétée par les données principales du calendrier astronomique pour 1924 : grâce à ce supplément d'un caractère préventif, l'*Annuaire du Bureau des Longitudes* se montre véritablement « propre à régler ceux de toute la République », suivant l'expression du règlement imposé par la Convention.

Le volume est terminé comme d'habitude par des notices. Continuant son enquête si appréciée sur le climat de la France, M. G. Bigourdan traite cette année de l'eau atmosphérique (évaporation, humidité, nébulosité, pluies, etc.), dans un article extrêmement documenté, et enrichi de nombreuses cartes : la petitesse du format traditionnel de l'Annuaire a même obligé le Bureau de réunir à part quelques-unes de ces cartes, les plus importantes, montrant la distribution des pluies en France mois par mois. Quelques esprits superficiels peuvent mettre en doute la valeur des moyennes relatives aux phénomènes météorologiques ; ils compareraient volontiers leur marche irrégulière, dans nos climats surtout, à celle de ces fonctions bizarres et sans loi dont s'occupent avec prédilection les mathématiciens modernes ; ils penseraient peut-être aussi que l'observation courante est bien suffisante, et que vouloir en énoncer les résultats sous forme de règles paraît aussi inutile que les leçons du professeur de philosophie de M. Jourdain. Il leur suffira de lire le beau travail de M. Bigourdan pour se détromper ; ils y apprendront, s'ils veulent bien reconnaître qu'ils peuvent encore apprendre quelque chose, comment on met sous forme scientifique les résultats des observations prolongées pendant de longues années, et comment on peut en tirer les conclusions les plus intéressantes au point de vue de la prévision du temps quelques heures à l'avance, ce qui est en somme le problème fondamental de la météorologie.

L'Annuaire pour 1923 s'achève par deux notices nécrologiques, écrites par MM. P. Appell et A. Jobin, pour rappeler la mémoire de Gabriel Lippmann et de Jules Carpentier, disparus à quelques jours d'intervalle en juillet 1921. En voyant revivre ces deux figures de savants, qui ont occupé, à des titres divers, une si grande place dans l'histoire de la Physique moderne, on comprendra mieux l'étendue des regrets de leurs collègues au Bureau des Longitudes. H. Andoyer.

MANNING (W. A.). — Primitive groups. Part. I Stanford University Publications. University Series. Published by the University, Palo Alto (California), 1921, 108 pages.

Ce petit Livre a sans nul doute pour objet de préparer le terrain pour une œuvre plus ample puisque la définition des *groupes primitifs* (*voir* plus bas) ne nous y est donnée qu'à la page 37. Et en effet il traite surtout des groupes de permutation et des groupes linéaires en tant qu'ils se rattachent au but principal de l'Ouvrage. La discussion ne se restreint un peu que dans les deux derniers des six Chapitres dont se compose le Livre.

L'auteur introduit dans son premier Chapitre la théorie des groupes de permutation, y compris le théorème de Sylow. Très tôt (p. 10) nous trouvons les substitutions linéaires et homogènes. Tout groupe fini est holoédriquement isomorphe à un groupe de permutations, tout groupe de permutations à un groupe linéaire, d'où l'importance de ces derniers et quelque justification pour les présenter de bonne heure. Ceci est suivi du théorème de Lagrange sur les ordres des sous-groupes, quelques définitions élémentaires et enfin la théorie qui conduit au théorème de Sylow.

Le deuxième Chapitre contient les questions relatives à la transitivité et à la primitivité et qui ne demandent pas un entraînement trop spécial à la théorie des groupes. Soit G un groupe de permutations agissant sur les lettres $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Si l'on peut grouper les a_i en systèmes de m lettres permutés dans leur ensemble par G, le groupe est *imprimitif;* il est *primitif* dans le cas contraire. Bien entendu $1 < m < n$. G imprimitif est holoédriquement isomorphe à un groupe de moins de n lettres. Enfin si G contient une permutation échangeant deux quelconques des a, il est *transitif*, autrement il est *intransitif*. Ceci se généralise et l'on peut considérer les groupes permutant un couple a_i, a_k avec un autre quelconque (groupes doublement transitifs), etc.

Dans le troisième Chapitre M. Manning s'occupe des *caractéristiques des groupes*. La *caractéristique* d'une permutation est le nombre de lettres qu'elle maintient fixes, celles de G sont celles de ses permutations. Pour l'étude de ces entiers il convient d'uti-

liser les groupes linéaires. Aussi M. Manning nous donne-t-il d'abord une discussion assez serrée de la réduction canonique d'une substitution linéaire. Il introduit ensuite les formes hermitiennes et leur réduction canonique, se servant de tout ceci pour étudier les caractéristiques. Le Chapitre suivant est consacré aux applications des caractéristiques à l'étude de certains groupes particuliers importants, par exemple ceux d'ordre $p^r q^s$ (p, q premiers). Enfin l'auteur termine avec deux Chapitres où il discute quelques-unes des phases plus difficiles des groupes transitifs et primitifs, certains des théorèmes qu'il y donne lui étant dus en propre.

S. LEFSCHETZ.

SHAW (J. B.). — VECTOR CALCULUS WITH APPLICATION TO PHYSICS. Un volume in-8°, v-314 pages. Van Nostrand and Co, New-York, 1922.

Le calcul vectoriel est d'un intérêt considérable pour les physico-mathématiciens, d'une importance certes moindre pour les mathématiciens purs. Ne consiste-t-il pas au fond en un système de notations qui met en évidence les propriétés d'invariance par rapport à certains groupes? Ces groupes sont d'une importance capitale en physique, partant le physicien aime assez cette algèbre un peu compliquée et artificielle où les propriétés qui l'intéressent surtout sont constamment sous la main. Le géomètre, lui, trouve plus commode, en général, de n'en faire qu'un usage fort modéré.

M. Shaw est un adepte de la tradition de Hamilton, sans contredit un des savants les plus remarquables qui se soient jamais occupés de vecteurs. Son intérêt personnel porte notre auteur aux questions de nombres hypercomplexes (*hypernombres* comme il les nomme), d'algèbres plus ou moins commutatives ou associatives. Érudit profond il ne manque pas de nous donner *toutes* les notations en usage, leur origine... que ne peut-on ajouter leur fin, du moins pour la plupart. « Plusieurs systèmes de calcul vectoriel ont été inventés, nous dit-il dans son introduction, différant dans leur notation et dans les lois de combinaison des symboles. L'absence d'une notation uniforme est déplorable, mais il ne

semble guère que l'on puisse voir adopter bientôt un système uniforme. Des systèmes en existence ont été poussés avec ardeur par des mathématiciens de même nationalité que leurs auteurs et il y a manque d'accord quant à leur plus ou moins grande simplicité, adaptation au but, exactitude. » Après cela peut-on s'étonner que le public mathématique ne fasse montre pour le Calcul vectoriel que d'un enthousiasme restreint?

L'ouvrage de M. Shaw se distingue par de très nombreuses applications en partie usuelles, en partie nouvelles. Parmi ces dernières citons celles aux questions de géométrie métrique des courbes et des surfaces, pour lesquelles l'auteur a une prédilection soutenue. Les six premiers Chapitres sont pris par une discussion générale tant pour le plan que pour l'espace, discussion où l'auteur insiste beaucoup sur les rapports du Calcul vectoriel avec les quaternions. Dans le Chapitre VII apparaissent les applications de nature purement vectorielles. Nous revenons ensuite à la théorie pure et nous apprenons à différentier et intégrer, chose indispensable pour les applications physiques, applications avec lesquelles se termine l'Ouvrage. Mais l'auteur n'a pas attendu ses derniers Chapitres pour donner des applications physiques, car on en voit apparaître dès le début et on les retrouve un peu partout.

Les étudiants des Universités de France liront avec fruit cet Ouvrage fort compréhensif. Hors de leur pays le Calcul vectoriel a été l'objet de controverses aussi nombreuses qu'ardentes. En parcourant M. Shaw ils comprendront pourquoi ce genre de questions a suscité de telles tempêtes dans ce verre d'eau mathématique où tout ne devrait être que calme et paix.

Salomon Lefschetz.

MÉLANGES.

SUR DEUX FORMULES DE LAGRANGE;

PAR M. B. NIEWENGLOWSKI.

Soient $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_\rho$ les ρ valeurs d'une fonction rationnelle des racines d'une équation algébrique donnée; $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\rho$ les valeurs correspondantes d'une autre fonction rationnelle des mêmes racines, la fonction ψ_i restant invariable pour les substitutions de groupe de φ_i.

Nous posons

$$F(\varphi) = (\varphi - \varphi_1)(\varphi - \varphi_2)\ldots(\varphi - \varphi_\rho).$$

La formule de Lagrange fournit un polynome entier de degré $\rho - 1$, $H(\varphi)$ tel que

$$\psi_i = H(\varphi_i) \qquad \text{pour } i = 1, 2, 3, \ldots, \rho.$$

Si l'on pose

$$K(\varphi) \equiv H(\varphi) + F(\varphi)\,G(\varphi),$$

$G(\varphi)$ étant un polynome entier en φ, on a encore

$$K(\varphi_i) = H(\varphi_i) = \psi_i$$

et réciproquement, s'il en est ainsi, la différence $K(\varphi) - H(\varphi)$ étant nulle pour $\varphi = \varphi_i$ ($i = 1, 2, \ldots, \rho$), on a

$$K(\varphi) - H(\varphi) \equiv F(\varphi)\,G(\varphi).$$

Il n'y a donc qu'*un seul* polynome entier $H(\varphi)$, de degré inférieur à ρ, qui convienne. Il est donné par la formule

$$(1) \qquad H(\varphi) = \sum_{i=1}^{i=\rho} \psi_i \frac{\left[\dfrac{F(\varphi)}{\varphi - \varphi_i}\right]}{F'(\varphi_i)}.$$

Cela étant, désignons pour abréger, par v_i la fraction associée à ψ_i c'est-à-dire

$$v_i = \frac{\left[\dfrac{F(\varphi)}{\varphi - \varphi_i}\right]}{F'(\varphi_i)},$$

et soit $f(x)$ un polynome entier tel que $f(1) = 1$ et $f(0) = 0$. Il est évident que

$$\sum_{i=1}^{i=\rho} \psi_i f(v_i)$$

est un polynome entier en φ, dont les coefficients, comme ceux de $H(\varphi)$, sont symétriques par rapport aux racines $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ce polynome, de degré $\rho - 1$, se réduisant à ψ_i pour $\varphi = \varphi_i$; donc

$$(2) \qquad \sum_{i=1}^{i=\rho} \psi_i f(v_i) = H(\varphi) + F(\varphi)\, G(\varphi).$$

La formule (2) donne donc une infinité de solutions. *Mais elle ne les donne pas toutes.* Pour le voir aisément, nous prendrons un exemple très simple. Appelons x, y, z les trois racines de l'équation $x^3 + px + q = 0$ et considérons les quantités

$$\varphi_1 = yz, \qquad \varphi_2 = zx, \qquad \varphi_3 = xy;$$
$$\psi_1 = x, \qquad \psi_2 = y, \qquad \psi_3 = z.$$

On obtient facilement

$$F(\varphi) = \varphi^3 - p\varphi^2 - q^2,$$
$$\frac{F(\varphi)}{\varphi - \varphi_1} = \varphi^2 + x^2\varphi - qx,$$
$$F'(\varphi_1) = \frac{q}{x^2}(3q - 2px).$$

Pour faciliter les calculs, on peut poser

$$3q + 2px = 3qu, \qquad \text{d'où} \qquad x = \frac{u-1}{a},$$

en désignant par a la fraction $\dfrac{2p}{3q}$; u vérifie l'équation

$$u^3 - 3u^2 - \frac{\Delta}{9q^2}u - \frac{\Delta}{27q^2} = 0 \qquad (\Delta = 4p^3 + 27q^2).$$

L'expression de Lagrange devient

$$\frac{1}{3q^2}\sum \frac{x^3}{u}(\varphi^2 + x^2\varphi - qx).$$

On obtient aisément

$$H(\varphi) = -\frac{1}{q}\varphi^2 + \frac{p}{q}\varphi,$$

donc

$$\psi_i = -\frac{1}{q}\varphi_i^2 + \frac{p}{q}\varphi_i,$$

ce qui donne, pour $i = 1$, par exemple,

$$x = -\frac{1}{q}(yz)^2 + \frac{p}{q}(yz),$$

résultat évident.

Prenons maintenant

$$f(x) = \lambda x^2 + \mu x \qquad \text{avec } \lambda + \mu = 1.$$

Nous aurons alors à calculer la somme

$$(3)\qquad \frac{\lambda}{9q^3}\sum x^5\left(\frac{\varphi^2 + x^2\varphi - qx}{u}\right)^2 - \frac{\mu}{3q^2}\sum \frac{x^3}{u}(\varphi^2 + x^2\varphi - qx),$$

c'est-à-dire

$$(4)\qquad \lambda(A\varphi^4 + B\varphi^3 + C\varphi^2 + D\varphi + E) + \mu\left(-\frac{1}{q}\varphi^2 - \frac{p}{q}\varphi\right),$$

où A, B, C, D, E sont des coefficients, fonctions déterminées de p et q, et qu'il est inutile de calculer. Ce polynome, étant du quatrième degré, est de la forme

$$(5)\qquad \left(-\frac{1}{q}\varphi^2 + \frac{p}{q}\varphi\right) + F(\varphi)(\alpha\varphi + \beta).$$

en identifiant les termes du quatrième et du troisième degré des expressions (4) et (5), on doit poser

$$\lambda A = \alpha, \qquad \lambda B = \beta + p\alpha,$$

et, par suite,

$$(6)\qquad \beta = \frac{B - Ap}{A}\alpha.$$

Or, l'expression (5) est une solution, quels que soient α et β; on peut choisir α et β de façon que la condition (5) ne soit pas vérifiée; donc l'expression (3), tout en donnant une infinité de solutions, ne les fournit pas toutes.

Occupons-nous, maintenant, des solutions fractionnaires. Lagrange donne une formule permettant d'obtenir une fraction rationnelle de φ qui se réduit à ψ_i pour $\varphi = \varphi_i$. Il considère la somme

$$\frac{1}{F'(\varphi)} \sum_{i=1}^{i=\rho} \psi_i \frac{F(\varphi)}{\varphi - \varphi_i},$$

qui se réduit à

$$\frac{L(\varphi)}{F'(\varphi)}$$

avec des coefficients égaux à des fonctions symétriques de x_1, x_2, ..., x_n. $L(\varphi)$ est du degré $\rho - 1$, comme $F'(\varphi)$. Toutefois, le degré de $L(\varphi)$ peut s'abaisser. La fraction $\frac{L(\varphi)}{F'(\varphi)}$ n'est pas toujours irréductible. Ainsi, dans l'exemple que nous avons déjà examiné, on a à calculer

$$\frac{1}{3\varphi^2 - 2p\varphi} \sum x(\varphi_1^2 + x^2\varphi - qx),$$

dont la valeur est

$$\frac{2pq - 3q\varphi}{3\varphi^2 - 2p\varphi},$$

qui se réduit à $-\frac{q}{\varphi}$.

On peut obtenir une infinité d'autres fractions rationnelles de la façon suivante. Soit $\Theta(x)$ une fraction rationnelle telle que

$$\Theta(0) = 0, \qquad \Theta(1) = 1,$$

si l'on pose, comme plus haut,

$$v_i = \frac{\left[\frac{F(\varphi)}{\varphi - \varphi_i}\right]}{F'(\varphi_i)},$$

la somme

(7) $$\sum_{i=1}^{i=\rho} \psi_1 \Theta(v_i)$$

est une fraction rationnelle de φ à coefficients rationnels ; et pareillement, en posant

$$w_i = \frac{F(\varphi)}{\varphi - \varphi_i},$$

il en est de même de la somme

$$(8) \qquad \frac{1}{F'(\varphi)} \sum_{i=1}^{i=\rho} \psi_1 \Theta(w_i)$$

et chacune de ces sommes se réduit à ψ_i pour $\varphi = \varphi_i$.

Mais nous allons voir que, si $\frac{A}{B}$ désigne une fraction rationnelle en φ, *irréductible*, on peut obtenir aisément toutes les autres fractions rationnelles, se réduisant, comme la première, à ψ_i pour $\varphi = \varphi_i$.

En effet, soit $\frac{A'}{B'}$ une fraction rationnelle de φ, égale à ψ_i pour $\varphi = \varphi_i$ ($i = 1, 2, \ldots, \rho$). La différence

$$AB' - BA'$$

est nulle pour $\varphi = \varphi_i$ ($i = 1, 2, \ldots, \rho$). Donc

$$AB' - BA' = F(\varphi)G(\varphi).$$

Or, on peut trouver les polynomes u, v entiers en φ et tels que

$$Au - Bv = 1,$$

puisque A et B sont supposés premiers entre eux. On peut donc écrire

$$AvB' - A'Bv = F(\varphi)G(\varphi)v.$$

d'où

$$A(vB' - uA') + A' = F(\varphi)G(\varphi)v;$$

donc

$$A' = A(uA' - vB') + F(\varphi)G(\varphi)v$$

et, pareillement,

$$B' = B(uA' - vB') + F(\varphi)G(\varphi)u.$$

D'ailleurs, w désignant un polynome entier en φ, arbitraire, il est bien évident qu'on peut prendre

$$A' = Aw + F(\varphi)A_1(\varphi),$$
$$B' = Bw + F(\varphi)B_1(\varphi),$$

$A_1(\varphi)$ et $B_1(\varphi)$ étant deux polynomes entiers quelconques. On voit que les formes (7) et (8) représentent une infinité de solutions et ne les donnent pas toutes.

Pratiquement, les deux formes de Lagrange suffisent, et il est même suffisant de former le polynome $H(\varphi)$.

En effet, le produit

$$H(\varphi)F'(\varphi)$$

étant de degré $2\rho - 2$, soit

$$H(\varphi)F'(\varphi) = F(\varphi)Q(\varphi) + R(\varphi),$$

le degré de $R(\varphi)$ étant plus petit que ρ, on en déduit

$$\frac{R(\varphi)}{F'(\varphi)} = H(\varphi) - \frac{F(\varphi)Q(\varphi)}{F'(\varphi)},$$

donc

$$\frac{R(\varphi_i)}{F'(\varphi_i)} = H(\varphi_i) = \psi_i$$

et, par suite,

$$R(\varphi) = \sum_{i=1}^{i=\rho} \psi_i \frac{F(\varphi)}{\varphi - \varphi_i}.$$

SUR L'ABAISSEMENT DU DEGRÉ DE L'ÉQUATION MODULAIRE.

(Extrait d'une lettre adressée à M. Émile PICARD par M. JOSEPH PLEMELJ.)

Dans sa célèbre lettre à A. Chevalier, Galois expose en quelques mots les découvertes qu'il a faites relativement à l'équation modulaire. Le passage qui traite de l'abaissement du degré qui, en général, n'est pas possible, sauf par exception, comme Galois l'a dit, pour les cas $p = 5, 7, 11$, est d'un intérêt particulier. Dans son Mémoire de 1853, E. Betti (*Annali di scienze matematiche*, t. IV, 1853) a construit les groupes que Galois n'avait que rapidement ébauchés. En 1858, C. Jordan (Paris, *Comptes rendus*, t. LXVI, 1868) a réussi à démontrer qu'en effet la

réduction du degré n'est possible que dans les cas $p = 5, 7, 11$, quoique l'on n'ait pas encore compris, tant que je sache, la vraie portée des mots par lesquels Galois avait esquissé la méthode dont il s'est servi.

Les lignes qui vont suivre ont pour but de retracer la pensée de Galois. En effet, la non-primitivité, qu'il a sans doute d'abord constatée, du groupe cherché lui a suggéré l'introduction de la notion des « lettres conjointes ». Dès que l'on se place à ce point de vue, on n'a, pour la solution complète du problème, qu'à suivre, à l'aide de raisonnements d'une simplicité étonnante, un chemin tout indiqué.

Le groupe $\mathfrak{G}$ de l'équation modulaire est constitué de toutes les permutations, en nombre $(p+1)p\frac{p-1}{2}$, que l'on obtient en opérant sur les lettres $z = \infty, 0, 1, \ldots, p-1$ chacune des substitutions $\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des nombres entiers réduits par rapport au module premier p, le déterminant $\alpha\delta - \beta\gamma$ étant égal à un résidu quadratique (carré), mod$p$. Toutes les lettres ∞, $0, 1, \ldots, p-1$ jouent le même rôle dans $\mathfrak{G}$, de façon que l'on puisse, sans changer le groupe, remplacer deux lettres différentes quelconques a, b par ∞, 0 à l'aide de la transformation

$$\zeta = (b-a)\frac{z-b}{z-a}.$$

Il s'agit d'examiner, s'il existe dans $\mathfrak{G}$ un sous-groupe $\mathfrak{H}$ de $(p+1)\frac{p-1}{2}$ permutations. A supposer que ce groupe existe, soit $\mathfrak{K}$ le sous-groupe de $\mathfrak{H}$, formé par toutes les substitutions de $\mathfrak{H}$ qui ne font pas changer de place ∞, et qui par suite sont de la forme $\lambda = (z, az+b)$; à supposer en outre que dans $\mathfrak{H}$ les substitutions $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ soient telles, qu'elles remplacent ∞ par $0, 1, \ldots, p-1$ respectivement, le groupe $\mathfrak{H}$ sera décomposé en

$$\mathfrak{H} = \mathfrak{K} + \mathfrak{K}\sigma_0 + \mathfrak{K}\sigma_1 + \ldots + \mathfrak{K}\sigma_{p-1}.$$

Au cas où tous les $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ n'existeraient pas, le nombre de ces termes serait diminué. Si nous démontrons que toutes les substitutions de $\mathfrak{K}$ peuvent être mises en même temps sous la

forme $\varkappa = (z, m^2 z)$, nous aurons deux résultats à la fois, c'est-à-dire que :

1° $\mathfrak{K}$ est constitué précisément de toutes les $\frac{p-1}{2}$ substitutions $\varkappa = (z, m^2 z)$, le nombre m^2 étant un carré quelconque, et que :

2° Les $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ existent tous dans $\mathfrak{H}$,

car, au cas contraire, le nombre $(p+1)\frac{p-1}{2}$ des permutations de $\mathfrak{H}$ ne pourrait être atteint. Or, ce nombre n'étant pas divisible par p, $\mathfrak{H}$ ne contiendra aucune substitution du degré p, donc dans $\lambda = (z, az+b)$ le coefficient $a \equiv 1 \pmod{p}$, sauf dans la substitution identique. Outre ∞, il existe encore, par rapport à chaque substitution de cette forme, une lettre qui n'est pas changée; parmi ces lettres nous pouvons, en vertu de ce qui a été dit plus haut, supposer comprise la lettre o (Galois, *Œuvres*, p. 28, l. 1). Comme $\lambda^{-1}\varkappa^{-1}\lambda\varkappa = [z, z+b(m^2-1)]$, en même temps que $\varkappa$ et λ appartiennent à $\mathfrak{K}$, nous avons $b=0$ (c. q. f. d.). Par conséquent, toute substitution de $\mathfrak{H}$, laissant en place ∞, ne dérange pas non plus o et réciproquement, et ces substitutions forment le groupe $\mathfrak{K}$. Démontrons maintenant que σ_0, et par suite toutes les substitutions de $\mathfrak{K}\sigma_0$, permutent entre elles les lettres ∞ et o, ce qui veut dire que :

3° $\mathfrak{K}\sigma_0$ est formé de toutes les $\frac{p-1}{2}$ substitutions $\left(z, -\frac{m^2}{z}\right)$, le nombre m^2 étant un carré quelconque.

En effet, les substitutions $\sigma_0\mathfrak{K}\sigma_0^{-1}$ ne changent pas la lettre ∞, donc non plus o; d'autre part, si b est la lettre que σ_0 remplace par ∞, les substitutions $\sigma_0\mathfrak{K}\sigma_0^{-1}$ la laissent invariable; donc $b=0$.

Le rapport étroit entre ∞ et o a pour conséquence le groupement de $p-1$ lettres ∞, o, 1, ..., $p-1$ en $\frac{p+1}{2}$ couples de « lettres conjointes » de manière que chaque substitution de $\mathfrak{H}$ ne change que l'ordre des couples, tandis qu'elle ne peut jamais séparer deux lettres conjointes. Les substitutions de $\mathfrak{K}$, ne dérangeant ni ∞ ni o, il est clair d'abord que toute substitution de $\mathfrak{K}\sigma_c$ remplace par les mêmes lettres que σ_c les lettres ∞ et o, c'est-à-

dire par c et c' par exemple. Définissons maintenant les « lettres conjointes » à l'aide des couples formés — chacun deux fois, comme nous le verrons — de deux lettres par lesquelles les substitutions des systèmes respectifs $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}\sigma_0$, $\mathfrak{K}\sigma_1$, ..., $\mathfrak{K}\sigma_p$ remplacent ∞ et o. Cela étant, nous voyons, d'abord, qu'une substitution quelconque χ de $\mathfrak{H}$ fait du couple c, c' les mêmes deux lettres qui dérivent de ∞, o par la substitution $\sigma_c\chi$, et qui sont encore, puisque $\sigma_c\chi$ est contenu dans un des systèmes $\mathfrak{K}\sigma$, deux lettres conjointes, et ensuite que, σ_c faisant de ∞, o les lettres c, c', la substitution $\sigma_0\sigma_c$ change ∞, o en c', c, ce qui prouve que $\sigma_0\,\sigma_c$ est contenu dans $\mathfrak{K}\sigma_{c'}$, dont toutes les substitutions partant changent ∞, o en c', c.

La définition des lettres conjointes étant ainsi achevée, la formation du groupe cherché est immédiate :

En effet, la substitution $(z, m^2 z)$ de $\mathfrak{H}$ change les lettres 1, M en m^2, m^2M. « Donc si M est la lettre conjointe de 1, la lettre conjointe de m^2 sera m^2M. » Ici deux cas sont à distinguer : 1° M est un carré ; 2° M est non-carré.

Premier cas. — Si M est un carré, les couples m^2, m^2M ne contiennent que tous les carrés, d'où il s'ensuit que, de même entre eux, les non-carrés sont joints en couples. Deux lettres conjointes, sauf ∞, o, étant donc toujours de la forme x, $x\mathrm{N}^2$, il faut, puisque la substitution $(z, \mathrm{N}^2 z)$ les change en $x\mathrm{N}^2$, $x\mathrm{N}^4$, que l'on ait $\mathrm{N}^4 \equiv 1$ ou bien $\mathrm{N}^2 \equiv -1 \pmod{p}$. Cela prouve que $p = 4n+1$ et qu'en dehors de ∞, o tout couple consiste en deux lettres x, $-x$ de signes contraires. D'autre part, cette forme des couples est la seule possible dans le cas $p = 4n+1$, car la substitution $\left(z, \frac{1}{z}\right)$ qui est, -1 étant un carré, contenue dans $\mathfrak{H}$, fait de 1, M les lettres 1, M^{-1}, donc $\mathrm{M} \equiv \mathrm{M}^{-1}$ ou bien $\mathrm{M} \equiv -1 \pmod{p}$.

Mais à ces conditions $\mathfrak{H}$ n'existe que pour $p = 5$.

Effectivement, toute substitution de $\mathfrak{H}$ qui change le couple 1, -1 en ∞, o et qui, à cause de cela, est de la forme $\left(z, a\frac{z+1}{z-1}\right)$, fait de deux autres lettres conjointes quelconques x, $-x$ deux

conjointes. Donc

$$a\frac{-x+1}{-x-1} = -a\frac{x+1}{x-1} \qquad \text{ou bien} \qquad x^2+1 \equiv 0 \pmod p$$

et l'on doit avoir aussi $2^2+1 \equiv 0 \pmod p$, donc $p = 5$.

Deuxième cas. — Si M est non-carré, on aura $p = 4n+3$ et nous trouverons, à l'exception de ∞, 0 en faisant x égal aux $\frac{p-1}{2}$ résidus, chacun des couples des lettres conjointes sous la forme x, $x\mathrm{M}$.

Toute substitution de $\mathfrak{H}$ qui fait de 1, M le couple ∞, 0 et qui est par suite de la forme $\left(z, a\frac{z-\mathrm{M}}{z-1}\right)$ change (pour $p > 3$) tout autre couple x, $x\mathrm{M}$ en deux lettres conjointes, d'où il s'ensuit :

$$a\frac{x\mathrm{M}-\mathrm{M}}{x\mathrm{M}-1} = \mathrm{M}a\frac{x-\mathrm{M}}{x-1}, \qquad \text{d'où} \qquad x+\frac{1}{x}-1 \equiv \mathrm{M} \pmod p,$$

ou bien

$$\mathrm{M}a\frac{x\mathrm{M}-\mathrm{M}}{x\mathrm{M}-1} = a\frac{x-\mathrm{M}}{x-1}, \qquad \text{d'où} \qquad x+\frac{1}{x}-1 \equiv \mathrm{M}^{-1} \pmod p,$$

selon que $a\frac{x-\mathrm{M}}{x-1}$ est un carré ou non, le nombre M signifiant toujours le même non-carré. Chaque carré x, excepté 1, doit satisfaire à une de ces deux congruences, dont l'une et l'autre admettent au plus deux racines, d'ailleurs réciproques entre elles $\pmod p$. On n'aura donc plus que $1+4$ carrés, et il ne reste que les cas $p = 7$ et $p = 11$.

Pour $p = 7$, nous avons les carrés 1, 2, 4 et en vertu de $2.4 \equiv 1 \pmod 7$, les nombres 2 et 4 sont réciproques entre eux $\pmod 7$. En les portant dans $x+\frac{1}{x}-1$ on trouve 5, un non-carré, en effet, que l'on doit, par conséquent, mettre soit pour M, soit pour M^{-1}. La formation du groupe $\mathfrak{H}$ n'est donc possible que pour $\mathrm{M} = 5$ et $\mathrm{M} = 3$.

Pour $p = 11$, les carrés sont 1, 3, 4, 5, 9 et, d'après $3.4 \equiv 1$ et $5.9 \equiv 1 \pmod{11}$, les nombres 3 et 4, de même 5 et 9 sont réci-

proques entre eux. En les portant dans $x + \frac{1}{x} - 1$ on obtient les nombres 6, respectivement 2, qui sont, en effet, deux non-carrés, même réciproques entre eux; on doit, par conséquent, mettre l'un pour M, l'autre pour M^{-1}. Cette fois aussi, le groupe $\mathfrak{H}$ peut être formé de deux manières, c'est-à-dire avec $M = 2$ et avec $M = 6$.

Le fait prouvé que les congruences $x + \frac{1}{x} - 1 \equiv M$, respectivement $\equiv M^{-1}$, sont résolubles garantit l'existence de $\mathfrak{H}$. Ces congruences nous montrent immédiatement que, x étant un carré, $M - 1$ l'est aussi; en outre, puisque le déterminant $a(M-1)$ de $\left(z, a\frac{z-M}{z-1}\right)$ est un carré, il faut que a le soit de même; les lettres a, aM provenant par la substitution $\left(z, a\frac{z-M}{z-1}\right)$ de ∞, o ont par suite la forme voulue des couples. En écrivant les congruences comme suit : $\frac{x-M}{x-1} \equiv \frac{1}{x}$, respectivement $\equiv Mx$, nous voyons que $a\frac{x-M}{x-1}$ est, comme il est nécessaire, un carré dans la première congruence et un non-carré dans la seconde. Donc la substitution $\left(z, a\frac{z-M}{z-1}\right)$ et $(z, m^2 z)$, $\left(z, -\frac{1}{z}\right)$ de même, ne séparent pas les lettres conjointes. Il s'ensuit que si l'on en compose une nouvelle substitution, celle-ci ne peut que permuter les couples.

Étant donné que seuls les couples se changent en ∞, o la substitution $\left(z, a\frac{z-c'}{z-c}\right)$ ne peut faire partie de $\mathfrak{H}$ que si les lettres c, c' sont conjointes. D'après la forme $a(c'-c) = ac'\left(1 - \frac{c}{c'}\right)$ du déterminant, on voit, $1 - M$ et $1 - M^{-1}$ étant toujours des non-carrés, que le produit ac' lui-même sera un non-carré. Inversement, il est clair que toute substitution de la forme $\left(z, a\frac{z-c'}{z-c}\right)$ peut être composée des éléments de tout à l'heure.

En ajoutant quelques mots à ceux de Galois, nous pouvons résumer :

Le sous-groupe $\mathfrak{H}$ de $(p+1)\frac{p-1}{2}$ substitutions n'existe dans le groupe de l'équation modulaire que pour $p = 3, 5, 7, 11$. Pour $p = 3$ et 5 il y a un seul système de sous-groupes conjugués;

pour $p=7$ et 11 il y en a deux. L'un des groupes conjugués est formé par les $(p+1)\frac{p-1}{2}$ substitutions

$$(z, m^2 z), \quad \left(z, -\frac{m^2}{z}\right), \quad \left(z, a\frac{z-c'}{z-c}\right),$$

m^2 étant un carré, c, c' deux lettres conjointes, exception faite de ∞ et 0, et a un non-résidu ou un résidu suivant que c' est résidu ou ne l'est pas.

Pour $p=3$, il y a deux couples des lettres conjointes ∞, 0 et 1, 2.

Pour $p=5$, les lettres

$$\infty, \quad 1, \quad 2$$

ont respectivement pour lettres conjointes

$$0, \quad 4, \quad 3.$$

Pour $p=7$, on trouve deux représentants des groupes $\mathfrak{H}$, dans lesquels

$$\infty, \quad 1, \quad 2, \quad 4$$

ont respectivement pour lettres conjointes

$$0, \quad 3, \quad 6, \quad 5, \qquad \text{si } M=3,$$

ou bien

$$0, \quad 5, \quad 3, \quad 6, \qquad \text{si } M=5.$$

Pour $p=11$, on a encore deux représentants des $\mathfrak{H}$ dans lesquels

$$\infty, \quad 1, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 9$$

ont respectivement pour lettres conjointes

$$0, \quad 2, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \quad 7, \qquad \text{si } M=2,$$

ou bien

$$0, \quad 6, \quad 7, \quad 2, \quad 8, \quad 10, \qquad \text{si } M=6.$$

Si $v_\infty, v_0, v_1, \ldots, v_{p-1}$ sont les racines de l'équation modulaire respective, la somme $\sum v_c v_{c'}$, par exemple, étendue sur les $\frac{p+1}{2}$ couples des lettres conjointes c, c' ne prendra que p valeur et sera, par conséquent, racine d'une équation du degré p.

« Ainsi pour les cas de $p=5$, 7, 11, l'équation modulaire s'abaisse au degré p.

» En toute rigueur, cette équation n'est pas possible aux cas plus élevés. »

Par ces lignes, j'ai pris place, bien tard, il est vrai, parmi les gens qui trouvent, comme Galois l'a dit, leur profit à creuser dans les profondeurs qu'il a rendues accessibles aux recherches des géomètres de tout un siècle. Aussi j'ose vous envoyer ces remarques, pour que vous en fassiez l'usage que vous jugerez bon, si toutefois vous trouvez qu'aujourd'hui encore elles pourraient contribuer à l'intelligence de certains passages de la lettre de Galois.

JOSEPH PLEMELJ.

LE PASSAGE A LA LIMITE DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DANS LES PROBLÈMES AUX LIMITES;

PAR M. MICHEL PLANCHEREL

(Zurich).

---

1. Soit

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{du}{dx}\right]+q(x)u+\lambda u=f(x) \tag{1}$$

une équation différentielle du second ordre, adjointe à elle-même. λ désigne un paramètre. Supposons que $p(x)>0$ dans $0\leqq x\leqq 1$, que $p(x)$, $\frac{dp}{dx}$, $\frac{d^2p}{dx^2}$, $q(x)$, $f(x)$ sont continues dans cet intervalle et proposons-nous d'intégrer cette équation sous les conditions

$$u(0)=u(1)=0. \tag{2}$$

L'objet essentiel de cette Note est de montrer que cette intégration peut s'effectuer *en la considérant comme cas limite de la résolution de l'équation aux différences*

$$p_i n^2\Delta^2 u_{i-1}+n\Delta p_i n\Delta u_i+(q_i+\lambda)u_i=f_i \qquad (i=1,2,\ldots,n-1), \tag{3}$$

sous les conditions

$$u_0=u_n=0. \tag{4}$$

lorsque $n \to \infty$. p_i, q_i, f_i sont des abréviations pour $p\left(\frac{i}{n}\right)$, $q\left(\frac{i}{n}\right)$, $f\left(\frac{i}{n}\right)$ et

$$\Delta u_i = u_{i+1} - u_i, \qquad \Delta^2 u_i = \Delta(\Delta u_i) = \Delta u_{i+1} - \Delta u_i = u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i.$$

Nous montrerons donc que lorsque i, n augmentent indéfiniment de manière que $\lim \frac{i}{n} = x$, uniformément dans $(0, 1)$

$$\lim u_i = u(x), \qquad \lim n\Delta u_i = \frac{du}{dx}, \qquad \lim n^2 \Delta^2 u_{i-1} = \frac{d^2 u}{dx^2},$$

lorsque λ n'est pas une valeur fondamentale du problème différentiel homogène. Nous verrons de plus que les valeurs fondamentales et les fonctions fondamentales du problème différentiel homogène peuvent se calculer comme limites des expressions correspondantes du problème aux différences.

En d'autres termes, nous montrerons que *la méthode classique d'intégration de Cauchy-Lipschitz est encore applicable dans le cas des problèmes aux limites*. Nous dirons au paragraphe 6 quelques mots sur l'application de cette méthode aux problèmes aux limites de la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires du type elliptique.

L'intérêt de la recherche que nous entreprenons ne nous paraît pas seulement théorique. Cette recherche légitime un procédé de calcul numérique des solutions des problèmes aux frontières qui présente sur le procédé de calcul de Ritz l'avantage de permettre le calcul des dérivées de la solution cherchée. L'intérêt me paraît encore accru par le fait que cette recherche permet encore de répondre à une question qui se pose en mécanique lorsqu'on essaye de passer du discret au continu.

2. On peut en effet tenter en mécanique, de deux manières différentes, le passage du discret au continu. Ou bien on effectue le passage à la limite sur les équations du mouvement du système discret ; on est ainsi conduit à des équations différentielles ou aux dérivées partielles que l'on regarde comme les équations du mouvement du système continu limite. Ou bien on effectue ce passage à la limite non plus sur les équations mais sur les solutions du

problème discret. Alors que le premier procédé est celui que les mathématiciens du XVIIIe et du début du XIXe siècle ont souvent utilisé pour trouver les équations du mouvement des milieux continus, par exemple celles des milieux élastiques, le second a donné entre les mains de physiciens tels que lord Rayleigh — d'où le nom de « principe de Rayleigh » donné par F. Klein — une méthode heuristique féconde pour trouver les propriétés des solutions des problèmes aux limites de la théorie des équations aux dérivées partielles (existence d'une infinité de vibrations fondamentales, etc.).

La question se pose tout naturellement de savoir si ces deux passages à la limite conduisent au même résultat. Si l'on se borne en particulier à l'étude des petits mouvements autour d'une position d'équilibre stable on peut se demander : Les petits mouvements d'un système continu à une infinité de degrés de liberté peuvent-ils être envisagés comme cas limites de petits mouvements d'un système fini de points matériels ou d'un système à un nombre fini de degrés de liberté? Mathématiquement — pour un milieu continu à une dimension — le problème se réduit à celui que nous nous sommes posés au paragraphe 1.

Pour le physicien, la réponse ne fait pas de doute et la question peut lui paraître oiseuse. Je crois par contre que la question est de celles qui intéressent le mathématicien. Dans le mémoire du tome 12 de l'*American Journal of Mathematics : Sur les équations aux dérivées partielles de la physique mathématique* où il donne sa méthode de balayage pour la résolution du problème de Dirichlet, H. Poincaré consacre le paragraphe 7 : « Retour à l'hypothèse moléculaire » à montrer la valeur heuristique du principe de Rayleigh. Il y annonce qu'il essaiera dans un mémoire ultérieur la justification mathématique de ce principe. Mais, à vrai dire, la méthode qu'il a donnée plus tard dans son célèbre mémoire de 1894 des *Rendiconti di Palermo* contient bien une démonstration des résultats déduits heuristiquement à l'aide du principe de Rayleigh, par exemple l'existence d'une infinité de sons fondamentaux d'une membrane, mais elle ne me paraît pas constituer une justification directe du principe lui-même. Nous devons d'ailleurs être bien loin de nous en plaindre, car c'est à ce mémoire des *Rendiconti* que nous devons les découvertes de Fredholm et

les beaux travaux de Hilbert sur les équations intégrales. Nous verrons précisément que nous pourrons ramener la résolution du problème posé au paragraphe I à n'être qu'une application de la méthode de passage du fini à l'infini que Hilbert développe dans sa première note sur les équations intégrales ([1]).

Illustrons sur un exemple très simple les considérations précédentes.

Une corde homogène, parfaitement flexible, est tendue entre deux points fixes. Trouver le mouvement libre transversal de la corde, en négligeant l'action de la pesanteur et en supposant le mouvement dans un plan.

Pour mettre le problème en équation, Jean I Bernoulli (1727) substitue d'abord à la corde un fil sans poids tendu entre les deux points fixes et portant un système de $n+1$ points matériels équidistants et de même masse. Il obtient ainsi un système discret à $n-1$ degrés de liberté (deux des points matériels se trouvent aux extrémités fixes du fil) dont il peut écrire les équations du mouvement.

Prenant la position d'équilibre du fil comme axe des x, l'une de ses extrémités comme origine et la longueur du fil comme unité, numérotant ensuite les points matériels de 0 à n et appelant y_k l'écart du $(k+1)^{\text{ième}}$ de sa position d'équilibre, Bernoulli montre que

$$\frac{d^2 y_k}{dt^2} = A^2 \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

en désignant par $h = \frac{1}{n}$ la distance de deux points matériels consécutifs dans leur position d'équilibre et par A^2 une constante positive qui dépend de la tension du fil et des masses des points matériels. Pour que le problème soit déterminé il faut, en plus des conditions initiales (positions et vitesses), ajouter les conditions aux limites $y_0 = y_n = 0$ qui expriment que le fil est fixé aux extrémités. En augmentant indéfiniment le nombre des points matériels portés par le fil tout en laissant leur masse totale constante, Ber-

([1]) D. HILBERT, *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* I. Mitteilung (Göttinger Nachrichten, 1904).

noulli conclut que l'équation du mouvement de la corde est

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = A^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

Comme il s'intéresse spécialement aux vibrations harmoniques, il pose

$$y_k = u_k \cos \nu t, \quad \text{ou} \quad y = u \cos \nu t,$$

et obtient soit l'équation aux différences du problème discret

$$(5) \qquad -\nu^2 u_k = A^2 \frac{u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}}{h^2},$$

soit l'équation différentielle du problème continu

$$(6) \qquad -\nu^2 u = A^2 \frac{d^2 u}{dx^2}.$$

Les conditions aux limites deviennent

$$u_0 = u_n = 0 \qquad \text{et} \qquad u(0) = u(1) = 0.$$

Alors que Bernoulli intègre l'équation différentielle (6), Lagrange résout sous les conditions aux limites données l'équation aux différences (5), met sa solution sous la forme explicite $u_n = F(k, n; \nu)$ et effectue le passage à la limite $\frac{k}{n} \to x$ dans cette solution. Il retrouve de la sorte, comme nous le verrons au paragraphe 4, les résultats de Bernoulli.

3. Une équation aux différences, linéaire, d'ordre k, n'est pas autre chose qu'une équation récurrente du type

$$\sum_{\rho=0}^{k} a_{\nu\rho} u_{\nu+\rho} = b_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

où $a_{\nu\rho}$, b_ν sont des quantités données et $u_{\nu+\rho}$ les inconnues. Si nous utilisons les notations du calcul des différences et posons

$$\begin{aligned}
\Delta^0 u_\nu &= u_\nu, \\
\Delta u_\nu &= u_{\nu+1} - u_\nu, \\
\Delta^2 u_\nu &= \Delta(\Delta u_\nu), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
\Delta^p (u_\nu) &= \Delta(\Delta^{p-1} u_\nu), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

l'équation prend la forme

$$\sum_{\rho=0}^{k} \alpha_{\nu\rho}\, \Delta^{\rho} u_{\nu} = b_{\nu},$$

d'où son nom.

Considérons pour fixer les idées une équation d'ordre 2

$$L(u_i) = a_i u_{i-1} + b_i u_i + c_i u_{i+1} = f_i.$$

Multiplions-la par l'indéterminée v_i et faisons la somme. On a

$$(7) \qquad \sum L(u_i) v_i = \sum M(v_i) u_i,$$

en notant

$$M(v_i) = c_{i-1} v_{i-1} + b_i v_i + a_{i+1} v_{i+1}.$$

$M(v_i)$ est dite *l'adjointe* de $L(u_i)$. L'identité (7) joue pour les équations aux différences le rôle de la formule de Green. En particulier, si $M(v_i) \equiv L(v_i)$, L est dite adjointe à elle-même. Ce sera le cas si $c_i = a_{i+1}$.

Soit à intégrer une équation aux différences du second ordre

$$L(u_i) = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

sous les conditions aux limites

$$u_0 = u_n = 0.$$

Ce système de $n+1$ équations algébriques linéaires à $n+1$ inconnues $u_0, u_1, \ldots, u_n$ a sa solution exprimable sous la forme

$$u_i = -\sum_{k=0}^{n} G_{ik} f_k \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Considérée comme fonction de l'indice i, G_{ik} vérifie les relations

$$L(G_{ik}) = \begin{cases} 0, & i \neq k \\ -1, & i = k \end{cases} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1;\ k = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

et les conditions aux limites

$$G_{ik} = 0, \qquad \text{pour } i = 0,\ i = n, \text{ quel que soit } k.$$

G_{ik} joue pour l'équation aux différences et les conditions aux limites données le même rôle que la fonction de Green pour un

problème différentiel. Aussi l'appellerons-nous du même nom [1].

De même que la fonction de Green d'une équation différentielle adjointe à elle-même est une fonction symétrique, la fonction de Green G_{ik} d'une équation aux différences adjointe à elle-même est symétrique : $G_{ik} = G_{ki}$.

Soit

$$L(u_i) + \lambda u_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$
$$u_0 = u_n = 0,$$

un problème aux limites, homogène, où L est adjointe à elle-même. L dérive alors d'une forme quadratique — le premier membre de la formule de Green est en effet alors bilinéaire symétrique — et l'on sait qu'il existe $n-1$ valeurs réelles $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ de λ pour chacune desquelles le problème possède une solution $(u_0, u_1, \ldots, u_n)$ non identiquement nulle. Désignons par

$$(8) \qquad \begin{cases} (u_0^{(\nu)}, u_1^{(\nu)}, \ldots, u_n^{(\nu)}) \\ \quad (u_0^{(\nu)} = u_n^{(\nu)} = 0) \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$$

ces solutions; nous les supposons encore normées par les conditions

$$u_0^{(\nu)2} + u_1^{(\nu)2} + \ldots + u_n^{(\nu)2} = n.$$

Le tableau (8) de ces solutions forme une matrice orthogonale et la fonction de Green de L (u_i) est

$$G_{ik} = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{u_i^{(\nu)} u_k^{(\nu)}}{\lambda_\nu}.$$

Cette formule est l'analogue de la décomposition de la fonction de Green d'un problème différentiel en série de fonctions fondamentales.

Par exemple, l'expression aux différences, adjointe à elle-même, $\Delta^2 u_{i-1} = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}$ a pour les conditions aux limites

---

(1) Ces analogies sont bien connues. *Voir*, par exemple, E. J. Routh, *Treatise on the dynamics of a system of rigid bodies* (London, Macmillan, 1892), t. II, chap. IX. *Voir* aussi : P. Funk, *Die linearen Differenzengleichungen und ihre Anwendung in die Theorie der Baukonstruktionen* (Berlin, Springer, 1920).

$u_0 = u_n = 0$ la fonction de Green

$$(9)\qquad G_{ik} = \begin{cases} \left(1 - \dfrac{i}{n}\right) k, & k \leq i \\ \left(1 - \dfrac{k}{n}\right) i, & k \geq i \end{cases} \qquad (i, k = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

L'expression $n^2 \Delta^2 u_{i-1}$ a, sous les mêmes conditions aux limites, la fonction de Green

$$(10)\qquad g_{ik} = \frac{1}{n^2} G_{ik}.$$

Or, l'équation aux différences

$$(11)\qquad n^2 \Delta^2 u_{i-1} - \lambda u_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

sous les conditions $u_0 = u_n = 0$ n'a de solution non identiquement nulle que lorsque λ est égal à l'une des $n - 1$ valeurs

$$(12)\qquad \lambda_p^n = 4 n^2 \sin^2 \frac{p\pi}{2n} \qquad (p = 1, 2, \ldots, n-1),$$

et les solutions normées y relatives sont

$$(13)\qquad u_i^{p,n} = \sqrt{2} \sin \frac{ip\pi}{n} \qquad (i = 0, 1, \ldots, n;\ p = 1, 2, \ldots, n-1).$$

On aura donc l'identité, facile à vérifier,

$$(14)\qquad g_{ik} = \frac{1}{n} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\sqrt{2} \sin \dfrac{ip\pi}{n} \cdot \sqrt{2} \sin \dfrac{kp\pi}{n}}{4 n^2 \sin^2 \dfrac{p\pi}{2n}} = \frac{1}{2 n^3} \sum_{p=1}^{n-1} \frac{\sin \dfrac{ip\pi}{n} \sin \dfrac{kp\pi}{n}}{\sin^2 \dfrac{p\pi}{2n}}.$$

(A suivre.)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

VILLEY (Jean). — LES DIVERS ASPECTS DE LA THÉORIE DE LA RELATIVITÉ. Un volume in-8° raisin (25 × 16) de 96 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1923. Prix 7fr50.

Accueillie par les uns avec une admiration enthousiaste, par les autres avec une certaine défiance ou même une hostilité déclarée, la Théorie de la Relativité, proposée par Einstein, excite actuellement la curiosité universelle. Tout le monde en parle, — *verba volant* — et même en écrit — *scripta manent* — souvent sans se douter de ce qu'elle est. Ce qui distingue les élèves, jeunes ou vieux, de M. Langevin, c'est qu'ils savent de quoi ils parlent. M. Villey est l'un d'eux, et son livre est d'autant plus intéressant que, dans sa deuxième Partie, il donne au lecteur le plan d'un des Cours que M. Langevin a faits depuis quelques années au Collège de France sur ces difficiles questions. A défaut du Livre que M. Langevin, toujours soucieux de perfection, ne s'est pas encore décidé à écrire, nous pourrons désormais savoir comment il présente, après mûre réflexion, l'enchaînement des idées directrices, avec un ordre, une logique et une précision qu'on ne trouve, je crois, dans aucune autre publication. Sous sa forme condensée, l'exposé de M. Villey rendra les plus grands services à tous ceux qui ont lu, mais sans assez d'ordre et de méditation, les Mémoires écrits par le fondateur de cette théorie et ses meilleurs commentateurs. La profondeur et la clarté caractéristiques de l'enseignement de M. Langevin aideront beaucoup de lecteurs à mettre de l'ordre dans leurs souvenirs, et à préparer les cadres où leurs nouvelles lectures viendront tout naturellement se classer à leur place logique.

Dans tout ce Livre, les méthodes de la théorie généralisée, appelée aussi quelquefois *théorie de la gravitation*, tiennent une

place prépondérante. Sans elles, il reste trop de mouvements rectilignes et uniformes dans la théorie dite *restreinte*, la première en date. Quelles que soient les difficultés mathématiques qui subsistent, d'abord pour énoncer d'une manière satisfaisante et correcte les problèmes classiques de gravitation dans le langage nouveau, et ensuite pour les résoudre, le sentiment s'impose, à mon avis, que la théorie généralisée en permet la réduction à un système d'équations de caractère exclusivement géométrique (Espace-Temps) qui coordonne numériquement tous les faits connus d'une manière exacte, tous ceux d'avant Michelson, et les nouveaux qui échappaient aux anciennes théories. A la vérité ce n'est qu'une coordination par équations, et non par images ou analogies avec nos représentations anciennes du monde; nous perdons les raisonnements quasi intuitifs qui nous étaient familiers, et fort utiles. Mais qu'on y prenne garde, et qu'on ne se trompe pas d'adresse pour les regrets et protestations; ce n'est pas Einstein et ses théories qui nous forcent à abandonner ces vieux modes de raisonnement, c'est l'expérience, celle de Michelson et Morley sur la propagation de la lumière, celle de Trouton et Noble sur la capacité des condensateurs. Nous pouvons bien ne pas nous intéresser aux phénomènes qui font intervenir une vitesse comparable à celle de la lumière, du moins à ceux pour lesquels le carré du rapport de ces deux vitesses n'est pas négligeable; il reste une multitude de faits à étudier et à éclaircir concernant la matière au repos ou à peu près, faits pour lesquels les résultats des théories d'Einstein sont d'accord avec ceux des anciennes théories. Mais, si nous ne consentons pas à ignorer totalement les expériences relatives aux grandes vitesses, nous sommes bien obligés d'avouer qu'elles brisent le cadre des conceptions anciennes et, en particulier, sont inconciliables avec un éther immobile, et qu'en outre, il n'existe jusqu'à présent aucun autre édifice théorique que celui d'Einstein pour grouper *tous* les faits bien observés. On peut, en paroles vagues, suggérer d'autres modes de coordination qui se relieraient plus facilement à nos anciennes habitudes de pensée; mais jusqu'à ce jour, ce ne sont que paroles auxquelles personne n'a réussi à donner de la précision.

Ainsi, nous possédons une coordination mathématique com-

plète, et nous n'en connaissons pas d'autre. La seule attitude d'esprit scientifique, c'est de se rendre maître de ces théories einsteiniennes, de les perfectionner, et, si possible, de se familiariser assez avec elles pour devenir capable de raisonnements presque intuitifs corrects.

M. Villey n'a pas essayé de vulgariser la théorie de la relativité d'Einstein, de donner au lecteur l'illusion qu'il a compris quelque chose sans un véritable effort et surtout sans une connaissance préalable approfondie de la Physique contemporaine, et sans notions de géométrie et d'analyse. Ce serait une tentative sans intérêt scientifique et destinée au plus complet échec. Mais tout le public de professeurs, de savants, d'ingénieurs, pourvus d'une forte instruction scientifique et connaissant le langage et l'écriture mathématiques, peut lire avec fruit son Livre.

Le premier Chapitre est surtout consacré à une analyse détaillée de l'Ouvrage publié, il y a trois ans, par l'astronome anglais Eddington, aussitôt après le succès des observations de l'éclipse de Soleil de 1919, ouvrage dont nous avons maintenant une traduction française, due à M. Rossignol. L'analyse qu'en fait M. Villey suggérera, je l'espère, à plus d'un lecteur, l'envie d'en prendre connaissance. En passant alternativement de l'un à l'autre ouvrage, je serais bien étonné si le lecteur ne trouvait pas qu'ils s'éclairent l'un l'autre et se complètent. D'ailleurs, après les deux Chapitres relatifs au livre d'Eddington et aux leçons de M. Langevin, le dernier Chapitre de M. Villey paraît facile à lire; il y met bien en valeur le caractère logique et imposant de l'édifice surgi du cerveau puissant d'Einstein, sans dissimuler qu'il est, pour ainsi dire, encore bien incomplètement meublé. Il met en évidence, avec enthousiasme, la beauté classique des grandes lignes du monument, l'unité du plan général, et sa fécondité. Cette junévile ardeur soutient l'attention du lecteur, l'empêche de trébucher aux passages difficiles, et le conduit sans défaillance jusqu'aux confins de l'Univers einsteinien.

MARCEL BRILLOUIN.

Table des matières.

Théorie de la relativité : Introduction. Einstein; La théorie de la relativité restreinte et généralisée. Einstein; La Géométrie et l'expérience. Einstein; L'éther et la théorie de la relativité. Eddington; Espace, Temps et Gravitation. Eddington; Partie théorique. Conclusion. — DEUXIÈME PARTIE. *L'aspect objectif de la Théorie de la relativité* : Introduction. A. Univers de Minkowski sans gravitation. Vecteurs électromagnétiques d'univers. Tenseurs par dérivation et invariants. Grandeurs obtenues par intégration d'univers. Généralisation du principe d'action stationnaire. B. Univers perturbé par gravitation. Éléments tensoriels généralisés. Lois invariantes; loi générale de gravitation. Loi de gravitation autour d'une masse unique. Conclusion. — TROISIÈME PARTIE. *Le contenu essentiel de la Théorie de la relativité* : Introduction. Notions de simultanéité et de durée. Caractère relatif de la simultanéité. Intervalle d'univers introduit par la propagation des perturbations électromagnétiques. Application de l'intervalle d'univers au mouvement d'un point matériel libre. Application à la dynamique du point matériel. Extension aux phénomènes de gravitation. Théorie géométrique de la gravitation.

SIR J. J. THOMSON (O. M., F. R. S). — LES RAYONS D'ÉLECTRICITÉ POSITIVE ET LEUR APPLICATION AUX ANALYSES CHIMIQUES. Traduit d'après la deuxième édition anglaise par M. R. FRIC, Ingénieur et A. CORVISY, Professeur agrégé de Physique, vol. in-8, 224 pages et 9 planches de photographies; prix 20^{fr}. Paris; Librairie scientifique J. Hermann, 6, rue de la Sorbonne.

Bien que s'adressant aux physiciens et aux chimistes, cet Ouvrage n'est pas dépourvu d'intérêt aux yeux des mathématiciens, non pas qu'il contienne quelque chose de nouveau ou de peu connu en mathématiques, mais parce qu'il nous présente un superbe exemple de résultats d'une haute importance physico-chimique obtenus par l'examen de lignes géométriques fournies directement par l'expérience elle-même.

Ce sont les rayons-canaux de Goldstein que l'auteur désigne sous le nom de *rayons d'électricité positive* ou de *rayons positifs*, afin de rappeler que ces rayons sont constitués, au moins en majeure partie, par des particules électrisées positivement. On sait que les rayons cathodiques sont formés de particules négatives, dont la déviation par un champ électrique et par un champ

magnétique a été utilisée autrefois par Sir J. J. Thomson pour déterminer la vitesse v et le rapport $\frac{e}{m}$ de la charge à la masse de ces particules. Il était naturel d'employer la même méthode pour déterminer la vitesse et la masse des particules positives; mais ici les difficultés sont beaucoup plus grandes pour diverses raisons : les rayons positifs sont beaucoup moins déviés que les rayons cathodiques par les forces magnétiques, et il faut, pour obtenir des déviations appréciables, des champs magnétiques de grande intensité; mais les difficultés proviennent surtout de l'ionisation intense que produisent les rayons sur le gaz restant dans le tube à décharge et aussi des radiations secondaires auxquelles ils donnent naissance. C'est pourquoi les expériences de Wien (1898), tout en donnant des indications précieuses, n'ont pu fournir pour $\frac{e}{m}$ des valeurs acceptables. Il était nécessaire, pour atténuer les causes d'erreur, d'expérimenter avec une très basse pression dans le tube à décharge, mais alors la décharge ne passe plus que si le tube a un diamètre considérable. Enfin, après de longues recherches, l'auteur a pu élaborer pour l'étude des rayons positifs une technique qui ne laisse rien à désirer et ne présente plus de grandes difficultés si l'on a la facilité de faire un vide très avancé. Les rayons positifs, produits de la façon ordinaire au moyen d'une cathode perforée et prolongée par un tube étroit bien rectiligne, viennent frapper un écran que le choc des particules rend fluorescent ou mieux une plaque photographique; avant de rencontrer la plaque, ils traversent un espace où règnent un champ magnétique et un champ électrique superposés, ayant une même direction perpendiculaire à celle des rayons. Une particule électrisée, au lieu de rencontrer la plaque au point qui est sur le prolongement du tube de la cathode, sera déviée à la fois par le champ électrique et par le champ magnétique dans deux directions perpendiculaires et ira frapper la plaque en un point plus ou moins excentrique, suivant les valeurs de v et de $\frac{e}{m}$. La mesure des coordonnées du point d'impact permettra de calculer v et $\frac{e}{m}$, et, puisque e est connu, la masse m de la particule sera déterminée. Si toutes les particules avaient même vitesse et même masse, elles iraient toutes frapper la plaque au même point. Il n'en est pas ainsi avec les rayons posi-

tifs, pour des raisons qui sont expliquées dans le livre. Le calcul démontre facilement que toutes les particules se mouvant avec une vitesse donnée, mais possédant des charges et des masses quelconques, rencontrent l'écran suivant une ligne droite passant par le point frappé par les particules non déviées. D'autre part, si $\frac{e}{m}$ est constant, quelle que soit leur vitesse, la trace des points d'impact des particules correspondantes sera sur l'écran une parabole ayant son sommet au point de déviation nulle, et l'on aura autant de paraboles que de types de particules.

On devine d'après cela quelle puissante méthode d'analyse chimique peuvent fournir les rayons positifs, et l'on comprend comment l'étude des photographies obtenues avec eux permet de déterminer les différents types d'atomes et de molécules existant dans le tube à décharge. On peut analyser un gaz en en faisant passer une petite quantité dans le tube. Une très petite quantité suffit; le volume entier du gaz renfermé dans un tube des dimensions de celui employé le plus souvent par J. J. Thomson occuperait $0^{cm^3},01$ à la pression ordinaire, et un pourcentage très faible de l'un de ses constituants donne des paraboles très nettes. La méthode d'analyse par les rayons positifs est bien plus sensible que l'analyse spectrale; on a pu mettre en évidence la quantité d'hélium contenue dans 1^{cm^3} d'air, c'est-à-dire environ 3×10^{-6} cm³, même lorsque cette quantité constituait seulement 1 pour 100 des gaz mélangés dans le tube. La méthode permet aussi, lorsqu'on a déterminé le corps cherché, de savoir si la molécule est mono ou diatomique. Ajoutons encore que la méthode des rayons positifs fournit, quand on peut l'utiliser, un moyen de déterminer les poids atomiques des éléments qui présente cet avantage considérable que la présence d'impuretés est sans influence sur le résultat. Les progrès ainsi réalisés sont nombreux et des plus intéressants pour la chimie atomique; il serait trop long de les énumérer; citons simplement la découverte d'un certain nombre d'isotopes.

Une phrase de la préface de l'auteur indique bien la portée de la méthode qu'il a créée : « Je suis convaincu que nous ne sommes encore qu'au commencement d'une moisson de résultats qui viendront élucider le processus de la combinaison chimique, et ainsi un pont sera jeté sur l'un des fossés les plus profonds qui séparent encore la Physique de la Chimie. »

L'Ouvrage est complété par 9 planches contenant 30 photographies d'une exécution parfaite, choisies parmi les plus intéressantes de celles que l'auteur a obtenues dans ses savantes recherches.

A. Corvisy.

KENNELLY (A. E.), professeur à l'Université de Harvard. — *Les applications élémentaires des Fonctions hyperboliques à la science de l'ingénieur électricien* (Paris, Gauthier-Villars et C[ie], éditeurs, 1922).

Le cosinus et le sinus hyperboliques sont définis par ces formules :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \qquad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

On en déduit immédiatement :

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots,$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots,$$

$$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \qquad (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch}(a + b) = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b,$$

$$\operatorname{sh}(a + b) = \operatorname{sh} a \operatorname{ch} b + \operatorname{sh} b \operatorname{ch} a.$$

Le cosinus hyperbolique est une fonction *paire* et *positive ;* le sinus hyperbolique est *impair* et a le signe de x.

Ces fonctions donnent la représentation paramétrique de l'hyperbole, comme le sinus et le cosinus donnent celle du cercle ; on en tire facilement les théorèmes d'Apollonius ; on s'en sert pour l'étude de la chaînette. On a

$$\cos ix = \operatorname{ch} x, \qquad \sin ix = i \operatorname{sh} x,$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \qquad \ldots.$$

En outre, $\operatorname{sh} x$ et $\operatorname{ch} x$ sont des solutions de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = y.$$

Or, dans une ligne électrique, en un point x, si V représente le potentiel (volts) et I l'intensité (ampères), si r est la résistanee par unité de longueur et g la perditance par unité de longueur, on a

$$\frac{d^2V}{dx^2} = Vgr, \qquad \frac{d^2I}{dx^2} = Igr.$$

Voilà comment les électriciens sont amenés à l'emploi des fonctions hyperboliques, et M. Kennelly montre comment, à ce jour, on peut envisager l'usage pratique de ces symboles. Je vois, dans son livre, deux idées, au moins, qui sont bien en relief :

D'abord la haute *utilité* de ces symboles, pour l'étude des lignes électriques ;

Ensuite le passage du courant *continu* ou courant *alternatif*, par la substitution, dans V et I, de nombres complexes $a + bi$, aux nombres réels.

Comme beaucoup de physiciens, M. Kennelly emploie le symbole j à la place de i, la lettre i pouvant servir à désigner une intensité. On remarquera aussi le symbole

$$\rho \angle \beta \quad \text{pour} \quad \rho e^{i\beta} \qquad \text{et} \qquad 1 \nabla \beta \quad \text{pour} \quad e^{-i\beta}, \qquad \ldots.$$

Dans cet ordre d'idées, l'auteur revendique (p. 63) la découverte de la généralisation de la loi d'Ohm. Pour un courant continu, on a

$$I = \frac{E}{R}$$

(E volts, I ampères, R résistance totale).

Dans un circuit simple, à courant alternatif, dont tous les éléments sont montés en série, on aura

$$I = \frac{E}{Z},$$

Z impédance est la résistance complexe ; E et I sont des nombres complexes.

On est donc amené à l'emploi de sh x et de ch x, x étant de la forme $a + bj$ (p. 76), et M. Kennelly obtient la réalisation matérielle, pourrait-on dire, de ces symboles, au moyen de tables et d'atlas, dont la deuxième édition a paru en 1921. Il indique un

modèle géométrique (p. 79), pour faciliter la compréhension, mais non pour le calcul, l'approximation étant mauvaise.

En un mot, l'auteur de cette étude originale et soignée, retourne en tous sens les fonctions hyperboliques, réelles ou non, et, au point de vue mathématique, cela ne présente aucune difficulté.

Il faut, maintenant, regarder les résultats.

En bon maître, M. Kennelly se préoccupe de la question pédagogique, et il imagine les lignes *artificielles* (p. 36), combinaisons de boîtes de résistance en série et en dérivation, donnant, en régime permanent, les *mêmes* conditions de potentiel et d'intensité, aux bornes terminales, que la ligne réelle à étudier. Voilà une méthode d'initiation fort utile, surtout pour les courants alternatifs.

Dans le cas d'un courant continu, l'auteur définit la constante d'atténuation $\alpha = \sqrt{rg}$ (p. 7); il la retrouve, complexe (p. 84) pour les courants alternatifs, donnant le rapport des V et des I, en deux points distants de 1^{km}, sur une longue ligne, sous une forme simple (p. 87). C'est, d'ailleurs, l'atténuation qui définit la ligne *courte* et *longue* (p. 90).

M. Kennelly construit (p. 97) la spirale normale d'atténuation, dans le cas où la ligne est assez longue pour que l'onde électromagnétique réfléchie soit négligeable.

Il construit, de même (p. 108), la spirale de l'impédance et les graphiques de potentiel et d'intensité.

Il ne dissimule pas qu'il se place dans des conditions plus simples que les conditions réelles; en particulier, le courant alternatif doué d'harmoniques nombreux devient difficile à calculer (p. 112).

M. Kennelly examine des cas très variés, avec des exemples numériques, et termine son livre (Chap. XIV) par un aperçu sur l'application des fonctions hyperboliques au régime *temporaire*, qui précède le régime *permanent* dans une ligne électrique. Ceci exige la connaissance des propriétés des ondes électromagnétiques et s'adresse donc à des physiciens.

Nous trouvons, dans ce bel Ouvrage, une initiation savante aux conditions de construction d'une ligne électrique, sans aucune forme mathématique superflue; on peut dire que l'instrument

analytique est *élémentaire* et qu'il n'y a aucun calcul difficile. Il est certain que les ingénieurs feront usage de cet exposé simple et si bien présenté.

On regrettera, peut-être, qu'il n'y ait aucune indication bibliographique, mais il est certain que cet Ouvrage contient beaucoup d'idées, en peu de pages, et des graphiques qui rendent les idées lumineuses. R. D'ADHÉMAR.

MÉLANGES.

LE PASSAGE A LA LIMITE DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENCES AUX ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DANS LES PROBLÈMES AUX LIMITES;

PAR M. MICHEL PLANCHEREL

(Zurich).

(*Suite et fin.*)

4. Pour établir la légitimité de la méthode de Cauchy-Lipschitz nous vérifierons d'abord par calcul direct sa légitimité dans le cas du problème simple

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), \qquad u(0) = u(1) = 0, \tag{15}$$

puis, nous montrerons comment le cas du problème général (1), (2) peut s'en déduire à l'aide de la théorie des équations intégrales.

Nous devons associer au problème différentiel (15) le problème aux différences

$$n^2 \Delta^2 u_{i-1} = f_i, \qquad u_0 = u_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1), \tag{16}$$

où $f_i = f\left(\frac{i}{n}\right)$ Or, nous avons calculé la fonction de Green g_{ik}

de $n^2\Delta^2 u_{i-1}$. La solution du problème aux différences est donc donnée par

$$(17) \qquad u_i = -\sum_{k=0}^{n} g_{ik} f_k = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{n}\,G_{ik}\right) f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Lorsque nous faisons tendre i, k, n vers l'infini de manière que $\lim\frac{i}{n} = x$, $\lim\frac{k}{n} = \xi$, nous vérifions directement sur l'expression (9) de G_{ik} que

$$\lim \frac{1}{n}\,G_{ik} = \begin{cases} (1-x)\xi, & \xi \leqq x, \\ (1-\xi)x, & \xi \geqq x, \end{cases}$$

et cela *uniformément*. Or, cette fonction de x, ξ que nous obtenons et que nous noterons $G(x, \xi)$ *est précisément la fonction de Green du problème différentiel.*

Le second membre de (17) est une valeur approchée de l'intégrale $-\int_0^1 G(x, \xi) f(\xi)\,d\xi$. En passant à la limite $\frac{i}{n}\to x$, $n\to\infty$ dans (17) nous voyons donc que, uniformément,

$$\lim u_i = -\int_0^1 G(x, \xi) f(\xi)\,d\xi.$$

Le second membre est précisément la solution $u(x)$ du problème différentiel (15) comme on peut le vérifier directement. On a donc bien

$$\lim u_i = u(x).$$

On constaterait de même directement que

$$\lim n.\Delta\left(\frac{1}{n}\,G_{ik}\right) = \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi}$$

et que $n\Delta u_i$ et $n^2\Delta^2 u_{i-1}$ convergent uniformément dans les mêmes conditions vers $\frac{du}{dx}$ et $\frac{d^2u}{dx^2}$.

La convergence uniforme est à entendre comme suit : $F_{i,k,n}$ converge uniformément vers $F(x, \xi)$ si à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un entier N et une quantité positive δ tels que, quels que soient x, ξ, on ait

$$|F_{i,k,n} - F(x, \xi)| < \varepsilon, \quad \text{pour} \quad n \geqq N, \quad \left|\frac{i}{n} - x\right| < \delta, \quad \left|\frac{k}{n} - \xi\right| < \delta.$$

Remarquons encore que si nous avions considéré le problème différentiel

$$\Delta u + \lambda u = 0, \qquad u(0) = u(1) = 0,$$

qui a les valeurs fondamentales $\lambda_p = p^2\pi^2 (p = 1, 2, 3, \ldots)$ et les fonctions fondamentales $u_p = \sqrt{2}\sin px\pi$ les valeurs et les solutions fondamentales, $\lambda_p^{(n)}$, $u_i^{(p.n)}$ du problème aux différences correspondant (11) ont des limites qui ne sont autres que λ_p, u_p.

5. Abordons maintenant le problème différentiel (1), (2) et le problème aux différences (3), (4). L'équation aux différences est adjointe à elle-même. En l'écrivant

$$\begin{aligned} n^2\Delta^2 u_{i-1} &= \frac{1}{p_i}[f_i - n^2\,\Delta p_i\,\Delta u_i - (q_i+\lambda)u_i] \\ &= \mathrm{F}_i, \end{aligned}$$

nous pouvons exprimer sa solution par la formule

$$u_i = -\sum_{k=0}^{n} g_{ik}\,\mathrm{F}_k,$$

où g_{ik} a la signification (10). Par conséquent,

$$\begin{aligned} (18)\qquad u_i &= -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\,\mathrm{G}_{ik}\,\mathrm{F}_k \\ &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\,\mathrm{G}_{ik}\,\frac{n\,\Delta p_k.n\,\Delta u_k}{p_k} + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\,\mathrm{G}_{ik}\left(\frac{q_k+\lambda}{p_k}\,u_k - \frac{f_k}{p_k}\right). \end{aligned}$$

La sommation partielle de la première somme montre en tenant compte des conditions aux limites auxquelles G_{ik} satisfait, que

$$(19)\qquad \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}\,\mathrm{G}_{ik}\,\frac{n\,\Delta p_k.n\,\Delta u_k}{p_k} = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} u_k\left[n\,\Delta^{(k)}\left(\frac{1}{n}\,\mathrm{G}_{i,k-1}\,\frac{n\,\Delta p_{k-1}}{p_{k-1}}\right)\right].$$

$\Delta^{(k)}$ désigne une différence première à prendre relativement à l'in-

dice k. Notons

$$K_{ik}^{(n)}(\lambda) = n\,\Delta^{(k)}\left(\frac{1}{n}G_{i,k-1}\frac{n\,\Delta p_{k-1}}{p_{k-1}}\right) - \frac{1}{n}G_{ik}\frac{q_k+\lambda}{p_k},$$

$$F_i^{(n)} = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}G_{ik}\frac{f_k}{p_k},$$

$$K(\lambda; x, \xi) = \frac{d}{d\xi}\left[G(x, \xi)\frac{p'(\xi)}{p(\xi)}\right] - G(x, \xi)\frac{q(\xi)+\lambda}{p(\xi)},$$

$$F(x) = -\int_0^1 G(x, \xi)\frac{f(\xi)}{p(\xi)}\,d\xi.$$

En vertu de la convergence uniforme de $\frac{1}{n}G_{ik}$ vers $G(x, \xi)$ et de $\Delta^{(k)}G_{ik}$ vers $\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial\xi}$ lorsque $\frac{i}{n}\to x$, $\frac{k}{n}\to\xi$, $n\to\infty$, on vérifie que, uniformément,

$$(20)\qquad \lim K_{i,k}^{(n)}(\lambda) = K(\lambda; x, \xi), \qquad \lim F_i^{(n)} = F(x).$$

Or, en tenant compte de (19) et des notations précédentes, (18) s'écrit

$$(21)\qquad u_i + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} K_{ik}^{(n)}(\lambda)\,u_k = F_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

C'est un système de $n+1$ équations algébriques linéaires à $n+1$ inconnues. Les solutions peuvent s'exprimer à l'aide des formules de Cramer sous la forme

$$(22)\qquad u_i = \frac{1}{D_n(\lambda)}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}H_{ik}^{(n)}(\lambda)\,F_k + F_i \qquad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

où $D_n(\lambda)$ est le déterminant du système (21). C'est un polynome de degré $n-1$ en λ.

Considérons maintenant l'équation intégrale

$$(23)\qquad u(x) + \int_0^1 K(\lambda; x, \xi)\,u(\xi)\,d\xi = F(x)$$

et demandons-nous quelles relations elle a avec le système (21). On constate d'abord par calcul direct que la solution de l'équation (23) est solution du problème différentiel (1) (2) et récipro-

quement. La réciproque se prouve en traitant l'équation (1) de la même manière que nous avons traité (3) pour arriver à (21).

Or, en examinant (23) et (21) à l'aide de (20), on voit que la question qui reste à résoudre : est ce que $u_i \to u(x)$ lorsque $\frac{i}{n} \to x$ est précisément la question que résout Hilbert lorsqu'il montre qu'on peut envisager une équation intégrale comme cas limite d'un système de $n+1$ équations algébriques linéaires à $n+1$ inconnues. La solution de (23) peut se mettre sous la forme donnée par Fredholm

$$(24) \qquad u(x) = \frac{1}{D(\lambda)} \int_0^1 H(\lambda; x, \xi) F(\xi)\, d\xi + F(x)$$

et Hilbert a démontré que les relations (20) ont pour conséquence que, uniformément [1],

$$(25) \qquad \lim D_n(\lambda) = D(\lambda), \qquad \lim H_{ik}^{(n)}(\lambda) = H(\lambda; x, \xi).$$

Par conséquent, pour toute valeur de λ telle que $D(\lambda) \neq 0$, c'est-à-dire pour toute valeur λ non fondamentale pour le problème différentiel (1), (2), on a, d'après (22), (24) et (25), uniformément,

$$\lim u_i = u(x), \qquad \text{pour} \qquad \frac{i}{n} \to x.$$

Les relations (25) ont aussi lieu uniformément en λ dans tout domaine fini du plan complexe λ. Si donc nous désignons par $\lambda_1^{(n)} \leqq \lambda_2^{(n)} \leqq \ldots \leqq \lambda_{n-1}^{n}$ les zéros [réels et positifs de $D_n(\lambda)$] et par $\lambda_1 \leqq \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \ldots$ ceux de $D(\lambda)$, nous pouvons conclure que

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_p^{(n)} = \lambda_p \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots),$$

en convenant de répéter chaque zéro autant de fois que l'indique sa multiplicité. Les considérations du mémoire de Hilbert permettent encore d'affirmer que si λ_p est une valeur fondamentale

---

(1) HILBERT, *loc. cit.* A vrai dire, Hilbert suppose dans son mémoire que $K_{ik}^{(n)} = K\left(\frac{i}{n}, \frac{k}{n}\right)$, $F_i^{(n)} = F\left(\frac{i}{n}\right)$, mais cette hypothèse peut être remplacée par l'hypothèse (20) sans aucun changement dans les démonstrations.

simple et u_p la fonction fondamentale correspondante normée par $\int_0^1 u_p^2\,dx = 1$, on a uniformément

$$\lim u_i^{(p,n)} = u_p(x),$$

en désignant par $(u_0^{(p,n)}, u_1^{(p,n)}), \ldots, u_n^{(p,n)})$ la solution du système homogène correspondant à (21) pour $\lambda = \lambda_p^n$. On suppose $u_i^{p,n}$ normé suivant $\sum_{i=0}^{n} (u_i^{(p,n)})^2 = n$ ([1]).

On peut encore démontrer que lorsque λ n'est pas une valeur fondamentale,

$$\lim n\,\Delta u_i = \frac{du}{dx}, \qquad \lim n^2\,\Delta^2 u_i = \frac{d^2 u}{dx^2}$$

et cela uniformément. Il suffira de montrer la première de ces relations, car la seconde découle ensuite de l'équation aux différences $n^2\Delta^2 u_{i-1} = F_i$. Or, en tenant compte du fait que

$$\Delta^{(i)} G_{ik} = -\frac{k}{n}, \qquad k \leq i,$$

$$\Delta^{(i)} G_{ik} = 1 - \frac{k}{n}, \qquad k > i,$$

(18) donne

$$n\,\Delta u_i = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\,\frac{n\,\Delta p_k . n\,\Delta u_k}{p_k} + \frac{1}{n}\sum_{k=i+1}^{n} \frac{n\,\Delta p_k . n\,\Delta u_k}{p_k}$$
$$-\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n}\left(\frac{q_k+\lambda}{p_k}u_k - \frac{f_k}{p_k}\right) + \frac{1}{n}\sum_{k=i+1}^{n}\left(\frac{q_k+\lambda}{p_k}u_k - \frac{f_k}{p_k}\right).$$

En y considérant u_k comme connu dans les deux dernières sommes, nous obtenons pour calculer $n\,\Delta u_i$ un système d'équations du type

$$n\,\Delta u_i = -\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} M_{ik}^{(n)} . n\,\Delta u_k + N_i^n(\lambda),$$

([1]) HILBERT, *loc. cit.* Le théorème n'est pas aussi simple dans le cas des valeurs fondamentales multiples à cause de l'indétermination des fonctions fondamentales qui ne sont alors déterminées pour cette valeur fondamentale qu'à une substitution orthogonale près de rang égal à la multiplicité de λ_p.

où en particulier

$$M_{ik}^{(n)} = \frac{k}{n} \frac{n\,\Delta p_k}{p_k}, \qquad \text{si } k \leqq i,$$

$$M_{ik}^{(n)} = \left(\frac{k}{n} - 1\right) \frac{n\,\Delta p_k}{p_k}, \qquad \text{si } k > i.$$

On se rend compte immédiatement que $M_{ik}^{(n)}$ et $N_i^{(n)}(\lambda)$ convergent uniformément vers des fonctions $M(x, \xi)$ et $N(\lambda, x)$ telles que

$$\frac{du}{dx} = -\int_0^1 M(x, \xi) \frac{du}{d\xi} + N(\lambda, x).$$

On pourra donc, à nouveau, utiliser les résultats de Hilbert et conclure que $n\,\Delta u_i \to \frac{du}{dx}$.

Des raisonnements analogues [où l'on ferait dans (18) $f_k = 0$ et $\lambda = \lambda_p^{(n)}$] permettraient aussi de montrer que lorsque λ_p est une valeur fondamentale simple,

$$n\,\Delta u_i^{(p, n)} \to \frac{du_p}{dx} \qquad \text{et} \qquad n^2 \Delta^2 u_i^{(p, n)} \to \frac{d^2 u_p}{dx^2}.$$

6. La démonstration que nous venons d'achever était divisée naturellement en deux parties.

a. Construction de la fonction de Green $G(x, \xi)$ du problème différentiel simple $\frac{d^2 u}{dx^2} = f$, $u(0) = u(1) = 0$, de la fonction de Green g_{ik} du problème aux différences $n^2 \Delta^2 u_{i-1} = f_i$, $u_0 = u_1 = 0$ et démonstration du fait que $n\,g_{ik} \to G(x, \xi)$.

b. Réduction de la résolution du problème différentiel (1) (2) à la résolution d'une équation intégrale et de celle du problème aux différences correspondant à celle d'un système d'équations algébriques dont la solution est une solution approchée de l'équation intégrale.

Le principe de cette démonstration peut être étendu au cas d'autres conditions aux limites. Il peut aussi être étendu au cas des équations aux dérivées partielles. Mais dans ce cas, sur lequel j'espère revenir ailleurs, certaines difficultés se présentent qui tiennent d'une part au fait que l'équation intégrale de *b* n'a plus un noyau fini et d'autre part au fait que la construction de

la fonction de Green du problème aux différences partielles $n^2[\Delta^{2(i)} u_{i-1,k} + \Delta^{2(k)} u_{i,k-1}] = f_{ik}$ ($u_{ik} = 0$ aux points frontières du réseau) n'est plus aussi simple et que pour montrer qu'elle a pour limite la fonction de Green de $\Delta u = 0$ du domaine, on se trouve obligé de faire en deux étapes ce passage à la limite en étudiant d'abord le cas des domaines rectangulaires.

SUR UN THÉORÈME DE M. HADAMARD;

PAR M. GEORGES VALIRON.

On doit à M. Hadamard la proposition suivante [1] :

$f(z)$ étant une fonction holomorphe pour $0 \leqq r_0 \leqq |z| < R$, le maximum $M(r)$ de son module sur le cercle $|z| = r$, qui est comme on le sait une fonction continue de r, jouit en outre de cette propriété : $\log M(r)$ est une fonction convexe de $\log r$, c'est-à-dire que, si l'on pose

$$X = \log r, \qquad V(X) = \log M(r),$$

on a l'inégalité

$$V(X')(X'' - X) < V(X)(X'' - X') + V(X'')(X' - X) \tag{1}$$

si

$$X < X' < X'',$$

à moins que $f(z)$ ne se réduise à un monome, cas dans lequel on aurait une égalité au lieu d'une inégalité.

Ce théorème est aussi valable pour une fonction de plusieurs variables. Je me propose de donner dans cette Note quelques

(1) *Bulletin de la Société mathématique*, 1896.

applications simples du théorème général à la théorie des fonctions entières de deux variables.

1. Je ferai d'abord quelques remarques sur le théorème de M. Hadamard dans le cas de deux variables. Soit $f(z, z')$ une fonction holomorphe des deux variables z, z' dans le couple de cercles $|z| < R$, $|z'| < R'$, désignons par $M(r, r')$ le maximum de $|f(z, z')|$ pour $|z| \leqq r$, $|z'| \leqq r'$, $(r < R, r' < R')$. Posons

$$z = z_1 Z^\alpha, \qquad z' = z'_1 Z^\beta,$$

z_1 et z'_1 étant un couple de points, de modules r et r' comme il est bien connu, pour lequel le maximum $M(r, r')$ est atteint, et α, β étant deux entiers positifs ou négatifs. En appliquant le théorème de M. Hadamard à la fonction $F(Z) = f(z, z')$ ainsi définie, nous obtenons la proposition relative à une fonction de deux variables.

I. *Si l'on pose*

$$X = \log r, \qquad Y = \log r', \qquad V(X, Y) = \log M(r, r'),$$

l'inégalité

$$(2) \quad V(X', Y') \leqq \frac{1}{X'' - X}[V(X, Y)(X'' - X') + V(X'', Y'')(X' - X)]$$

est vérifiée pourvu que les trois points X, Y; X', Y'; X'', Y'' *soient en ligne droite, le second étant entre les deux autres.*

En réalité, l'inégalité ne se trouve tout d'abord démontrée que si le coefficient angulaire de la droite des trois points est rationnel, mais il s'ensuit qu'elle est générale à cause de la continuité. On doit remarquer que, dans la formule (2), l'égalité peut avoir lieu même pour une vraie fonction entière, la fonction $F(Z)$ pouvant effectivement se réduire à une constante. C'est le cas pour

$$f(z, z') = e^{z^\alpha z'^\beta}.$$

La fonction $V(X, Y)$ *est seulement semi-convexe.*

La méthode de M. Faber (*Mathematische Annalen*, t. 63) s'étend aussi sans modification au cas de plusieurs variables. On s'appuie sur ce que $F(z, z', z'')$ étant une fonction définie par une

série entière en z, z', z'', et r, r', r'' les rayons de trois cercles de convergence associés : 1° la surface lieu du point de coordonnées $\log r$, $\log r'$, $\log r''$ est semi-concave; 2° la fonction $F(z, z', z'')$ a au moins un point singulier z, z', z'' tel que $|z| = r$, $|z'| = r'$, $|z''| = r''$; et l'on applique ces propriétés à la fonction

$$F(z, z', z'') = \frac{1}{1 - z'' f(z, z')}.$$

La première propriété des rayons de convergence associés découle d'ailleurs de suite du théorème relatif à la comparaison des moyennes géométriques et arithmétiques : si

$$G(x, x', x'') = \sum a_{m,p,q} x^m x'^p x''^q$$

est la série des modules de $F(z, z', z'')$, et si cette série converge pour les trois points x_1, x'_1, x''_1 ; x_2, x'_2, x''_2 ; x_3, x'_3, x''_3, on a

$$(\alpha + \beta + \gamma) G(x, x', x'') \leq \alpha G(x_1, x'_1, x''_1) + \beta G(x_2, x'_2, x''_2) + \gamma G(x_3, x'_3, x''_3),$$

pourvu que

$$(\alpha + \beta + \gamma) \log X = \alpha \log X_1 + \beta \log X_2 + \gamma \log X_3$$
$$(X = x, x', x'')$$

et pourvu que α, β, γ soient des entiers positifs.

Dans le cas où $f(z, z')$ est à coefficients et variables positifs, les deux méthodes conduisent au résultat sans faire appel à la théorie des nombres complexes.

2. J'appliquerai d'abord le théorème primitif de M. Hadamard à la démonstration du théorème suivant de M. Sire [1] :

II. *Si* $G(r, r')$ *est une fonction entière des deux variables positives* r *et* r' *à coefficients positifs ou nuls, et si, ordonnant par rapport à* r, *on pose*

$$G(r, r') = \sum A_n(r') r^n,$$

---

[1] *Thèse*, Paris 1910, et *Rendiconti del Circolo matematico*, Palerme, 1911.

on a, quels que soient les deux nombres positifs fixes r'_1, r'_2,

$$(3) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\log A_n(r'_2)}{\log A_n(r'_1)} = 1.$$

Supposons $r'_1 < r'_2$. Comme $A_n(x)$ est une fonction entière et croissante de x, $A_n(r'_1)$ est inférieur à $A_n(r'_2)$ qui tend d'ailleurs vers zéro lorsque n croît indéfiniment. Posons $\log A_n(x) = V_n(X)$, $X = \log r$; $V_n(X)$ est une fonction croissante convexe, donc X et X' désignant les valeurs de X correspondant aux valeurs r'_1 et r'_2 de x, et X'' étant quelconque mais supérieur à X', l'inégalité (1) donne, quel que soit n,

$$V_n(X'') \geqq \frac{V_n(X)(X' - X'') + V_n(X')(X'' - X)}{X' - X}$$
$$= V_n(X)\left\{1 + \left[\frac{V_n(X')}{V_n(X)} - 1\right]\frac{X'' - X}{X' - X}\right\}.$$

$V_n(X')$ et $V_n(X)$ qui lui est inférieur sont négatifs à partir d'une valeur n_0 de n, le rapport $V_n(X') : V_n(X)$ est donc inférieur à 1 pour $n > n_0$. Je dis que ce rapport est supérieur à $1 - \varepsilon$, quelque petit que soit le nombre positif ε, à partir d'une valeur de n. Car, si le contraire se produit pour une valeur n, nous avons

$$V_n(X'') > V_n(X)\left(1 - \varepsilon\frac{X'' - X}{X' - X}\right),$$

et, en prenant pour X'' une valeur fixe $\log r'_3$ assez grande pour que le crochet soit négatif, $V_n(X'') = \log A_n(r'_3)$ sera positif, ce qui ne peut avoir lieu que pour un nombre fini de valeurs de n.

Le théorème est ainsi démontré [1].

3. Considérons d'une façon générale la fonction $M(r, r')$, maximum du module d'une fonction entière $f(z, z')$. On a évidemment

$$M(r, r) < M(r, kr) < M(kr, kr) \qquad (k > 1),$$

les fonctions $M(r, r)$ et $M(r, kr)$ ont donc une croissance com-

---

[1] Dans sa démonstration, M. Sire emploie une inégalité de M. Pringsheim qui se rattache aux considérations sur les valeurs moyennes.

parable; on a aussi

$$M(r, b) < M(r, r) \quad \text{si} \quad r > b.$$

Par exemple, si $M(r, r)$ est d'ordre fini ρ', $M(r, kr)$ est aussi d'ordre $\rho'(k \gtrless 1)$, $M(r, b)$ et $M(a, r)$ sont d'ordre au plus égal à ρ' mais peuvent être d'ordre inférieur.

La croissance des fonctions $M(r, b)$ correspondant aux diverses valeurs de b se compare aisément en utilisant le théorème I. Les notations étant celles du théorème I, nous appliquons l'inégalité (2) aux points $X = 0$, Y, X', $Y' = \beta$; X'', $Y'' = 0$, nous obtenons, en supposant par exemple $\beta > 0$ et $X'' > X$,

$$X''V(X', \beta) \leqq X'V(X'', 0) + (X'' - X')V(0, Y)$$

avec la condition

$$Y = \frac{\beta X''}{X'' - X'},$$

qui exprime que les trois points sont alignés. En prenant $X'' = X' + h$ et en écrivant X à la place de X', nous avons l'inégalité générale

$$(4) \qquad V(X, \beta) < V(X + h, 0) + \frac{h}{X} V\left[0, \frac{\beta}{h}(X + h)\right] \qquad (\beta > 0).$$

En supposant que $h : X$ est une fonction $\varepsilon(X)$ tendant vers zéro en décroissant assez lentement pour que $V\left[0, \frac{2\beta}{\varepsilon(X)}\right]$ reste toujours inférieur à $V(X, 0)$, nous obtenons

$$V(X, \beta) < [1 + \varepsilon(X)] V[X + \varepsilon(X)X, 0].$$

On aurait une inégalité analogue, mais dans le sens contraire, pour β négatif. D'où le résultat suivant, plus précis que celui que j'avais déduit précédemment du théorème II de M. Sire [1].

III. *Pour toute valeur finie de b, on a*

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log M(r, b)}{\log M[r^{1+\eta(r)}, 1]} = 1,$$

$\eta(r)$ étant une fonction (positive ou négative) tendant vers zéro lorsque r croît indéfiniment.

---

[1] *Bulletin de la Société mathématique*, 1914.

Si $M(r, 1)$ et $M(1, r)$ sont connus, on obtient une limite de $M(r, r)$ en utilisant encore la convexité de $V(X, Y)$. Prenons dans l'inégalité (2) $Y' = X'$; $X'' = \frac{X'}{\lambda}$, $Y'' = 0$; $X = 0$, $Y = \frac{X'}{\mu}$, avec la condition $\lambda + \mu = 1$ pour que les trois points soient en ligne droite, nous aurons, en écrivant X au lieu de X',

$$(5) \qquad V(X, X) \leq \mu V\left(0, \frac{X}{\mu}\right) + \lambda V\left(\frac{X}{\lambda}, 0\right) \qquad (\lambda + \mu = 1).$$

On déterminera λ et μ en exprimant que le second membre est minimum, c'est-à-dire en ajoutant la condition

$$\frac{d}{d\mu}\mu V\left(0, \frac{X}{\mu}\right) = \frac{d}{d\lambda}\lambda V\left(\frac{X}{\lambda}, 0\right);$$

mais dans la plupart des cas, $V(0, Y)$ et $V(X, 0)$ n'étant connus que de façon approchée, on se contentera d'égaler les valeurs de $V\left(0, \frac{X}{\mu}\right)$ et $V\left(\frac{X}{\lambda}, 0\right)$. Par exemple, si $M(r, 1)$ et $M(1, r)$ sont respectivement d'ordre fini ρ et ρ_1, on a, à partir d'une valeur de X, si petit que soit ε,

$$\log V\left(\frac{X}{\lambda}, 0\right) < (\rho + \varepsilon)\frac{X}{\lambda}, \qquad \log V\left(0, \frac{X}{\mu}\right) < (\rho_1 + \varepsilon)\frac{X}{\mu};$$

on prendra

$$\frac{\lambda}{\rho + \varepsilon} = \frac{\mu}{\rho_1 + \varepsilon} = \frac{1}{\rho + \rho_1 + 2\varepsilon},$$

d'où

$$\log V(X, X) < (\rho + \rho_1 + 2\varepsilon)X.$$

C'est le théorème de M. Borel : *l'ordre de* $M(r, r)$ *est au plus égal à la somme des ordres de* $M(r, 1)$ *et* $M(1, r)$ [1].

De même, si $M(r, 1)$ et $M(1, r)$ sont d'ordre nul et telles que

$$\overline{\lim_{X=\infty}} \frac{\log V(X, 0)}{\log X} = \rho, \qquad \overline{\lim_{X=\infty}} \frac{\log V(0, X)}{\log X} = \rho_1,$$

ρ et ρ_1 étant naturellement supérieurs à 1, on voit que $\lambda : \mu$ devra être pris de l'ordre de $X^{\rho-\rho_1}$; si l'on suppose ρ supérieur à ρ_1,

---

[1] *Leçons sur les séries à termes positifs*, Chap. VI.

λ doit être voisin de 1 et μ voisin de zéro, on a donc

$$\overline{\lim_{X=\infty}} \frac{\log V(X, X)}{\log X} = \rho.$$

$M(r, r)$ *est une fonction d'ordre nul dont la croissance est analogue à celle des deux fonctions* $M(r, 1)$ *et* $M(1, r)$ *dont la croissance est la plus rapide.*

On multipliera aisément ces exemples.

4. Plaçons-nous dans le cas particulier où l'ordre total est fini positif, c'est-à-dire où $M(r, 1)$ et $M(1, r)$ sont d'ordre fini ρ et ρ_1, l'un de ces nombres n'étant pas nul. Supposons que ce soit ρ. On peut préciser dans ce cas la relation entre les fonctions $M(r, 1)$ et $M(r, b)$. Reprenons l'inégalité (4), en y supposant h fixe et assez grand, on voit que l'on aura

$$V(X, \beta) < V(X + h, 0) + e^{\varepsilon X},$$

ε étant arbitrairement petit. Par suite, on a

$$(6) \qquad \log M(r, 1) < \log M(r, b) < 2 \log M(kr, 1),$$

k étant un nombre fixe dépendant de b et de ε, pour toutes les valeurs de r pour lesquelles $\log M(r, 1)$ est supérieur à r^ε. Par exemple, si

$$\frac{\log M(r, b)}{r^\rho}$$

a des limites d'indétermination finies positives pour une valeur de b, il en est de même pour les autres valeurs.

Dans ce cas de l'ordre total fini, on a vu que la fonction $M(r, kr)$ est du même ordre ρ' quel que soit le nombre k fini et positif, ρ' étant supérieur ou égal au plus grand des ordres de $M(r, 1)$ et $M(1, r)$ et au plus égal à la somme de ces ordres. Lorsque l'on considère la surface $Z = V(X, Y)$, il est naturel d'étudier aussi l'allure de la fonction V lorsqu'on s'éloigne indéfiniment dans les diverses directions de coefficient angulaire négatif et positif. Posons

$$\rho'(k) = \overline{\lim_{X=+\infty}} \frac{\log V(X, kX)}{X}$$

et soient ρ'_1, ρ'_2, ρ'_3 les valeurs de cette fonction pour les valeurs k_1,

k_2, k_3, k_2 étant compris entre k_1 et k_3. La propriété de convexité montre encore que, ε étant positif et arbitrairement petit, on aura à partir d'une valeur de X et X'',

$$V(X', k_2 X') \leqq \frac{1}{X''-X} \left\{ (X''-X') e^{\rho'_1(1+\varepsilon)X} + (X'-X) e^{\rho'_3(1+\varepsilon)X''} \right\}$$

pourvu que

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ \frac{1}{X} & \frac{1}{X'} & \frac{1}{X''} \end{vmatrix} = 0.$$

On est conduit à prendre $X\rho'_1 = X''\rho'_3$ et en désignant par $\lambda X'$ la valeur commune de ces expressions, on voit que ρ'_2 est au plus égal à $\lambda(1+2\varepsilon)$, λ étant défini par l'égalité

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ \rho'_1 & \lambda & \rho'_3 \end{vmatrix} = 0.$$

D'où ce résultat :

IV. *La fonction $\rho'(k)$ est semi-convexe, donc continue, pour toutes les valeurs finies de k.*

Dans le cas des fonctions entières à coefficients positifs, $G(r, r')$, cette proposition donne une relation entre les ordres des fonctions entières $G(r^\alpha, r^\beta)$ pour les valeurs entières non nulles de α et β. On remarquera que, si $\rho'(k)$ n'est pas constant lorsque k croît de $-\infty$ à $+\infty$, il croît indéfiniment, mais il est possible que $\rho'(k)$ soit d'abord constant pour $k < k_0$, puis croissant.

5. Dans le Mémoire cité au début, M. Hadamard se proposait surtout d'obtenir une valeur approchée de $\log M(r)$ lorsque les coefficients du développement de Taylor sont connus. Sa méthode s'applique sans modification dans le cas de deux variables. Désignons par $C_{n,p}$ le module du coefficient de $z^n z'^p$ dans $f(z, z')$, et par $m(r, r')$ la valeur maximum de $C_{np} r^n r'^p$ lorsque n et p varient, r et r' étant fixes. Si l'on considère dans un système de trois axes rectangulaires Ox, Oy, Oz, les points $A_{n,p}$ de coordonnées

$$x = n, \qquad y = p, \qquad z = G_{n,p} = -\log C_{n,p},$$

le terme maximum $m(r, r')$ pour $\log r = X$ et $\log r' = Y$ correspond à des nombres n et p tels que

$$G_{n',p'} \geqq (n'-n)X + (p'-p)Y + G_{n,p} \qquad (n' \neq n,\ p' \neq p);$$

les points $A_{n',p'}$ ne peuvent être au-dessous du plan

$$(7) \quad z = (x-n)X + (y-p)Y + G_{n,p} = xX + yY - \log m(r, r').$$

Lorsque X et Y prennent les valeurs de $-\infty$ à $+\infty$, ces plans (7) enveloppent une surface polyédrale de Newton, S, dont les sommets sont certains des points $A_{n,p}$, tout point $A_{n,p}$ ne peut être au-dessous du plan de l'une des faces; les plans de la forme (7) qui correspondent à un terme maximum coïncident avec une face, ou touchent la surface suivant une arête, ou passent par un sommet en restant au-dessous de la surface. Cette surface semi-convexe peut d'ailleurs se réduire à une portion infinie de plan limitée par une demi-droite parallèle à Oz et par un polygone convexe vers le bas.

La construction systématique de cette surface S à partir des points $A_{n,p}$ ne présente pas de difficultés et je ne m'y arrêterai pas. La donnée de la surface S est évidemment équivalente à celle de la fonction $m(r, r')$. Cette surface S est la même pour toutes les fonctions $f(z, z')$ pour lesquelles les nombres $G_{n,p}$ correspondant aux sommets de S sont donnés, les autres nombres $G_{n,p}$ étant au moins égaux à la cote $G'_{n,p}$ du point S d'abscisse n et ordonnée p.

D'après l'égalité (7) le logarithme du terme maximum pour $\log r = X$, $\log r' = Y$ est donné par la cote à l'origine changée de signe du plan de contact de S dont les coefficients sont X, Y (c'est-à-dire du plan de contact qui coupe les plans xOz et yOz suivant des droites de pente X, Y). On peut également obtenir ce terme maximum, comme le fait M. Hadamard, en prenant la polaire réciproque de la surface S par rapport au paraboloïde

$$x^2 + y^2 - 2z = 0,$$

ce qui donne dans un système d'axes OXYZ une nouvelle surface polyédrale convexe Σ dont la cote pour $X = \log r$, $Y = \log r'$ est égale à $\log m(r, r')$. La convexité de la fonction $\log m(r, r') = U(X, Y)$ est d'ailleurs une conséquence immédiate de sa définition même.

Ces propriétés de convexité des surfaces S et Σ seront utilisées plus bas.

$V(X, Y)$ désignant toujours le logarithme de $M(r, r')$, on voit que l'inégalité bien connue

$$M(r, r') < m(r_1, r'_1)\frac{r_1}{r_1-r}\,\frac{r'_1}{r'_1-r'} \qquad (r_1 > r,\ r'_1 > r')$$

s'écrit sous la forme

$$V(X, Y) < U(X', Y') - \log(1 - e^{X-X'}) - \log(1 - e^{Y-Y'}),$$

ce qui montre que la surface $Z = V(X, Y)$ reste au-dessous de l'enveloppe Σ' des surfaces $\sigma_{\lambda,\mu}$, toutes égales entre elles, définies par l'égalité

$$Z = U(\lambda, \mu) - f(X - \lambda, Y - \mu)$$

avec

$$f(x, y) = \log(1 - e^x) + \log(1 - e^y) \qquad (x < 0,\ y < 0).$$

La surface polyédrale Σ étant convexe, la surface Σ' est aussi convexe, elle est composée de faces polygonales qui se déduisent de celles de Σ par des translations, de portions de surfaces cylindriques dont les génératrices sont parallèles aux arêtes de Σ, et de portions de surfaces Σ. L'ensemble des surfaces Σ et Σ', comprenant entre elles la surface $Z = V(X, Y)$, et donnant par suite une valeur approchée de $\log M(r, r')$ constitue la configuration envisagée par M. Hadamard. On l'obtient sans faire usage de la convexité de la fonction $V(X, Y)$.

6. Dans le cas d'une fonction entière d'une variable, il était possible de donner une expression analytique simple fournissant la même approximation que la figure géométrique analogue à la précédente (¹); il ne semble pas qu'il en soit de même dans ce cas de deux variables, mais on peut encore obtenir des formules assez précises.

Pour les valeurs r, r', le terme maximum $m(r, r')$ est la valeur d'un ou de plusieurs termes $C_{n,p}r^n r'^p$, nous désignerons par $n(r, r')$ et $p(r, r')$ les valeurs de n et p dans ce ou ces termes; ce seront des fonctions discontinues sur certaines lignes (ces lignes

---

(¹) *Voir* ma Thèse, *Annales de la Faculté de Toulouse*, 1913, et mon ouvrage *General theory of the integral functions*, Privat, Toulouse, 1923.

correspondent aux côtés du carrelage polygonal projection sur le plan xOy des faces de Σ). $n(r, b)$ est une fonction croissante de r, $p(a, r')$ une fonction croissante de r'.

Supposons que r et r' varient de telle façon que $r' = kr$, c'est-à-dire $Y = X + k'$. Le terme maximum correspondant s'obtient en prenant la section de Σ par le plan $Y = X + k'$, ou encore en considérant dans S la courbe des points de contact des plans tangents parallèles à la droite $Y + X = 0$, $Z = -k'X$. Le prisme circonscrit à S parallèlement à cette direction coupe le plan zOx, par exemple, suivant un *polygone convexe* Π_k, le plan de contact de S dont les coefficients sont X, Y coupe zOx suivant une droite de contact de Π_k dont la pente est $X = \log r$ et l'abscisse du point de contact de cette droite est $n(r, r') + p(r, r')$. $\log m(r, r')$ est encore la cote à l'origine de cette droite de contact, c'est donc le terme maximum d'une fonction entière d'une variable correspondant au polygone Π_k. Il en résulte que, si l'on suppose pour simplifier $f(0, 0) = 1$, on a

$$(8) \qquad \log m(r, r') = \int_0^r \frac{N(x, r' : r)}{x}\, dx,$$

$N(x, k)$ *désignant la fonction croissante*

$$(9) \qquad N(x, k) = n(x, kx) + p(x, kx).$$

L'égalité (8) est valable pourvu que r soit positif, l'égalité plus symétrique

$$\log m(r, r') = \int_0^1 [n(rt, r't) + p(rt, r't)] \frac{dt}{t}$$

est valable quels que soient r et r' (non négatifs) puisqu'elle l'est pour r ou r' nul.

Le calcul d'une limite supérieure de $\log M(r, r')$ se conduit alors comme dans le cas d'une seule variable. Le nombre des termes dont la somme des exposants est inférieure ou égale à la valeur (à droite) de $N\left[r + \frac{r}{N(r+0, k)}, k\right]$ est inférieur au carré de ce nombre, et la somme des autres termes est inférieure à

$$m(r, r') \frac{r_1^2}{(r_1 - r)^2} \qquad \left[r_1 = r - \frac{r}{N(r+0, k)}\right].$$

V. *On a l'inégalité*

$$(10) \qquad \log M(r, r') < \log m(r, r') + 2 \log N\left[r + \frac{r}{N(r)}\right] + \log 2,$$

valable pour les valeurs positives de r, $N(x) = N\left(x, \frac{r'}{r}\right)$ *étant la fonction définie par l'égalité* (9), *les valeurs de cette fonction étant toujours prises à droite.*

La connaissance de la somme des exposants du terme maximum permet ainsi de calculer une limite supérieure du rapport

$$\log M(r, r') : \log m(r, r').$$

En particulier, pour les fonctions d'ordre total fini ρ', on a, quel que soit k inférieur à un nombre fixe B et pourvu que r soit assez grand, $r > A$,

$$\int_0^r N(x, k)\frac{dx}{x} < \log M(r, rk) < r^{\rho'+\varepsilon},$$

d'où, uniformément pour $r > A$,

$$N(r, k) < K\, r^{\rho'+\varepsilon},$$

K étant un nombre fixe. On en déduit la proposition suivante :

VI. *Pour une fonction d'ordre total fini* ρ', *on a*

$$M(r, r') = m(r, r')(r + r')^{\lambda},$$

les limites d'indétermination de λ *lorsque* $r + r'$ *croît indéfiniment étant comprises entre* 0 *et* ρ'. A fortiori, *le rapport*

$$\log M(r, r') : \log m(r, r')$$

tend vers 1 *lorsque* $r + r'$ *croît indéfiniment.*

Certains des résultats de M. Sire sont des cas particuliers de cette proposition générale.

Dans le cas des fonctions quelconques, l'inégalité (10) conduit encore à la propriété suivante :

VII. *Pour une fonction entière* $f(z, z')$ *quelconque, le rap-*

port $\log M(r, r') : \log m(r, r')$ *tend vers* 1 *lorsque* $r + r'$ *croît indéfiniment, à condition d'exclure du quart de plan* $r > 0$, $r' > 0$, *des portions dont l'aire totale dans un cercle de centre origine est négligeable par rapport à l'aire du quart de cercle.*

7. La propriété de convexité de la surface S permet de donner les conditions auxquelles doivent satisfaire les coefficients $C_{n,p}$ pour que la fonction $\log M(r, r')$ ait une valeur approchée donnée. Je me bornerai à donner quelques indications sur ce problème dans le cas de l'ordre total fini.

Remarquons tout d'abord que, dans ce cas, étant donnée une fonction croissante convexe $V(X, Y)$, il existe effectivement des fonctions $f(z, z')$ pour lesquelles $\log M(r, r')$ est asymptotiquement égal à $V(\log r, \log r')$. La polaire réciproque de la surface $Z = V(X, Y)$ par rapport au paraboloïde considéré plus haut est en effet une surface convexe S'. En prenant pour valeur de $G_{n,p} = -\log C_{n,p}$ la cote du point de S' dont l'abscisse est n et l'ordonnée p, on définit une fonction à coefficients positifs $G(r, r')$ pour laquelle la surface de Newton S est au-dessus de S', le terme maximum $m(r, r')$ de cette fonction est au plus égal à $V(\log r, \log r')$, $G(r, r')$ est donc d'ordre fini. De plus, la somme des exposants de $m(r, r')$ diffère de moins de deux unités de la somme des coordonnées x, y du point de S' en lequel les coefficients du plan tangent sont $\log r$, $\log r'$. On a donc

$$\log m(r, r') = \int_0^r N\left(x, \frac{r'}{r}\right)\frac{dx}{x} > \int_0^{\log r} dV(x, x + \log r' - \log r) - \log r$$
$$= V(\log r, \log r') - \log r.$$

D'après la proposition VI, le quotient $\log G(r, r') : V \log r, \log r')$ tend vers 1.

Une surface $Z = V(X, Y)$, simplement assujettie à être convexe, peut avoir des formes très variées. Parmi ces surfaces, les plus simples sont celles qui correspondent à des fonctions $G(r, r')$ dont les coefficients $C_{n,p}$ sont en général nuls sauf pour certaines valeurs rationnelles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$, du rapport $p : n$. Dans ce cas, la surface Σ sera composée de portions de q prismes au plus dont

les arêtes sont parallèles au plan XOY. Si l'on suppose en outre que chacune des q fonctions (d'une variable) obtenues en supprimant tous les termes, sauf ceux pour lesquels $p : n$ est égal à l'un des nombres α_i, est à croissance régulière, et que les ordres de ces diverses fonctions satisfont à la condition imposée par le théorème IV, les q prismes existent effectivement et se coupent suivant des lignes qui se rapprochent asymptotiquement de $q - 1$ plans passant par OZ. Les sections de Σ par les plans $Z =$ const. sont des lignes polygonales de q côtés et la courbe $\rho'(k)$ est un polygone.

Supposons que les surfaces $Z = V_1(X, Y)$ et $Z = V_2(X, Y)$ étant convexes et $V_2 > V_1$, on sache que $V(X, Y)$ est compris entre V_1 et V_2. La surface Σ sera comprise entre les surfaces $Z = (1 - \varepsilon) V_1$ et $Z = V_2$ puisqu'on suppose l'ordre total fini, et comme ces trois surfaces sont convexes, la polaire réciproque S de Σ sera comprise entre les polaires des deux autres surfaces. Soient S_1 et S_2 ces polaires, S_2 est au-dessous de S_1. Les points $A_{n,p}$ sont donc tous situés sur S_2 ou au-dessus de cette surface. En écrivant cette condition, on retrouve exactement ce que l'on obtient en partant de l'inégalité de Cauchy

$$\log C_{n,p} < V(X, Y) - nX - pY,$$

et en déterminant X et Y pour que le second membre soit minimum.

En outre, aucun point de S ne peut être au-dessus de S_1, ce qui donne une limite inférieure pour les nombres $C_{n,p}$ correspondant aux sommets de S et un renseignement sur la densité des valeurs de n et p fournissant ces nombres. Comme je l'ai déjà remarqué dans le cas d'une seule variable ([1]), il ne sera pas possible, sauf dans certains cas particuliers, d'exprimer par des inégalités ne portant que sur un seul nombre $C_{n,p}$ les conditions nécessaires et suffisantes pour que la surface S soit comprise entre S_1 et S_2; il faudra écrire que le plan formé par trois sommets adjacents est au-dessous du plan tangent de S_1 qui lui est parallèle.

On appliquera aisément cette méthode dans les cas particuliers simples signalés ci-dessus. On obtiendra par exemple le résultat suivant.

([1]) *Voir* mon Ouvrage cité plus haut, p. 45.

Soit $\varphi(r, r')$ la fonction définie par les égalités suivantes :

$$\varphi(r, r') = \mathrm{A}r^{\rho} \qquad \text{si} \qquad r' \leqq \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}\right)^{\frac{1}{\rho'_1}} r^{\frac{\rho-\rho'}{\rho'_1}},$$

$$\varphi(r, r') = \mathrm{D}r^{\rho'}r'^{\rho'_1} \qquad \text{si} \qquad \left(\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{D}}\right)^{\frac{1}{\rho'_1}} r^{\frac{\rho-\rho'}{\rho'_1}} \leqq r' \leqq \left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{B}}\right)^{\frac{1}{\rho_1-\rho'_1}} r^{\frac{\rho'}{\rho_1-\rho'_1}},$$

$$\varphi(r, r') = \mathrm{B}r'^{\rho_1} \qquad \text{si} \qquad r' \geqq \left(\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{B}}\right)^{\frac{1}{\rho_1-\rho'_1}} r^{\frac{\rho'}{\rho_1-\rho'_1}},$$

les nombres ρ, ρ', ρ_1, ρ'_1 satisfaisant aux conditions

$$\rho' < \rho < \rho' + \rho'_1, \qquad \rho'_1 < \rho_1 < \rho' + \rho'_1.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que le rapport de $\log \mathrm{M}(r, r')$ à $\varphi(r, r')$ tende vers 1 lorsque $r + r'$ croît indéfiniment est que :

1° Quel que soit le nombre positif ε, les coefficients $\mathrm{C}_{n,p}$ vérifient à partir d'une valeur de $n + p$ l'inégalité

$$\log \mathrm{C}_{n,p} < -\left(\frac{n}{\rho} + \frac{p}{\rho'_1} - \frac{p\rho'}{\rho\rho'_1}\right) \log\left[\frac{1}{e\mathrm{A}}\left(\frac{n}{\rho} + \frac{p}{\rho'_1} - \frac{p\rho'}{\rho\rho'_1}\right)\right] + \frac{p}{\rho'_1} \log \frac{\mathrm{D}}{\mathrm{A}}$$

si $p : n$ est inférieur ou égal à $\rho'_1 : \rho'$ et une inégalité analogue dans le cas contraire;

2° Qu'il existe une suite de nombres n'_i pour lesquels

$$\lim_{i=\infty}\left[(\mathrm{C}_{n'_i, 0})^{\frac{\rho}{n'_i}} n'_i\right] = \mathrm{A}e\rho, \qquad \lim_{i=\infty} \frac{n'_{i+1}}{n'_i} = 1;$$

3° Qu'il existe une suite de nombres croissants p'_i pour lesquels

$$\lim_{i=\infty}\left[(\mathrm{C}_{0, p'_i})^{\frac{\rho_1}{p'_i}} p'_i\right] = \mathrm{B}e\rho_1, \qquad \lim_{i=\infty} \frac{p'_{i+1}}{p'_i} = 1;$$

4° Qu'il existe une suite de couples de nombres p_i, n_i tels que

$$\lim_{i=\infty} \frac{p_i}{n_i} = \frac{\rho'_1}{\rho'}, \qquad \lim_{i=\infty} \frac{n_{i+1}}{n_i} = 1$$

pour lesquels

$$\lim_{i=\infty} \left[(C_{n_i, p_i})^{\frac{\rho'}{n_i}} n_i \right] = D e \rho'.$$

On généralisera aisément au cas où la section de Σ par les plans $Z =$ const. sera un polygone de plus de trois côtés. Le cas le plus simple après ceux-ci semble être celui où la fonction d'ordre $\rho'(k)$ définie au n° 5 est de la forme $a + b(k + \sqrt{k^2 + c^2})$ [1].

---

(1) Je laisse de côté le cas banal où $\log M(r, r')$ est comparé à une fonction $\varphi(r, r')$ qui est la somme d'une fonction de r et d'une fonction de r'.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES

ASSIER DE POMPIGNAN. — NOTE SUR LE CALCUL TENSORIEL. Un vol. in-8, 32 pages. Paris, J. Hermann, 1923.

Cette Note contient un exposé sommaire des règles du Calcul tensoriel, sous la forme habituellement employée. Le lecteur y trouvera les formules fondamentales de l'Algèbre tensorielle et de l'Analyse tensorielle, y compris celles qui concernent le tenseur de Riemann et Christoffel; l'Ouvrage se termine par quelques notions sommaires sur les densités scalaires et tensorielles.

Une des particularités des notations usitées dans le Calcul tensoriel ordinaire est, comme on sait, l'emploi d'un double jeu d'indices, les uns supérieurs, les autres inférieurs; une des règles du calcul, précieuse par les vérifications rapides qu'elle permet, est que tout indice figurant plusieurs fois dans un même terme d'une formule doit être écrit autant de fois en haut qu'en bas. On peut regretter que l'auteur, dès la première page de sa Note, n'ait pas respecté cette règle dans la notation qu'il a adoptée pour définir la substitution contragrédiente d'une substitution donnée. Cette règle est aussi en défaut dans un assez grand nombre d'autres formules, mais cela tient à ce que les épreuves n'ont pas été bien corrigées. Il est plus difficile de comprendre comment l'auteur a pu laisser dans son texte les deux formules de la fin du n° 16, page 17; il a sans doute oublié que dans la formule précédente, d'où il les a tirées, il y a, grâce à une convention habituellement suivie, un signe de sommation sous-entendu. Il ne faudrait pas que cette seconde convention parût au lecteur, comme la première, une source de confusion.

Malgré les imperfections qui viennent d'être signalées, cette Note rendra des services à l'étudiant désireux d'acquérir rapidement les principes du Calcul tensoriel. E. CARTAN.

MÉLANGES.

UNE LETTRE INÉDITE DE DESCARTES AU PÈRE MERSENNE;

Par M. Henry OMONT.

Dans la collection d'autographes, formée au milieu du siècle dernier par la baronne James de Rothschild et que la Bibliothèque nationale doit à une récente libéralité de son fils, M. le baron Edmond de Rothschild, membre de l'Académie des beaux-arts, se trouve une lettre de Descartes à Mersenne, qui avait échappé aux recherches, pourtant si exactes, des derniers éditeurs des *Œuvres de Descartes*, MM. Charles Adam et Paul Tannery. Elle vient s'ajouter aux dix-huit lettres de Descartes à Mersenne formant aujourd'hui le manuscrit 5160 des nouvelles acquisitions du fonds français (voir L. Delisle, *Catalogue des manuscrits des fonds Libri et Barrois*, 1888). Les éditeurs des *Œuvres de Descartes* avaient cependant constaté l'existence de cette lettre, qu'ils ont mentionnée sous le n° CDLXIII (*Correspondance*, t. IV, p. 583) et dont le texe est reproduit ci-dessous :

« Mon Reverend Pere,

« J'ay receu cete semaine une petite letre de vous avec celle du « P. Bourdin, où vous me mandez que c'est la troisiesme que vous « m'avez escrite sans response et toutefois je pense avoir respondu « cy devant à toutes les vostres, en mes dernieres j'avois aussy « escrit à M. le marquis de New Castel, aux precedentes j'avois « joint ma response à celle de Roberval, et je croy qu'à celle « d'auparavant j'avois joint une letre pour mon neveu du Crevis. « Je vous prie de me mander si vous les avez receuës et si ce neveu « qui m'avoit escrit par vous demeure encore à Paris. Je vous prie « aussy de me mander comment se porte M. de Clairsellier, de la « maladie duquel je suis fort en peine, j'attens aussy quelques

« letres de Bretaigne qu'on luy doit adresser et que je ne voudrois
« pas estre perduës pour ce que je croy qu'il y aura dedans une
« letre de change, mais je me persuade que si son indisposition
« l'empeschoit de m'escrire ceux de son logis ne lairoient pas de
« les recevoir et me les envoyer, toutefois si vous l'allez visiter
« vous me ferèz plaisir de leur dire que s'ils recoivent quelques
« letres pour moy ils prenent la peine de vous les envoyer. Je n'ay
« rien de plus à vous mander pour cete fois sinon que je suis de
« tout mon cœur, Mon Reverend Pere, vostre treshumble et
« tresobeissant serviteur

« D'Egmond, le 14 déc. 1646.

« DESCARTES. »

(au dos) : « Au Reverend Pere, Le Reverend Pere Mercenne,
« Religieux Minime en leur couvent, proche de la place Royale,
« à Paris. » (Cachet de cire rouge.)

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME DE RIESZ-FISCHER ET DU THÉORÈME DE WEYL SUR LES SUITES CONVERGENTES EN MOYENNE ;

PAR M. MICHEL PLANCHEREL
(Zurich).

1. Le théorème de Riesz-Fischer et le théorème de Weyl sur les suites convergentes en moyenne jouent un rôle si important dans tant de recherches, qu'il n'est pas sans intérêt de donner de ces théorèmes une démonstration aussi simple que possible et ne faisant appel qu'aux éléments de la théorie de l'intégrale de Lebesgue ([1]).

([1]) La démonstration que je donne est, en substance, celle que j'ai donnée incidemment dans un Mémoire du Tome 30 des *Rendiconti di Palermo*. Les modifications que j'y ai apportées m'ont été suggérées par la lecture d'un

On sait que le théorème de Riesz-Fischer peut se déduire très simplement du théorème de Weyl ([1]). Nous nous bornerons donc à établir ici ce dernier, en l'énonçant sous une forme un peu plus générale due à M. F. Riesz.

2. *Lemme I.* — Si α est une constante positive, et u, v des quantités réelles quelconques, on a l'inégalité

$$|u+v|^\alpha \leq 2^\alpha |u|^\alpha + 2^\alpha |v|^\alpha.$$

C'est une conséquence immédiate du fait que si x, y sont deux quantités non négatives dont la somme $x+y=1$, $x^\alpha+y^\alpha$ est minimum pour $x=y=\frac{1}{2}$ ou pour $x=1$, $y=0$ selon que $\alpha>1$ ou $\alpha<1$.

Lemme II. — Si $f(x)$ est intégrable (au sens de Lebesgue) dans l'intervalle (fini ou infini) (a, b) et si l est un nombre positif quelconque, l'ensemble E des points de (a, b) où $|f(x)| \geq l$ a une mesure mE au plus égale à $\frac{1}{l}\int_a^b |f|\, dx$.

Car,

$$\int_a^b |f|\, dx \geq \int_E |f|\, dx \geq l \int_E dx = l\, m\mathrm{E}.$$

3. Nous dirons qu'une suite de fonctions mesurables $f_n(x)$ *converge en moyenne d'ordre* α ($\alpha>0$) dans l'intervalle fini ou infini (a, b), s'il existe une fonction mesurable $f(x)$ telle que

$$(1) \qquad \lim_{n\to\infty} \int_a^b |f-f_n|^\alpha\, dx = 0,$$

$f(x)$ est dite la *limite moyenne* de la suite. Une suite qui converge en moyenne ne peut pas avoir deux limites moyennes f, g essentiellement différentes : leur différence $f-g$ ne peut être diffé-

---

Mémoire de W.-H. YOUNG and GRACE CHISHOLM YOUNG, *On the theorem of Riesz-Fischer* (*Quarterly Journal*, t. 44, 1912, p. 49-88), et d'un Mémoire de E.-W. HOBSON, *On certain theorems in the theory of normal orthogonal functions* (*Proceedings London Math. Soc.*, 2ᵉ série, t. 14, p. 428-439).

([1]) *Voir*, par exemple, Ed. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, 2ᵉ édit. (Gauthier-Villars, Paris, 1915), t. 3, p. 475-478.

rente de zéro qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle. Car le lemme I, appliqué à $u = f - f_n$, $v = f_n - g$, montre, après intégration et passage à la limite $n \to \infty$, que $\int_a^b |f - g|^\alpha dx = 0$, c'est-à-dire que $f = g$ presque partout dans (a, b).

La condition nécessaire et suffisante pour que la suite $f_n(x)$ converge en moyenne d'ordre α est que

(2) $$\lim_{n \to \infty,\, p \to \infty} \int_a^b |f_{n+p} - f_n|^\alpha dx = 0.$$

La nécessité de la condition se vérifie en prenant $u = f - f_n$, $v = f_{n+p} - f$ dans le lemme I. La démonstration de la suffisance fait l'objet des paragraphes 4 et 5.

4. Théorème. — *Soient α une constante positive et*

$$f_n(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

une suite de fonctions mesurables telles que toutes les intégrales

$$I_{m,n} = \int_a^b |f_m - f_n|^\alpha dx \qquad (m, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

existent. Soit ε_n la borne supérieure de la suite

$$I_{n,n+p} \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots).$$

Si la série $\sum_1^\infty \varepsilon_n$ converge, la suite $f_n(x)$ converge sur un ensemble E *dont le complémentaire* CE *par rapport à (a, b) est de mesure nulle. Si $f(x)$ est alors définie sur* E *par*

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} f_n(x)$$

et sur CE *d'une manière arbitraire, on a*

(3) $$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f - f_n|^\alpha dx = 0.$$

Si, de plus, les intégrales $\int_a^b |f_n|^\alpha dx$ existent, $\int_a^b |f|^\alpha dx$

existe aussi et

$$(4)\qquad \lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n|^\alpha\,dx = \int_a^b |f|^\alpha\,dx.$$

$\eta > 0$ étant choisi arbitrairement petit, soit $\sum_1^\infty \delta_n$ une série infinie à termes positifs de somme inférieure à η. Déterminons pour chaque indice n le plus petit indice $N = N(n)$ tel que

$$\sum_{p=N}^{\infty} \varepsilon_p < \delta_n^{1+\alpha}$$

et formons l'expression

$$\int_a^b \sum_{\rho=0}^{k-1} |f_{N+k} - f_{N+\rho}|^\alpha\,dx = \sum_{\rho=0}^{k-1} I_{N+\rho,\,N+k}.$$

Chacune des intégrales $I_{N+\rho,\,N+k}$ est au plus égale à $\varepsilon_{N+\rho}$. L'expression elle-même est donc inférieure à $\sum_{\rho=0}^{k-1} \varepsilon_{N+\rho}$, donc à $\delta_n^{1+\alpha}$,

$$\int_a^b \sum_{\rho=0}^{k-1} |f_{N+k} - f_{N+\rho}|^\alpha\,dx < \delta_n^{1+\alpha}.$$

Le lemme II montre que l'ensemble $G(n, k)$ des points où

$$\sum_{\rho=0}^{k-1} |f_{N+k} - f_{N+\rho}|^\alpha \geqq \delta_n^\alpha$$

a une mesure inférieure à δ_n. Sur son complémentaire $CG(n, k)$ on a donc

$$\sum_{\rho=0}^{k-1} |f_{N+k} - f_{N+\rho}|^\alpha < \delta_n^\alpha$$

et, *a fortiori*,

$$|f_{N+k} - f_{N+\rho}| < \delta_n \qquad (\rho = 0, 1, 2, \ldots, k-1).$$

Par conséquent, si m et m' sont deux entiers quelconques compris entre N et $N+k$, on aura, en tout point de $CG(n, k)$,

$$|f_m - f_{m'}| < 2\delta_n \qquad (N \leqq m \leqq N+k,\ N \leqq m' \leqq N+k).$$

L'ensemble $H(n, k)$ de tous les points de (a, b), où l'inégalité

précédente est vérifiée pour tous entiers m, m' de l'intervalle $(N, N+k)$, contient évidemment $CG(n, k)$. Son complémentaire $CH(n, k)$ a donc une mesure inférieure à δ_n. Mais, il résulte de la définition de $H(n, k)$, que $H(n, k)$ contient $H(n, k+1)$. $CH(n, k+1)$ contient $CH(n, k)$. L'ensemble somme de tous les ensembles $CH(n, k)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ a donc lui aussi une mesure au plus égale à δ_n. Soient CK_n cet ensemble et K_n son complémentaire. En tout point de K_n

$$(5) \qquad |f_m - f_{m'}| < 2\delta_n$$

pour toutes valeurs m, m' telles que

$$(6) \qquad m > N, \qquad m' \geq N.$$

L'ensemble CE_η, somme des ensembles CK_n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, a une mesure

$$m\,CE_\eta \leq \sum_{n=1}^{\infty} m\,CK_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n < \eta.$$

Sur son complémentaire E_η l'inégalité (5) a encore lieu sous les conditions (6). La suite $f_n(x)$ converge donc *uniformément* sur un ensemble E_η dont le complémentaire a une mesure arbitrairement petite. L'ensemble des points de divergence de la suite $f_n(x)$ est de mesure nulle.

Si $f(x)$ est la fonction définie dans l'énoncé du théorème, la convergence uniforme de f_n vers f sur E_η entraîne l'intégrabilité de $|f - f_n|^\alpha$ sur E_η et la relation

$$\lim_{m \to \infty} \int_{E_\eta} |f_m - f_n|^\alpha\, dx = \int_{E_\eta} |f - f_n|^\alpha\, dx.$$

Par conséquent,

$$\int_{E_\eta} |f - f_n|^\alpha\, dx \leq \overline{\lim_{m \to \infty}} \int_a^b |f_m - f_n|^\alpha\, dx \leq \varepsilon_n.$$

En faisant tendre η vers zéro, on voit que $|f - f_n|^\alpha$ est intégrable dans (a, b) et que

$$\int_a^b |f - f_n|^\alpha\, dx \leq \varepsilon_n,$$

ε_n tendant vers zéro avec $\frac{1}{n}$, (3) est démontrée. En d'autres termes, f_n converge aussi en moyenne vers f.

Si, maintenant, nous supposons que les intégrales $\int_a^b |f_n|^\alpha dx$ sont finies, le lemme I, appliqué à $u = f_n - f_1$, $v = f_1$, montre que la suite $\int_a^b |f_n|^\alpha dx$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ est bornée. D'autre part, de la convergence uniforme de f_n vers f sur E_{η}, on conclut que, quelque petit que soit η, $|f|^\alpha$ est intégrable sur E_η et que

$$\int_{E_\eta} |f|^\alpha dx = \lim_{n \to \infty} \int_{E_\eta} |f_n|^\alpha dx \leqq \overline{\lim_{n \to \infty}} \int_a^b |f_n|^\alpha dx,$$

$|f|^\alpha$ est donc intégrable dans (a, b) et

$$\lim_{\eta \to 0} \int_{E_\eta} |f|^\alpha dx = \int_a^b |f|^\alpha dx, \qquad \lim_{\eta \to 0} \int_{CE_\eta} |f|^\alpha dx = 0.$$

L'inégalité suivante qui résulte du lemme I,

$$\begin{aligned}\int_{CE_\eta} |f_n|^\alpha dx &\leqq 2^\alpha \int_{CE_\eta} |f - f_n|^\alpha dx + 2^\alpha \int_{CE_\eta} |f|^\alpha dx \\ &\leqq 2^\alpha \int_a^b |f - f_n|^\alpha dx + 2^\alpha \int_{CE_\eta} |f|^\alpha dx,\end{aligned}$$

montre que $\int_{CE_\eta} |f_n|^\alpha dx$ tend vers zéro lorsque η et $\frac{1}{n}$ tendent indépendamment vers zéro. En écrivant alors

$$\begin{aligned}&\int_a^b (|f|^\alpha - |f_n|^\alpha)\, dx \\ &\quad = \left(\int_{E_\eta} |f|^\alpha dx - \int_{E_\eta} |f_n|^\alpha dx\right) + \int_{CE_\eta} |f|^\alpha dx - \int_{CE_\eta} |f_n|^\alpha dx,\end{aligned}$$

et tenant compte du fait que chacun des trois termes du second membre tend vers zéro avec η et $\frac{1}{n}$, on conclut l'exactitude de (4).

5. Théorème. — *Si α est une constante positive et si la suite de fonctions mesurables $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ est telle que*

$$(7) \qquad \lim_{m \to \infty,\, n \to \infty} \int_a^b |f_m - f_n|^\alpha dx = 0,$$

il existe une fonction mesurable $f(x)$ vers laquelle la suite $f_n(x)$ converge en moyenne d'ordre α dans (a, b). Une infinité de suites partielles $f_{n_p}(x)$ $(p = 1, 2, 3, \ldots)$ convergent presque partout dans (a, b) vers $f(x)$. Toute suite partielle qui converge sur un ensemble de mesure positive converge presque partout dans cet ensemble vers $f(x)$.

Si, de plus, les intégrales $\int_a^b |f_n|^\alpha dx$ existent, $\int_a^b |f|^\alpha dx$ existe aussi et

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f_n|^\alpha dx = \int_a^b |f|^\alpha dx. \tag{8}$$

ε_n ayant la même signification qu'au paragraphe 4, (5) montre que $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$. On peut donc, et cela d'une infinité de manières, extraire de la suite ε_n une suite partielle infinie ε_{n_p} telle que $\sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_{n_p}$ converge. La suite correspondante f_{n_p} converge, d'après le théorème du paragraphe 4, presque partout vers une fonction $f(x)$ et $\int_a^b |f - f_{n_p}|^\alpha dx$ tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$. Il suffit de prendre, dans le lemme I, $u = f - f_{n_p}$ et $v = f_{n_p} - f_n$, pour conclure, après intégration, à la convergence en moyenne de f_n vers f.

Si, maintenant, une suite f_{m_q} $(q = 1, 2, 3, \ldots)$ converge vers une fonction $h(x)$ en tous les points d'un ensemble E_1 de mesure positive, on appliquera à cette suite la partie déjà démontrée du théorème. On pourra donc extraire de la suite f_{m_q} une suite partielle $f_{m'_q}$ qui convergera presque partout dans (a, b) vers une fonction $g(x)$ coïncidant sur E_1 avec $h(x)$ et telle que

$$\lim_{q \to \infty} \int_a^b |g - f_{m_q}|^\alpha dx = 0.$$

D'autre part, en vertu de (8), $\lim_{q \to \infty} \int_a^b |f - f_{m_q}|^\alpha dx$. Un raisonnement déjà fait au paragraphe 3 montre que $g = f$ presque partout dans (a, b) et, par suite, que $h = f$ presque partout dans E_1.

Si les intégrales $\int_a^b |f_n|^\alpha dx$ existent, le théorème du paragraphe 4

fait voir que pour toute suite partielle f_{n_p} telle que $\sum_{p=1}^{\infty} \varepsilon_{n_p}$ converge,

$$\lim_{p\to\infty} \int_a^b |f_{n_p}|^\alpha \, dx = \int_a^b |f|^\alpha \, dx. \tag{9}$$

Comme toute suite partielle infinie extraite de la suite f_n contient elle-même des suites partielles f_{n_p} telles que $\sum \varepsilon_{n_p}$ converge, la relation (8) est nécessairement vérifiée. Sans quoi, on pourrait trouver des suites f_{n_p} ne réalisant pas la relation (9).

6. Lorsque $\alpha = 2$, la formule (8) peut se démontrer plus simplement, sans supposer (6) préalablement démontrée. On démontre, en effet, en prenant $u = f_n - f_1$, $v = f_1$ dans le lemme I, que lorsque les intégrales $\int_a^b f_n^2 \, dx$ existent et lorsque

$$\lim_{m\to\infty,\, n\to\infty} \int_a^b (f_m^2 - f_n^2) \, dx = 0,$$

la suite $\int_a^b f_n^2 \, dx$ est bornée.

Après avoir démontré que f^2 est intégrable, on remarquera que la suite $f + f_n$ converge en moyenne vers $2f$ et que, par conséquent, la suite $\int_a^b (f + f_n)^2 \, dx$ est aussi bornée. L'inégalité de Schwarz appliquée au second membre (préalablement intégré) de l'identité $f^2 - f_n^2 = (f + f_n)(f - f_n)$,

$$\left(\int_a^b (f^2 - f_n^2) \, dx\right)^2 \leqq \int_a^b (f + f_n)^2 \, dx \int_a^b (f - f_n)^2 \, dx,$$

montre ensuite l'exactitude de (8) dans le cas $\alpha = 2$.

Notons encore que si (x_0, x_1) est un intervalle fini quelconque contenu dans (a, b), on a, lorsque $\alpha = 2$ et que les fonctions f_n^2 sont intégrables dans (a, b),

$$\lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} f_n \, dx = \int_{x_0}^{x} f \, dx, \qquad \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} |f_n| \, dx = \int_{x_0}^{x} |f| \, dx,$$

et cela uniformément en x dans $x_0 \leqq x \leqq x_1$. Car, l'inégalité de

Schwarz montre, dans le premier cas, que

$$\left(\int_{x_0}^{x} (f - f_n)\, dx\right)^2 \leqq \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} (f - f_n)^2\, dx$$
$$\leqq |x_1 - x_0| \int_a^b (f - f_n)^2\, dx,$$

et dans le second cas, que

$$\left(\int_{x_0}^{x} (|f| - |f_n|)\, dx\right)^2 \leqq \left(\int_{x_0}^{x} |f - f_n|\, dx\right)^2$$
$$\leqq |x_1 - x_0| \int_a^b (f - f_n)^2\, dx.$$

7. Ce dernier résultat est susceptible de généralisation pour tout $\alpha > 0$. On sait, en effet, que si $0 < \beta < \alpha$ et si $f(x)$ est une fonction quelconque telle que $\int_{x_0}^{x_1} |f|^\alpha dx$ existe, $(x_0 \leqq x \leqq x_1)$ étant un intervalle *fini*, $\int_{x_0}^{x_1} |f|^\beta dx$ existe aussi et que [1]

$$\int_{x_0}^{x_1} |f|^\beta dx \leqq |x_1 - x_0|^{\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta}} \left[\int_{x_0}^{x_1} |f|^\alpha dx\right]^{\frac{1}{\alpha-\beta}}.$$

Si donc, la suite f_n converge en moyenne d'ordre α dans (a, b), elle converge en moyenne d'ordre β dans tout intervalle fini (x_0, x_1) contenu dans (a, b). Par conséquent, si $\int_a^b |f_n|^\alpha dx$ existe, on aura encore

$$\lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x_1} |f_n|^\beta dx = \int_{x_0}^{x_1} |f|^\beta dx,$$

et lorsque la puissance $\beta^{\text{ième}}$ a un sens unique et bien déterminé $\left(\beta = \frac{\delta}{\gamma};\ \delta, \gamma \text{ entiers premiers entre eux, } \gamma \text{ impair}\right)$,

$$\lim_{n \to \infty} \int_{x_0}^{x} f_n^\beta\, dx = \int_{x_0}^{x} f^\beta\, dx,$$

uniformément dans (x_0, x_1).

---

[1] *Voir* F. Riesz, *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen* (*Math. Annalen*, t. 69, 1910, p. 457).

8. Toutes nos démonstrations subsistent si nous considérons des suites de fonctions de plusieurs variables et si nous remplaçons l'intervalle (a, b) par un ensemble mesurable quelconque.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE PESANT FIXÉ PAR UN POINT VOISIN DE SON CENTRE DE GRAVITÉ;

Par M. H. VERGNE.

1. Lorsqu'un solide pesant se trouve suspendu par son centre de gravité, la pesanteur a un moment nul par rapport au point de suspension, et le mouvement du solide est alors un mouvement, bien connu en Mécanique, sous le nom de *mouvement à la Poinsot*.

Lorsque le point fixe du solide est, non plus le centre de gravité, mais un point très voisin, la pesanteur a, par rapport à ce point fixe de suspension, non plus un moment nul, mais un moment très petit, et nous pourrons considérer alors le mouvement du solide comme un mouvement à la Poinsot affecté de petites « perturbations » dues à ce moment.

Le calcul de ces perturbations est du ressort de la *Méthode de la variation des constantes*, et le principe de cette méthode nous assure qu'on pourra toujours les déterminer par de simples quadratures, puisqu'on sait résoudre le problème de Poinsot sous sa forme la plus générale. Mais si nous appliquions la méthode de la variation des constantes sous sa forme habituelle en Mécanique, nous serions vraisemblablement conduits à des calculs extrêmement compliqués. C'est pourquoi nous modifierons un peu la méthode usuelle de façon à lui donner plus de souplesse.

La première Partie de cette Note sera consacrée au rappel de la méthode générale de la variation des constantes et des modifications qu'elle comporte.

Dans une seconde Partie nous appliquerons les formules au problème que nous avons en vue, du mouvement d'un solide pesant fixé par un point très voisin de son centre de gravité. Les

mêmes formules s'appliqueraient, cela est évident, au cas d'un solide pesant fixé par un point *quelconque* (même très différent du centre de gravité), pourvu que ce solide soit animé d'une très grande vitesse de rotation [1] : la méthode suppose en effet seulement que l'énergie potentielle de pesanteur (qui jouera le rôle de fonction perturbatrice) est très petite vis-à-vis de l'énergie cinétique de rotation du solide.

La même méthode permettrait d'aborder l'étude du mouvement d'un corps céleste autour de son centre de gravité (considéré comme fixe) sous l'action perturbatrice des astres voisins, même si ce corps céleste était très différent d'un corps de révolution, et même s'il tournait initialement autour d'un axe très différent d'un axe principal d'inertie.

I. — Méthode de la variation des constantes.

2. *Cas général d'un système quelconque d'équations différentielles du premier ordre.* — Je considère un système d'équations différentielles du premier ordre

$$(1) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

où les X_i sont des fonctions données des variables x_i et de la lettre t (qui désignera, par exemple, le temps, pris comme variable indépendante). Je suppose que l'on ait su intégrer complètement ces équations : les x_i seront alors des fonctions connues de t et de n constantes d'intégration $C_1, C_2, \ldots, C_n$:

$$(2) \qquad x_i = \xi_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_n).$$

Le déterminant fonctionnel

$$\Delta = \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(C_1, C_2, \ldots, C_n)}$$

étant supposé fini et différent de zéro, ces équations (2) pourront être inversement résolues par rapport aux C_j, et être remplacées par les suivantes, qui leur sont équivalentes,

$$(3) \qquad C_j = \varphi_j(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

[1] Bien entendu, dans ce cas, les « réactions » du point de suspension seraient elles-mêmes très grandes.

Et, puisque les φ_j sont des intégrales des équations (1), on aura identiquement

$$(4) \qquad \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + X_1 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_1} + X_2 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_2} + \ldots + X_n \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_n} = 0.$$

Je suppose, maintenant, que l'on ait à intégrer un second système d'équations différentielles

$$(1\ bis) \qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i + \varepsilon f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

qui ne diffère du système (1) que par l'adjonction, aux seconds membres, de fonctions données f_i des x_i et de t affectées d'un coefficient très petit ε, que nous appellerons le *coefficient perturbateur* et dont nous négligerons, dans la suite, les puissances supérieures à la première. On profitera, pour intégrer le système (1 *bis*), de ce qu'on a déjà résolu le système non troublé (1), et de ce que ε est petit.

Le principe de la Méthode de la variation des constantes, dû à Lagrange, consiste à poser, *a priori*, les équations (3) [ou leurs équivalentes (2)], et à les considérer comme définissant un changement de variables permettant de passer des n lettres x_i aux n lettres C_j, ou inversement. Moyennant ce changement de variables, le système (1 *bis*), qui est un système différentiel par rapport aux x_i, se transformera en un système différentiel par rapport aux C_j, que l'on obtiendra en éliminant les lettres x_i entre les équations (1 *bis*) et (3). Cette élimination est immédiate : on aura la valeur de $\frac{dC_j}{dt}$ en différentiant l'équation (3) par rapport à t, ce qui donne

$$\frac{dC_j}{dt} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt};$$

remplaçant $\frac{dx_i}{dt}$ par sa valeur tirée de (1 *bis*) et tenant compte de l'identité (4), il vient

$$(1\ ter) \qquad \frac{dC_j}{dt} = \varepsilon \sum_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} f_i \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, n).$$

Tel est le système différentiel en C_j équivalent au système (1 *bis*)

et qu'il s'agit d'intégrer : les seconds membres sont des fonctions connues de t et des x_i, ou, si l'on préfère, de t et des C_j [puisqu'on peut y remplacer les x_i par leurs valeurs (2)].

Profitons maintenant de ce que ε est petit. Si ε était nul, les C_j seraient rigoureusement des constantes indépendantes du temps; ε n'étant plus nul mais très petit, les C_j varieront mais varieront lentement ; et nous aurons une valeur très approchée de la dérivée $\frac{dC_j}{dt}$ en considérant, aux seconds membres de (1 *ter*), les lettres C_j comme gardant constamment les valeurs C_j^0 qu'elles ont à l'instant initial t_0. Les seconds membres de (1 *ter*) sont ainsi devenus des fonctions de la seule variable t, et ces équations nous donneront les valeurs des C_j, à un instant quelconque par de simples quadratures :

$$(5) \qquad C_j = C_j^0 + \varepsilon \int_{t_0}^{t} \sum_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} f_i;$$

les quantités

$$(6) \qquad \delta C_j = \varepsilon \int_{t_0}^{t} \sum_i \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} f_i$$

donnent les *variations des constantes* C_j à partir de l'instant initial t_0; il est entendu que sous le signe $\int$ les lettres C_j gardent leurs valeurs constantes non troublées C_j^0.

On a ainsi résolu le système (1 *ter*) et, par suite, le système équivalent (1 *bis*) (¹).

Remarque. — Dans le calcul des seconds membres de (1 *ter*), c'est-à-dire dans le calcul des quadratures (6) qui donnent les variations δC_j, nous avons fait usage, *à la fois*, des formules (2) et (3); autrement dit, nous avons supposé que les formules (2), qui résolvent le problème non troublé, avaient été résolues *effectivement*, par rapport aux C_j, sous la forme (3). Or, cette résolution peut être très pénible, elle peut même n'être pas *pratique-*

(¹) Bien entendu, on pourrait faire une nouvelle approximation en remplaçant, aux seconds membres de (1 *ter*), les C_j non plus par les constantes C_j^0, mais par les valeurs plus approchées (5) : ces seconds membres seront encore des fonctions de t seul; d'où de nouvelles valeurs des C_j par de simples quadratures.

ment effectuable : nous allons montrer qu'on peut s'en passer, et ne se servir, somme toute, que des formules (2).

Les formules (2), qui donnent les x en fonction des C, nous définissent des dérivées partielles, au nombre de n^2, de la forme

$$\frac{\partial x_i}{\partial C_j} = \frac{\partial \xi_i}{\partial C_j};$$

les formules (3), qui donnent les C en fonction des x, nous définissent de même n^2 dérivées partielles de la forme

$$\frac{\partial C_j}{\partial x_i} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}.$$

Bien entendu, ces deux sortes de dérivées partielles ne sont pas distinctes, l'un des groupes peut se déduire de l'autre : on a, par exemple,

$$(7) \qquad \frac{\partial C_j}{\partial x_i} = \frac{(-1)^{i+j}}{\Delta} \frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{D(C_1, C_2, \ldots, C_{j-1}, C_{j+1}, \ldots, C_n)},$$

Δ désignant, comme plus haut, le jacobien des x_i par rapport aux C_j.

Cela permet, aux seconds membres de (1 *ter*), de remplacer les $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}$ $\left(\text{ou } \frac{\partial C_j}{\partial x_i}\right)$ qui y figurent par les seconds membres de (7) qui sont entièrement calculables par les seules formules (2), sans qu'on ait besoin d'écrire effectivement les formules (3). On voit ainsi, immédiatement, que les formules (1 *ter*) prennent la forme

$$\frac{dC_j}{dt} = \frac{\varepsilon}{\Delta} \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial C_1} & \frac{\partial x_2}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial C_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial C_2} & \frac{\partial x_2}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial C_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial C_{j-1}} & \frac{\partial x_2}{\partial C_{j-1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial C_{j-1}} \\ f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial C_{j+1}} & \frac{\partial x_2}{\partial C_{j+1}} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial C_{j+1}} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial C_n} & \frac{\partial x_2}{\partial C_n} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial C_n} \end{vmatrix},$$

où le déterminant du numérateur ne diffère du jacobien Δ que par

la substitution des fonctions perturbatrices $f_1, f_2, \ldots, f_n$ aux éléments de la $j^{\text{ième}}$ ligne.

Telle est, pour un système différentiel quelconque (1 *bis*), la méthode classique de la variation des constantes, qui permet de calculer les C_j (ou les δC_j) par quadratures, lorsque l'on a résolu le problème non troublé (1) au moyen des formules (2).

Nous allons voir maintenant comment la méthode peut être modifiée et simplifiée dans le cas des équations de la Mécanique.

3. *Cas des équations canoniques.* — Dans les problèmes de Mécanique rationnelle des systèmes holonomes, les équations différentielles — tant celles du mouvement troublé que celles du mouvement non troublé — peuvent se mettre sous la forme canonique de Hamilton.

Je considère donc un premier système de $2n$ équations canoniques

$$(I) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

définissant le mouvement non troublé. La fonction caractéristique $F(x_i, y_i)$ sera supposée, pour simplifier, ne pas dépendre explicitement du temps t [1] : c'est une fonction donnée des variables x_i, y_i.

Je suppose que l'on ait su intégrer complètement ce système non troublé (I) *par la méthode de Jacobi* [2], dont je rappelle le principe. Considérons l'équation aux dérivées partielles suivante

$$(8) \qquad F\left(x_i, \frac{\partial S}{\partial x_i}\right) = \text{const.},$$

où le premier membre n'est autre que la fonction caractéristique $F(x_i, y_i)$, où l'on a remplacé les y_i par les dérivées par-

(1) Cette restriction n'est nullement essentielle, nous la faisons uniquement pour simplifier un peu l'exposition ; mais la méthode subsiste presque sans modification dans le cas où la fonction F dépend explicitement de t.

(2) Cette fois, il s'agit d'une restriction essentielle : les calculs que nous allons faire, dans ce numéro, pour déterminer le mouvement troublé ne subsisteraient pas sans modification si l'on avait intégré le problème non troublé par une méthode autre que celle de Jacobi.

tielles $\frac{\partial S}{\partial x_i}$. Supposons que l'on ait trouvé, de cette équation (8), une solution particulière $S(x_1, x_2, \ldots, x_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ dépendant de n constantes arbitraires β_i. La constante du second membre de (8) sera une fonction de ces n constantes, de sorte qu'on aura identiquement

$$F\left(x_i, \frac{\partial S}{\partial x_i}\right) = \varphi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n). \tag{9}$$

La fonction $S(x_i, \beta_i)$ étant connue, posons

$$\frac{\partial S}{\partial x_i} = y_i, \qquad \frac{\partial S}{\partial \beta_i} = \alpha_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{10}$$

ces $2n$ équations (10) peuvent être considérées comme définissant un changement de variables permettant de passer des $2n$ lettres x_i, y_i aux $2n$ lettres β_i, α_i ou inversement. La méthode de Jacobi consiste à prendre comme nouvelles variables les β_i, α_i au lieu des x_i, y_i. Le système (I) se transformera ainsi en un nouveau système, et, comme l'expression

$$\sum \alpha_i \, d\beta_i - \sum x_i \, dy_i = d\left(S - \sum x_i y_i\right)$$

est, d'après (10), une différentielle exacte, le changement de variables est *canonique* [1], c'est-à-dire qu'il n'altère pas la forme canonique du système d'équations (I), qui deviendra

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \beta_i}, \qquad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \alpha_i},$$

ou, à cause de l'identité (9),

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_i}, \qquad \frac{d\beta_i}{dt} = 0. \tag{11}$$

Ces équations (11) s'intègrent immédiatement; on a d'abord

$$\beta_i = \text{const.}$$

Les β_i étant des constantes, il en est de même de la fonction $\varphi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ et de ses dérivées $\frac{\partial \varphi}{\partial \beta_i}$; et les premières

[1] H. Poincaré, *Leçons de Mécanique céleste*, t. I, p. 3 et 11.

équations (11) donneront, pour les α_i, des fonctions linéaires du temps

$$\alpha_i = \frac{\partial \varphi}{\partial \beta_i} t + \varpi_i,$$

les ϖ_i étant de nouvelles constantes d'intégration.

On a ainsi intégré complètement le système (11), et, par suite, le système (I); les constantes d'intégration, au nombre de $2n$, sont les β_i et les ϖ_i. Et les relations qui expriment les variables initiales x_i, y_i en fonction du temps et de ces $2n$ constantes d'intégration sont les relations (10).

Telle est la méthode de Jacobi pour la résolution du système non troublé (I). Elle exige, comme on voit, la connaissance d'une intégrale particulière $S(x_1, x_2, \ldots, x_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ de l'équation aux dérivées partielles (8), dépendant de n constantes arbitraires β_i.

Je suppose maintenant que l'on ait à étudier un second mouvement, *voisin* du premier, et que nous appellerons le *mouvement troublé*, régi par le système d'équations canoniques

$$\text{(I bis)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

qui ne diffère du système non troublé (I) que par la présence, aux seconds membres, des dérivées d'une fonction perturbatrice f, affectée d'un très petit coefficient perturbateur ε. La fonction perturbatrice $f(x_i, y_i, t)$ dépend des variables x_i, y_i et aussi explicitement du temps t.

Il s'agit d'intégrer le système (I *bis*) en profitant de la solution qu'on vient d'obtenir pour le système non troublé (I).

La méthode de la variation des constantes consiste à continuer à poser *a priori* les équations (10), et à les regarder comme définissant un changement de variables passant des lettres x_i, y_i aux lettres α_i, β_i. Ce changement de variables étant *canonique*, comme nous l'avons déjà remarqué, les équations différentielles régissant les nouvelles variables α_i, β_i seront encore canoniques, c'est-à-dire que le système (I *bis*) se transformera en le suivant :

$$\frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial \beta_i} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \beta_i}, \qquad \frac{d\beta_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial \alpha_i} - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial \alpha_i},$$

ou, à cause de l'identité (9),

$$(11\ bis) \qquad \frac{d\alpha_i}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i} + \varepsilon\frac{\partial f}{\partial\beta_i}, \qquad \frac{d\beta_i}{dt} = 0 - \varepsilon\frac{\partial f}{\partial\alpha_i}.$$

Ce système (11 *bis*) s'intègre immédiatement par approximations en profitant de ce que ε est petit [1].

En première approximation, faisons $\varepsilon = 0$, le système (11 *bis*) est alors identique au système (11), et nous trouvons, pour les β_i des constantes, pour les α_i des fonctions linéaires du temps : c'est le mouvement non troublé.

Ensuite, dans les seconds membres des *secondes* équations (11 *bis*) (celles en β_i), remplaçons les β_i et les α_i par leurs valeurs de première approximation : nous obtiendrons, *par simples quadratures*, de nouvelles valeurs plus approchées des β_i.

Enfin, dans les seconds membres des *premières* équations (11 *bis*) (celles en α_i), remplaçons les β_i par leurs valeurs de seconde approximation, et les α_i par leurs valeurs de première approximation : nous obtiendrons, *par simples quadratures*, de nouvelles valeurs plus approchées des α_i.

Telle est la seconde approximation : elle s'effectue, comme on le voit, en deux temps [2].

On a ainsi résolu le système (11 *bis*), c'est-à-dire le système équivalent (I *bis*). Mais, sous cette forme, la solution nécessite, on le voit, que le système non troublé (I) ait été intégré *par la méthode de Jacobi* et non par une autre [3]. Or, l'équation aux dérivées partielles de Jacobi (8) peut fort bien être très compliquée et son intégrale particulière $S(x_1, x_2, \ldots, x_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ être fort malaisée à former. Il arrivera souvent que le mouvement non troublé aura été étudié par une toute autre méthode que celle de Jacobi, par exemple en intégrant simplement les « équations de Lagrange » définissant le mouvement. Les formules ci-dessus ne sont plus, alors, applicables. Il est vrai que lorsqu'on a intégré

---

(1) H. Poincaré, *Leçons de Mécanique céleste*, t. I, p. 111.

(2) Bien entendu, on pourra faire une nouvelle approximation, toujours par la même méthode (en deux temps), n'exigeant que des quadratures.

(3) C'est un point sur lequel ont insisté Tisserand (*Traité de Mécanique céleste*, t. I, p. 162-163), et Poincaré (*Leçons de Mécanique céleste*, t. I, p. 64, et Cours oral de la Sorbonne, 1909-1910).

complètement un problème de Mécanique, il est toujours possible de former une intégrale $S(x_i, \mathfrak{z}_i)$ de l'équation aux dérivées partielles de Jacobi : l' « action » le long d'une trajectoire (considérée comme fonction des coordonnées du point de départ et du point d'arrivée) en donne une, comme on sait [1]. Mais ce sont là des calculs laborieux, et qu'il y a lieu de chercher à éviter. C'est pourquoi, dans le numéro suivant, nous allons modifier les formules de façon à les rendre directement applicables à tous les cas, quelle que soit la méthode par laquelle on aura résolu le problème du mouvement non troublé.

4. *Méthode modifiée.* — Je récris les équations canoniques (I) du mouvement non troublé [2]

$$\text{(I)} \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i},$$

et je suppose que, par un procédé *quelconque*, on ait su les intégrer complètement : alors les x_i, y_i seront des fonctions connues du temps t, et de $2n$ constantes d'intégration $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$: soient

$$(12) \qquad \begin{cases} x_i = \xi_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_{2n}), \\ y_i = \eta_i(t, C_1, C_2, \ldots, C_{2n}). \end{cases}$$

Je récris maintenant les équations canoniques (I *bis*) du mouvement troublé

$$(\text{I } bis) \qquad \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial F}{\partial y_i} + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial y_i}, \qquad \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_i},$$

équations qu'il s'agit d'intégrer. Nous poserons, à cet effet,

$$x_i = \xi_i + \delta x_i, \qquad y_i = \eta_i + \delta y_i,$$

ξ_i, η_i étant les fonctions non troublées des formules (12), et nous allons donner des formules permettant de calculer les « perturba-

---

(1) *Voir*, par exemple, P. APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, 2e éd., t. II, p. 430; ou V. VOLTERRA, *Leçons sur les fonctions de lignes*, p. 55.

(2) La fonction caractéristique $F(x_i, y_i, t)$ peut dépendre non seulement des variables x_i, y_i, mais aussi explicitement du temps t.

tions » δx_i, δy_i, c'est-à-dire les variations des variables elles-mêmes, et non plus celles des constantes ([1]).

Considérons la fonction perturbatrice $f(x_i, y_i, t)$, et remplaçons-y les x_i, y_i par les expressions (12) qui représentent leurs valeurs non troublées : elle devient une fonction

$$f(C_1, C_2, \ldots, C_{2n}, t)$$

des $2n+1$ lettres C_j et t. Posons, ensuite,

$$\sigma = \int_{t_0}^{t} f(C_1, C_2, \ldots, C_{2n}, t)\, dt, \tag{13}$$

quadrature où les lettres C sont traitées comme des constantes : nous avons là une fonction $\sigma(C_1, C_2, \ldots, C_{2n}, t)$, que nous appellerons la fonction résolvante, parce que sa connaissance va donner immédiatement la solution du système troublé (I *bis*). Au moyen des formules (12) (supposées résolues par rapport aux lettres C_j) nous pouvons exprimer cette fonction σ en fonction des lettres x_i, y_i, t : elle devient une fonction $\sigma(x_i, y_i, t)$, et *il suffira, pour avoir complètement résolu le système* (I *bis*) (aux termes en ε^2 près), *de poser simplement*

$$\delta x_i = \varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial y_i}, \qquad \delta y_i = -\varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}; \tag{14}$$

dans les seconds membres de ces formules, les x_i, y_i seront, bien entendu, remplacés par leurs valeurs non troublées (12).

La vérification de cette affirmation est immédiate : il suffit de remarquer que la fonction $\sigma(x_i, y_i, t)$ vérifie identiquement l'équation suivante ([2])

$$\frac{\partial \sigma}{\partial t} + (\sigma, F) = f, \tag{15}$$

où (σ, F) représente, suivant l'usage, la *parenthèse de Poisson*,

---

([1]) H. Vergne, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 20 novembre 1916, et *Bulletin des Sciences mathématiques*, novembre et décembre 1917.

([2]) Il est très facile de le vérifier par un calcul direct; on peut aussi remarquer, sur la formule (13), que f est la dérivée de σ par rapport à t lorsque les C ne varient pas, c'est-à-dire lorsque les x_i, y_i vérifient les équations (I); or, le premier membre de (15) représente précisément la même dérivée.

relative aux deux fonctions σ et F :

$$(\sigma, \mathrm{F}) = \sum_i \left(\frac{\partial \sigma}{\partial x_i} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial y_i} - \frac{\partial \sigma}{\partial y_i} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_i} \right);$$

alors, si dans les équations (I *bis*) on remplace x_i par $\xi_i + \varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial y_i}$, et y_i par $\eta_i - \varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial x_i}$, on obtient des identités (en négligeant ε^2), en vertu des équations (I) et (15) : la première équation (I *bis*), par exemple, devient identique à l'équation (15) différentiée par rapport à y_i.

On a ainsi résolu le problème troublé (I *bis*) (aux termes en ε^2 près), *au moyen de la seule quadrature* (13), qui donne la fonction résolvante σ [1].

A un instant arbitraire t_0, choisi comme instant initial, correspond, pour le mouvement troublé, un certain mouvement non troublé *osculateur* [2] défini par des valeurs déterminées des constantes C_j. Les formules (14) donnent, à toute époque, les valeurs explicites des perturbations δx_i, δy_i, à partir de cet instant t_0 pris comme limite inférieure de la quadrature (13) (δx_i, δy_i s'annulent, en effet, comme σ, pour $t = t_0$).

5. Tirons quelques conséquences des formules (14). Soit $\varphi(x_i, y_i, t)$ une fonction quelconque. Dans le mouvement non troublé elle a pour valeur $\varphi(\xi_i, \eta_i, t)$. Dans le mouvement troublé elle devient

$$\begin{aligned}\varphi(\xi_i + \delta x_i, \eta_i + \delta y_i, t) &= \varphi(\xi_i, \eta_i, t) + \sum_i \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi_i} \delta x_i + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta_i} \delta y_i \right) \\ &= \varphi(\xi_i, \eta_i, t) + \varepsilon(\varphi, \sigma)\end{aligned}$$

d'après les formules (14). Nous pouvons donc dire que la « perturbation » subie par une fonction quelconque $\varphi(x_i, y_i, t)$, quand

(1) On peut pousser plus loin l'approximation, en tenant compte successivement des termes en ε^2, ε^3, ...; chaque approximation nouvelle n'exige, chaque fois, qu'une seule quadrature [H. VERGNE, *Sur les équations générales de la Mécanique analytique* (*Bull. des Sc. math.*, nov.-déc. 1917)].

(2) Nous disons, suivant l'usage, qu'un mouvement troublé et un mouvement non troublé sont « osculateurs » à un certain instant, si à cet instant les x_i et les y_i ont mêmes valeurs pour les deux mouvements.

on passe du mouvement non troublé au mouvement troublé, a pour valeur

$$\delta\varphi = \varepsilon(\varphi, \sigma).$$

Elle sera nulle si $(\varphi, \sigma) = 0$; la fonction φ sera alors une fonction *sans perturbation*, ayant à chaque instant la même valeur dans le mouvement troublé et dans le mouvement non troublé.

Nous observerons, en passant, que si φ_1 et φ_2 sont deux fonctions sans perturbation, (φ_1, φ_2) en est une autre : cela résulte de l'identité bien connue de Poisson

$$[\sigma, (\varphi_1, \varphi_2)] + [\varphi_1, (\varphi_2, \sigma)] + [\varphi_2, (\sigma, \varphi_1)] = 0.$$

En particulier, on a évidemment $(\sigma, \sigma) = 0$: *la fonction résolvante σ est une fonction sans perturbation*. Cherchons la signification concrète de cet énoncé. L'expression

$$\frac{\sigma}{t - t_0} = \frac{1}{t - t_0}\int_{t_0}^{t} f\,dt$$

représente, entre les instants *arbitraires* t_0 et t, la valeur moyenne que prend la fonction perturbatrice *dans le mouvement non troublé* $\left(\text{puisque, sous le signe } \int, \text{ les } C_j \text{ ne varient pas}\right)$. Nous pouvons donc donner, du théorème, cet autre énoncé assez curieux :

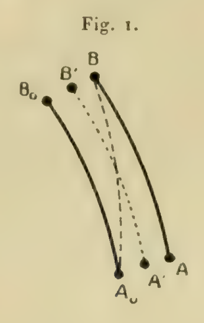
Entre deux instants quelconques t_0 et t, la fonction perturbatrice aura toujours même valeur moyenne dans le mouvement non troublé osculateur à l'instant t_0, et dans le mouvement non troublé osculateur à l'instant t.

Bien entendu, il n'en faudrait pas du tout conclure qu'elle aura aussi même valeur moyenne dans le mouvement troublé, ni même dans un mouvement non troublé osculateur à un autre instant que t_0 ou t_1.

Par exemple, considérons, entre deux instants arbitraires t_0 et t_1, une planète décrivant une orbite troublée; soit A_0B l'arc de trajectoire troublée décrit entre ces deux instants (*fig.* 1); soit, toujours entre ces deux mêmes instants, A_0B_0 l'arc de l'orbite keplérienne osculatrice à l'instant t_0, AB l'arc de l'orbite képlé-

rienne osculatrice à l'instant t, et $A'B'$ l'arc de l'orbite képlérienne osculatrice à un instant différent de t_0 et de t. *La fonction*

Fig. 1.



perturbatrice f aura la même valeur moyenne le long de A_0B_0 *et le long de* AB. Mais il n'en faut pas conclure qu'elle aura la même valeur moyenne le long de A_0B, ni le long de $A'B'$.

6. Revenons aux formules (14) : elles donnent immédiatement les perturbations, à la condition que la fonction résolvante σ ait été exprimée *en fonction des lettres* x_i, y_i, t. Or, la quadrature (13) donne σ en fonction des lettres C_j et t : il y a donc lieu de tirer les C_j des formules (12) pour les porter ensuite dans (13), si l'on veut utiliser les formules (14) sous leur forme actuelle. Or, c'est là un calcul qui peut être très pénible et même impraticable : nous allons montrer qu'on peut s'en passer et ne se servir, somme toute, que des formules (12) telles qu'elles sont (non résolues par rapport aux C_j) et de la quadrature (13) telle qu'elle est (donnant σ en fonction des C_j et de t).

Les deux expressions $\sigma(x_i, y_i, t)$ et $\sigma(C_j, t)$ désignent une seule et même fonction, exprimée soit au moyen des lettres x_i, y_i, soit au moyen des lettres C_j. Il est clair que les deux sortes de dérivées partielles qui en résultent, $\frac{\partial\sigma}{\partial x_i}$, $\frac{\partial\sigma}{\partial y_i}$ d'une part, et $\frac{\partial\sigma}{\partial C_j}$ d'autre part, ne sont pas distinctes, que l'un des groupes peut se déduire de l'autre, et que nous avons, par exemple,

$$\frac{\partial\sigma}{\partial C_j} = \frac{\partial\sigma}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial C_j} + \ldots + \frac{\partial\sigma}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial C_j} + \frac{\partial\sigma}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial C_j} + \ldots + \frac{\partial\sigma}{\partial y_n}\frac{\partial y_n}{\partial C_j},$$

formule que l'on peut, d'après (14), écrire ainsi :

$$\varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial C_j} = -\delta y_1 \frac{\partial x_1}{\partial C_j} - \ldots - \delta y_n \frac{\partial x_n}{\partial C_j} + \delta x_1 \frac{\partial y_1}{\partial C_j} + \ldots + \delta x_n \frac{\partial y_n}{\partial C_j};$$

nous avons là un système de $2n$ équations linéaires par rapport aux inconnues δx_i, δy_i, dont les coefficients et les seconds membres sont directement connus par les équations (12) et (13). Ce système se résout immédiatement, en désignant par Δ le déterminant fonctionnel des x_i, y_i par rapport aux C_j,

$$\Delta = \frac{D(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)}{D(C_1, C_2, \ldots, C_{2n})},$$

on aura

$$(14\ bis) \quad \begin{cases} \delta x_i = \dfrac{\varepsilon}{\Delta} \dfrac{D(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{i-1}, \sigma, y_{i+1}, \ldots, y_n)}{D(C_1, C_2, \ldots, C_{2n})}, \\ \delta y_i = \dfrac{-\varepsilon}{\Delta} \dfrac{D(x_1, \ldots, x_{i-1}, \sigma, x_{i+1}, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)}{D(C_1, C_2, \ldots, C_{2n})}, \end{cases}$$

où le déterminant numérateur de δx_i, par exemple, ne diffère du jacobien Δ que par la substitution des dérivées de σ aux dérivées de y_i. On a donc ainsi les valeurs des perturbations au moyen des seules formules (12) et (13), toutes les quantités x_i, y_i, σ étant exprimées en fonction des C.

L'identité des formules (14 *bis*) et (14) est, d'ailleurs, absolument évidente, puisqu'on a, par exemple, identiquement

$$\frac{\dfrac{D(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{i-1}, \sigma, y_{i+1}, \ldots, y_n)}{D(C_1, C_2, \ldots, C_{2n})}}{\dfrac{D(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)}{D(C_1, C_2, \ldots, C_{2n})}} = \frac{D(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{i-1}, \sigma, y_{i+1}, \ldots, y_n)}{D(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)},$$

et que ce dernier jacobien se réduit à $\dfrac{\partial \sigma}{\partial y_i}$.

7. Il y a lieu de signaler un cas où certaines des formules (14 *bis*) se simplifient beaucoup. Supposons que, dans les formules (12) du mouvement non troublé, l'une des constantes d'intégration, C_1 par exemple, ne figure que dans un seul des seconds membres, ξ_1 par exemple : c'est-à-dire que x_1 seul dépend de C_1, tandis que x_2, x_3, y_n n'en dépendent pas. Alors la perturbation δy_1 de la variable canonique *conjuguée* de x_1 prendra [soit d'après (14 *bis*),

soit d'après (14)] la forme très simple

$$(14\ ter)\qquad \delta y_1 = -\varepsilon \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial C_1}}{\frac{\partial\xi_1}{\partial C_1}};$$

de même, si une autre constante C_i, dans le mouvement non troublé, n'intéresse qu'une seule autre variable y_j, la perturbation δx_j de la variable *conjuguée* de y_j sera

$$(14\ ter)\qquad \delta x_j = \varepsilon \frac{\frac{\partial\sigma}{\partial C_i}}{\frac{\partial\eta_j}{\partial C_i}}.$$

Ainsi à chaque constante C ne figurant que dans *une seule* des formules (12), correspond la simplification d'une des formules (14 *bis*), prenant la forme (14 *ter*) ([1]).

8. Les formules (14 *bis*), comme les formules (14), supposent essentiellement que les équations du mouvement — tant le système non troublé (I) que le système troublé (I *bis*) — ont été mises sous forme canonique, autrement dit que les variables x_i, y_i constituent un système de variables canoniques. Or, il arrivera souvent qu'ayant à étudier le mouvement d'un système mécanique holonome à n degrés de liberté, on aura choisi un système de coordonnées curvilignes $q_1, q_2, \ldots, q_n$, et qu'on aura résolu le problème non troublé, non pas en le mettant sous forme canonique, mais en intégrant les équations de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q'_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i},$$

([1]) Comme exemple d'une telle simplification, prenons le cas où les variables canoniques x_i, y_i constituent un système de « variables de Jacobi », j'entends par là un système tel que celui désigné par $\alpha_i\beta_i$ au n° 3. On aura alors dans le mouvement non troublé

$$\beta_i = \text{const.},\qquad \alpha_i = \frac{\partial\varphi}{\partial\beta_i}t + \varpi_i;$$

les $2n$ constantes d'intégration C_j sont ici les β_i et les ϖ_i. Chaque ϖ_i ne figure que dans *un seul* α_i. Les perturbations des variables β_i seront donc données par

$$(14\ ter)\qquad \delta\beta_i = -\varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial\varpi_i}.$$

Les formules donnant les $\delta\alpha_i$ se simplifient d'ailleurs aussi, mais moins.

dans lesquelles, suivant l'usage, U désigne la fonction de forces (fonction donnée de t et des q, mais pas des q'), et T désigne l'énergie cinétique (fonction de t, des q et des q', quadratique par rapport aux q')

$$(16) \qquad 2\mathrm{T} = \sum_{ik} a_{ik} q'_i q'_k + \sum_i b_i q'_i + c_i \qquad (a_{ik} = a_{ki}).$$

Les q_i seront alors des fonctions connues du temps t et de $2n$ constantes d'intégration

$$(17) \qquad q_i = \varphi_i(t, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{2n});$$

et il en sera de même des q'_i

$$(18) \qquad q'_i = \varphi'_i(t, \mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{2n}),$$

φ'_i désignant une dérivée prise par rapport à t sans faire varier les C.

Il est bien facile de voir que les formules (14 *bis*) continueront à permettre le calcul complet des perturbations δq_i, dans le mouvement troublé, lorsque à la fonction de forces U on ajoute une petite fonction perturbatrice $-\varepsilon f$, dépendant des q_i et de t. On calculera toujours la même quadrature

$$(13\ bis) \qquad \sigma = -\int_{t_0}^{t} f(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{2n}, t)\, dt,$$

et il suffira de se rappeler qu'on obtient, d'après Poisson et Hamilton, un système de $2n$ variables canoniques en adjoignant aux n lettres q_i les n lettres p_i définies par

$$p_i = \frac{\partial \mathrm{T}}{\partial q'_i},$$

qui sont connues d'après la formule (16). On aura alors, d'après (14 *bis*),

$$\delta q_i = \varepsilon \frac{\dfrac{\mathrm{D}(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_{i-1}, \sigma, p_{i+1}, \ldots, p_n)}{\mathrm{D}(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{2n})}}{\dfrac{\mathrm{D}(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)}{\mathrm{D}(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_{2n})}};$$

on peut d'ailleurs se débarrasser des variables auxiliaires p_i, et introduire à leur place les variables q'_i : car le déterminant fonctionnel dénominateur de δq_i est identique au produit des deux

suivants :

$$\frac{D(q_1, \ldots, q_n, q'_1, \ldots, q'_n)}{D(C_1, C_2, \ldots, C_{2n})} \cdot \frac{D(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n)}{D(q_1, \ldots, q_n, q'_1, \ldots, q'_n)},$$

et ce dernier jacobien écrit n'est autre que le discriminant $\mathfrak{D}$ des termes quadratiques de $2T$, c'est-à-dire le déterminant des a_{ik}.

De la même manière, on voit immédiatement que le numérateur de δq_i est égal à

$$\frac{D(q_1, \ldots, q_n, q'_1, \ldots, q'_{i-1}, \tau, q'_{i+1}, \ldots, q'_n)}{D(C_1, C_2, \ldots, C_{2n})} \cdot A_{ii},$$

A_{ii} désignant le mineur de $\mathfrak{D}$ par rapport à l'élément a_{ii}. D'où la formule donnant explicitement la perturbation

$$\delta q_i = \varepsilon \cdot \frac{A_{ii}}{\mathfrak{D}} \cdot \frac{\dfrac{D(q_1, \ldots, q_n, q'_1, \ldots, q'_{i-1}, \tau, q'_{i+1}, \ldots, q'_n)}{D(C_1, C_2, \ldots, C_{2n})}}{\dfrac{D(q_1, \ldots, q_n, q'_1, \ldots, q'_n)}{D(C_1, C_2, \ldots, C_{2n})}},$$

au moyen des seules formules non troublées (16), (17), (18) et de la quadrature (13 *bis*) (¹).

II. — Mouvement d'un solide pesant fixé par un point voisin de son centre de gravité.

9. Nous nous proposons maintenant d'appliquer sur un exemple les généralités qui précèdent.

Lorsqu'un solide sur lequel n'agit aucune force donnée est fixé par un de ses points, il est animé d'un mouvement bien connu en Mécanique sous le nom de Mouvement *à la Poinsot* : ce sera notre mouvement non troublé. Nous allons rechercher quelles perturbations subit ce mouvement à la Poinsot lorsque le solide est soumis à de faibles actions perturbatrices, par exemple lorsqu'il se trouve dans un champ de gravité infiniment petit, ou bien lorsqu'il se

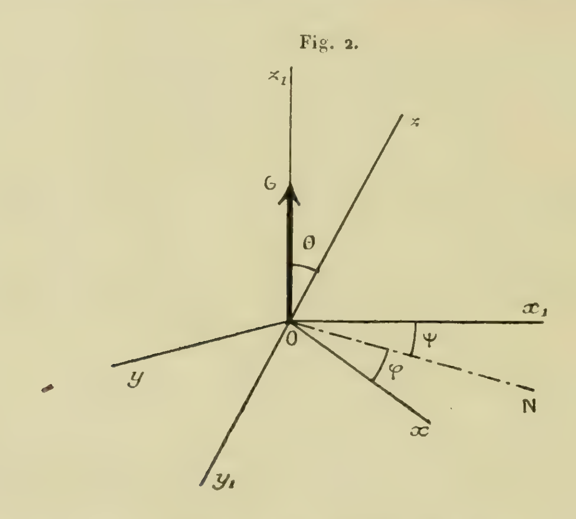
(¹) C'est ainsi qu'on pourrait, par exemple, étudier les perturbations du mouvement képlérien d'une planète dans le plan même de son orbite, en prenant comme variables q_1, q_2 de Lagrange le rayon vecteur r et l'angle polaire θ. On aurait ainsi les perturbations δr et $\delta\theta$ par des formules assez simples. Il est vrai que, dans ce cas, il existe un système bien connu de variables de Jacobi, donnant lieu à l'emploi des formules encore beaucoup plus simples (14 *ter*) de la note du n° 7. [H. Vergne, *Sur le calcul des perturbations* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, mars-avril 1919).]

trouve dans le champ de la pesanteur terrestre, mais qu'il est suspendu par un point très voisin de son centre de gravité.

Nous commencerons par rappeler les formules classiques du mouvement à la Poinsot, formules au moyen desquelles nous exprimerons facilement les variables canoniques du mouvement. Puis nous formerons la fonction résolvante σ, ce qui permettra d'employer les formules (14 *bis*) pour le calcul des perturbations.

10. *Mouvement à la Poinsot.* — Puisque aucune force donnée n'agit sur le solide, son moment cinétique OG par rapport au point fixe O est un vecteur fixe en grandeur, direction et sens. Rap-

Fig. 2.



portons le mouvement à un trièdre trirectangle de référence fixe $Ox_1y_1z_1$, la direction Oz_1 coïncidant avec OG. Soient Ox, Oy, Oz les trois axes d'inertie du solide relatifs au point fixe O, et désignons par A, B, C les moments d'inertie correspondants, en supposant, par exemple, $(A > B > C)$. Soit enfin ON la ligne des nœuds, intersection du plan des xy mobile avec le plan des x_1y_1 fixe (*fig.* 2). Il est bien connu que les composantes p, q, r de la rotation instantanée suivant les axes mobiles peuvent s'exprimer en fonctions elliptiques du temps t. Il en résulte pour les angles d'Euler θ, ψ, φ, marqués sur la figure, et pour la valeur absolue G du moment cinétique, les formules suivantes que je me con-

tente de rappeler, renvoyant pour leur démonstration aux traités spéciaux (1).

Désignons par D et μ deux constantes arbitraires (dépendant des conditions initiales), et formons-en les combinaisons

(19)
$$\left\{\begin{aligned} k^2 &= \frac{(A-B)(D-C)}{(B-C)(A-D)},\\ n &= \mu\sqrt{\frac{D(A-D)(B-C)}{ABC}}; \end{aligned}\right.$$

enfin, t_0 désignant une troisième constante arbitraire (qui désigne l'époque où ψ s'annule), posons

$$\tau = n(t-t_0).$$

Alors nous aurons, pour déterminer les éléments du mouvement G, θ, φ, ψ, les formules

(20)
$$\left\{\begin{aligned} G &= D\mu,\\ \cos\theta &= \frac{Cr}{G} = \sqrt{\frac{C(A-D)}{D(A-C)}}\,\mathrm{dn}\,\tau,\\ \operatorname{tang}\varphi &= \frac{Ap}{Bq} = \sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}}\,\frac{\mathrm{cn}\,\tau}{\mathrm{sn}\,\tau},\\ \psi &= \lambda\tau + \frac{i}{2}\log\frac{H(ic+\tau)}{H(ic-\tau)}. \end{aligned}\right.$$

Dans ces formules, les fonctions elliptiques sn, cn, dn, ainsi que la fonction *thêta* H, ont pour module k^2 (que nous supposons moindre que 1); elles admettent toutes pour période réelle la quantité 4K définie (en fonction de k^2) par

(19 *bis*)
$$K = \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{(1-s^2)(1-k^2s^2)}}.$$

Les deux constantes (réelles) λ, c qui figurent dans la dernière formule (20) ne dépendent que de D (ou, si l'on aime mieux, de k), étant définies par les formules

(21)
$$\left\{\begin{aligned} \mathrm{sn}^2\, ic &= \frac{A(B-C)}{C(B-A)},\\ \lambda &= \frac{\mu D}{nC} - i\,\frac{\Theta'(ic)}{\Theta(ic)}. \end{aligned}\right.$$

(1) *Voir* P. Appell, *Traité de Mécanique rationnelle*, t. II (2e édition), p. 157 et suiv.; ou P. Appell et E. Lacour, *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et Applications*, p. 193-199.

Ainsi, les formules (20) nous fournissent les éléments G, θ, φ, ψ en fonction du temps t et des *trois* constantes arbitraires D, μ, t_0. Mais aux constantes D, μ nous aurons avantage à substituer explicitement les constantes k, n [qui n'en sont pas distinctes en vertu des formules (19)]. Les formules (20) prennent alors la forme équivalente

$$(20\ bis)\quad \begin{cases} G = \sqrt{\dfrac{ABC^2}{(A-C)(B-C)}}\, n \sqrt{1 - \dfrac{A(B-C)}{C(B-A)} k^2}, \\ \cos\theta = \dfrac{dn\tau}{\sqrt{1 - \dfrac{A(B-C)}{C(B-A)} k^2}}, \\ \operatorname{tang}\varphi = \sqrt{\dfrac{A(B-C)}{B(A-C)}}\, \dfrac{cn\tau}{sn\tau}, \\ \psi = \lambda\tau + \dfrac{i}{2} \log \dfrac{H(ic+\tau)}{H(ic-\tau)}, \end{cases}$$

et nous donnent, cette fois, G, θ, φ, ψ, en fonction du temps et des *trois* constantes arbitraires n, k, t_0 [la constante t_0 ne figure d'ailleurs que dans l'argument $\tau = n(t - t_0)$; quant à la constante k, elle figure d'abord explicitement, ensuite comme module des fonctions elliptiques, enfin par les lettres λ et c qui en dépendent par les formules (21)].

Sur les formules (20 *bis*) nous faisons les remarques suivantes :

1° G est constant;

2° $\cos\theta$ est une fonction périodique du temps ne s'annulant jamais : l'angle θ oscillera entre deux limites;

3° Les angles φ et ψ sont, *à des termes périodiques près*, fonctions linéaires du temps.

Ces formules (20 *bis*) donnent la solution générale du mouvement à la Poinsot, mais avec *trois* constantes arbitraires seulement : cela tient au choix particulier du trièdre de référence $Ox_1y_1z_1$. Comme l'orientation de ce trièdre dans l'espace dépend lui-même de trois arbitraires, nous voyons qu'en rapportant le mouvement à des axes quelconques, il dépendra de *six* constantes, comme il convient pour un système à trois degrés de liberté : c'est ce que nous reconnaîtrons un peu plus loin.

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ANDOYER (Henri). — Cours d'Astronomie. Première Partie : *Astronomie théorique*. Troisième édition entièrement refondue, un vol. in-8°, I-455 pages. Paris, J. Hermann, 1923.

Les lecteurs du *Bulletin des Sciences mathématiques* connaissent déjà le Cours d'Astronomie de M. Andoyer. La première Partie, l'Astronomie théorique, première édition, a été analysée, en 1907, par M. J. Tannery, la deuxième édition, en 1911, par M. J. Boccardi ; la première édition de l'Astronomie pratique, en 1909, par M. J. Boccardi également. Aujourd'hui, nous avons à présenter la troisième édition de l'Astronomie théorique publiée, comme les deux précédentes, par la maison J. Hermann, avec un soin particulièrement digne d'éloges en ces temps de crise du Livre.

Dans l'analyse de la seconde édition, M. J. Boccardi rappelait que Ch. Wolf avait pu écrire, en 1869 : « Nous ne possédons actuellement, en France, aucun Traité pratique intermédiaire entre la Mécanique céleste et les Cosmographies ou les Ouvrages élémentaires purement descriptifs. ... » Et alors, Ch. André et E. Lucas nous donnaient, avec l'édition française du Traité d'Astronomie sphérique de Brunnow, le premier Ouvrage répondant au vœu de Ch. Wolf. Depuis, la série s'est amplement enrichie avec le *Cours de Faye*, 1881-1883 ; les *Leçons d'Astronomie de L.-J. Gruey*, 1885 ; le *Cours d'Astronomie pratique de Caspari*, 1888-1889 ; l'*Astronomie et Géodésie*, de Ch. Wolf, 1891 ; le *Cours d'Astronomie* de M. B. Baillaud, 1893-1896, pour ne citer que les Ouvrages professionnels proprement dits, avant d'arriver à la première édition du Cours de M. Andoyer, en 1906. Tous ces Ouvrages font honneur à la Science française et aux astronomes éminents qui les ont composés. Dans chacun, suivant la tendance particulière de l'auteur, l'étudiant, ou le futur praticien, peut trouver un guide averti et assuré, car suivant l'expression de L.-J. Gruey, les matériaux d'un Cours astronomique « sont tombés

depuis longtemps dans le domaine public » et se prêtent ainsi, aisément, à une exposition classique. C'est donc par l'arrangement, la simplicité ou la visée d'un but spécial, que les Traités d'Astronomie peuvent acquérir les qualités qui justifient la faveur du lecteur. Cependant aucun des Ouvrages rappelés ci-dessus n'a eu les honneurs d'une réédition, tandis qu'aujourd'hui apparaît la troisième édition du Cours de 1906, déjà réédité en 1911. Il est naturel d'en rechercher les causes.

L'Astronomie est une science où toute la théorie doit être vérifiée par l'observation, où chaque formule doit aboutir à un nombre. On peut assurément, dans une première prise de contact avec cette science, se borner à la compréhension des phénomènes considérés en eux-mêmes et individuellement. Mais, lorsqu'on veut passer aux applications numériques, on sent bien vite la nécessité d'un enchaînement rigoureux dans l'exposé des formules et leur présentation pour la mise en nombre. Elles doivent suggérer d'elles-mêmes la maxime de Le Verrier : « Un calcul bien disposé est à moitié fait. »

D'autre part, la multiplicité des problèmes astronomiques est plus apparente que réelle, car tout se réduit, en somme, à l'explication des mouvements que nous percevons sur la sphère céleste, mouvements géocentriques, mouvements héliocentriques ayant des lois communes. De plus, nous ne possédons sur les caractéristiques de ces mouvements que des valeurs plus ou moins approchées et tous nos efforts se concentrent sur la recherche des termes correctifs à apporter aux valeurs initiales léguées par les premiers astronomes. Après l'analyse particulière des divers phénomènes, on est donc conduit naturellement à faire ressortir les liens d'une commune théorie d'où l'on extraira, suivant les besoins, les formules nécessaires, tandis que, pour les calculs, on mettra en évidence la parenté des méthodes d'approximations successives. Ces divers desiderata se réalisent avec la Trigonométrie sphérique, conséquence logique de la conception de la sphère céleste ; avec les développements en série, où peuvent varier les coefficients numériques et le nombre des termes à employer pour les calculs de plus en plus précis ; et enfin avec les multiples formules de changements de coordonnées imposés par les différentes origines des axes adoptés pour l'étude des mouvements : œil de l'observateur,

centre de la Terre, centre du Soleil, etc. Et c'est ainsi que le Livre premier, avec la Trigonométrie sphérique; quelques développements en série; coordonnées et problèmes relatifs aux coordonnées, contient, en fait, toutes les formules analytiques dont il sera fait usage dans l'étude particulière de l'ensemble des problèmes astronomiques que M. Andoyer présente dans l'ordre suivant : Livre II : La Terre; Coordonnées astronomiques; Temps; Mouvement diurne; Corrections aux observations par la réfraction; Parallaxe et Aberration.

La mobilité des plans de coordonnées, étudiée sous le nom de *Précession* et de *Nutation*, est l'objet principal du Livre III en même temps que le mouvement général des corps célestes. Des notions de Mécanique céleste définissent les mouvements autour du Soleil et permettent un exposé rigoureux de la Précession et Nutation. De là sont déduites les positions apparentes des astres; le Mouvement du Soleil; Temps; Mouvements géocentriques des Planètes; Mouvement de la Lune et des Satellites. La théorie générale des Éclipses, avec les cas particuliers d'Occultations d'étoiles par la Lune et les passages de Mercure et Vénus sur le Soleil, composent le Livre IV. Ici se termine le sommaire de la seconde édition; celle-ci comprend en outre deux Chapitres nouveaux : Détermination d'une orbite képlérienne par trois observations rapprochées et une Note sur le Calendrier.

En 1909, le Chapitre final de l'*Astronomie pratique* exposait la solution classique de Gauss, pour le calcul de l'orbite d'une petite planète ou comète. Aujourd'hui, M. Andoyer suit « la voie indiquée d'abord par Lagrange et qui se montre la plus simple en théorie comme en pratique ». Comme en 1909, l'exposé est théorique, sans mise en nombre ([1]).

La détermination des orbites a suscité de nombreux travaux; cependant les méthodes réellement utilisées sont peu nombreuses. Cela tient à ce que des formules élégantes ou ingénieuses ne conduisent pas toujours aux expressions numériques les plus simples. De M. Andoyer, calculateur aussi habile que profond analyste, on peut espérer une mise au point nouvelle des déterminations d'orbites devenant rapidement classiques.

([1]) On trouvera, au *Cours de Mécanique céleste* qui vient de paraître, d'autres méthodes avec applications numériques.

Le Chapitre sur le Calendrier explique le Comput ecclésiastique et fournit tous les renseignements qui ne se rencontraient plus dans les Traités d'Astronomie récents. C'est un très heureux retour aux traditions anciennes, où les grands astronomes vulgarisaient les règles du Calendrier.

Par la révision des Chapitres sur la Réfraction, sur la Précession et Nutation, sur la théorie des Éclipses et les Compléments sur les Orbites et le Calendrier, la troisième édition se distingue nettement de la seconde et elle justifiera l'accueil empressé que lui réservent élèves, professeurs et astronomes accoutumés à la concision et à la rigueur du style de l'auteur.

Les Ouvrages similaires anglais sont généralement accompagnés d'exercices proposés en fin de Chapitre. M. Andoyer ne l'a pas jugé à propos et on le comprend si l'on examine le soin avec lequel il illustre numériquement toutes ses formules d'une part et de l'autre, le souci qu'il apporte à envisager, au Livre premier, tous les cas susceptibles d'applications ultérieures et qu'il résout complètement. S'il y avait plus de cohésion entre l'enseignement des Mathématiques supérieures des Lycées et celui de l'Astronomie dans les Facultés, cet Ouvrage serait utilement mis à profit par les professeurs de Mathématiques spéciales pour des exercices théoriques et pratiques.

C'est la *Connaissance des Temps*, dont M. Andoyer assume la lourde charge de la rédaction, qui représente finalement le critérium de toutes les théories astronomiques. Les exemples numériques, dans le Chapitre de la Trigonométrie sphérique, où chaque problème traité est accompagné de formules de vérification, ont pour but d'initier le lecteur à la disposition des calculs et leur exécution précise. Ensuite les exemples se rapportent très fréquemment aux éléments mêmes de la *Connaissance des Temps :* Éclipse de Lune du 8 février 1925, Éclipse du Soleil du 24 janvier 1925, Occultations d'Aldébaran du 13 février 1924, Passage de Mercure du 7 mai 1924, etc.

Des théories nouvelles touchant l'Astronomie et des multiples projets de refonte du Calendrier, il n'est pas question. C'est bien conforme au caractère d'un astronome recherchant exclusivement la vérité dans une discipline très sévère et nous nous permettons de l'en féliciter.

Au moment où les travaux scientifiques des vastes laboratoires se heurtent si vivement aux obstacles de la vie chère, il est réconfortant de constater que les astronomes, épris de l'ordre mathématique, peuvent, à très peu de frais, avec M. Andoyer, aborder l'Astronomie théorique et pratique, les Calculs et arriver à la Mécanique céleste où la pensée française, de Laplace à Poincaré, fut si heureusement inspirée. Ce sera l'honneur de M. Andoyer de maintenir, à un instant critique, la tradition astronomique simplement avec le concours d'esprits généreux et bien doués.

AUGUSTE LEBEUF.

MÉLANGES.

SUR LES MODES DE CONTINUITÉ DE CERTAINES FONCTIONNELLES [1];

PAR M. GEORGES BOULIGAND.

1. Dans ses belles et récentes leçons d'Analyse fonctionnelle [2], M. Paul Lévy a signalé à l'attention des chercheurs les questions suivantes :

Si une fonctionnelle est définie dans un certain champ, en résulte-t-il qu'on ne puisse considérer pour elle d'autre continuité que celle qui correspond à ce champ? Soit, par exemple, une fonctionnelle U, définie pour toutes les fonctions ayant des dérivées finies jusqu'à l'ordre p, mais n'ayant aucun sens, si la dérivée d'ordre p n'existe pas ou devient infinie; peut-on affirmer :

(*a*) *Qu'elle n'est pas continue d'ordre* $p-1$?

(*b*) *Qu'il n'est pas possible qu'elle soit continue d'ordre* $p+1$, *sans l'être d'ordre* p?

Après avoir signalé qu'un tel résultat pourrait paraître vraisem-

[1] Cet article est le développement d'une Note aux *Comptes rendus* du 19 mars 1923.

[2] *Leçons d'Analyse fonctionnelle*, p. 18 et 19. Paris, Gauthier-Villars.

blable, le savant géomètre ajoute : « Il serait intéressant de le démontrer rigoureusement, ou bien de donner des exemples d'exception à cette règle. »

Je me propose de définir l'attitude qu'on peut adopter à ce sujet. J'examinerai d'abord la question (b) et je donnerai un exemple montrant qu'elle doit être résolue par la négative. En prenant la question (a) dans toute sa généralité, on reconnaît qu'il est également impossible de la résoudre par l'affirmative. Il en est ainsi tant qu'on ne précise pas, d'une manière suffisante, le sens de ces mots : *choisir une fonctionnelle* U. La part d'arbitraire, déjà grande, qui préside à la sélection d'une simple fonction $y(x)$ est notablement accrue dans les conditions actuelles. Il est donc nécessaire d'apporter à l'énoncé, mis à l'étude par M. Paul Lévy, certaines restrictions.

Ces restrictions ressortent clairement des exemples qui parviennent à mettre en défaut un énoncé répondant affirmativement à la question (a) : les exceptions qu'ils apportent à une règle, manifestement très générale, tirent leur origine d'un mode de définition, trop limitatif de la fonctionnelle qui leur donne naissance. Cela nous amènera à dégager la notion d'*extension* d'une fonctionnelle, donnée primitivement dans un champ restreint, tel que celui des fonctions à dérivées continues d'ordre p. Nous ne ferons d'ailleurs ici qu'effleurer cette notion, qui est l'une des plus importantes à la base du calcul fonctionnel, et à laquelle se rattachent, en particulier, les beaux travaux de MM. Lebesgue et Denjoy sur la généralisation de l'intégrale.

I.

SOLUTION NÉGATIVE DE LA QUESTION (b).

4. Pour résoudre la question (b) par la négative, il suffit de donner un exemple montrant qu'une fonctionnelle, définie dans le champ des fonctions à dérivées continues d'ordre p, peut être continue d'ordre $p+1$, sans l'être d'ordre p.

Prenons l'hypothèse la plus simple, celle de $p=0$, qui nous dispensera, au moment où nous définirons la fonctionnelle, de nous préoccuper de l'existence des dérivées. Choisissons une fonction $y(x)$, absolument quelconque, à cela près que nous la

supposons bien définie pour chaque valeur de x qui satisfait aux inégalités

$$0 \leq x \leq 1.$$

Prenons deux axes rectangulaires et appelons (C) l'ensemble des points représentatifs de la fonction $y(x)$. Inscrivons dans (C) une ligne polygonale, dont les sommets ont successivement pour abscisses les nombres de la suite croissante

$$0, \quad x_1, \quad x_2, \quad \ldots, \quad x_{n-1}, \quad 1.$$

Considérons l'ensemble dont chaque élément est la longueur d'une telle ligne polygonale, et soit L sa borne supérieure. C'est un nombre positif et même supérieur à l'unité, qui peut être, suivant les cas, fini ou infini. [Dans le premier cas, l'ensemble (C) est une courbe rectifiable, de longueur L.] Quoi qu'il en soit, la fonctionnelle

$$(1) \qquad U = \frac{1}{L}$$

a une valeur bien définie dans le champ de toutes les fonctions $y(x)$ précédemment décrites. Soit Γ ce champ.

5. Du champ Γ, extrayons le champ γ, constitué par les fonctions $y(x)$ qui sont douées d'une dérivée continue dans l'intervalle (0, 1). Nous établirons d'abord le résultat suivant :

Dans le champ γ, la fonctionnelle U précédente possède la continuité d'ordre un, mais non la continuité d'ordre zéro.

En effet, la courbe (C) est rectifiable à l'intérieur du champ γ. Soit (C_1) une autre courbe du même champ. Pour affirmer que sa longueur est infiniment voisine de celle de (C), il ne suffit pas d'exprimer que la différence

$$y_1(x) - y(x)$$

est infiniment petite, même uniformément, dans l'intervalle (0, 1). Il faut ajouter que la différence

$$y'_1(x) - y'(x)$$

est elle-même infiniment petite. Ce point est d'ailleurs classique. Le théorème est donc établi.

6. Toutefois, pour mettre en défaut l'énoncé mis en discussion par M. Paul Lévy, nous avons dû faire appel à une portion γ du champ Γ, qui, on doit le reconnaître, est extrêmement restreinte : dans l'ensemble des fonctions, mêmes continues, les fonctions à dérivée continue forment une classe exceptionnelle, bien qu'opportune, aux recherches courantes. Il est donc intéressant de savoir si la possibilité, reconnue précédemment, d'infirmer un énoncé, au premier abord si séduisant, n'est pas liée justement à ce choix particulier des fonctions $y(x)$.

Je dis qu'il en est bien ainsi. Supposons que dans le champ Γ, on choisisse une fonction $y(x)$ qui, pour simplifier, sera douée de continuité dans l'intervalle $0, 1$. Plaçons-nous dans le cas où $y(x)$ donne naissance à une ligne (C) non rectifiable. Pour une telle fonction $y(x)$, la fonctionnelle U possède la continuité d'ordre zéro. Pour donner à cet énoncé un sens précis, nous établirons qu'elle possède la continuité liée à un voisinage uniforme d'ordre zéro.

En effet, considérons un voisinage uniforme d'ordre zéro défini par le nombre ε. La fonction $y(x)$ étant donnée comme il vient d'être dit, considérons l'ensemble des points (x, Y) définis par les inégalités

$$0 \leq x \leq 1,$$
$$y(x) - \varepsilon \leq Y \leq y(x) + \varepsilon.$$

Il constitue un domaine à l'intérieur duquel on peut concevoir une infinité de courbes, dont l'une correspond à une fonction $Y(x)$ vérifiant les inégalités précédentes. Désignons par λ_ε la borne inférieure de l'ensemble des longueurs (susceptibles d'être infinies) de ces courbes. En vertu des hypothèses faites sur $y(x)$, il faut montrer que λ_ε croît indéfiniment lorsque ε tend vers zéro.

Or le concept de *semi-continuité*, imaginé par M. Baire, et appliqué systématiquement au calcul des variations par M. Léonida Tonelli, nous fournit l'instrument essentiel de cette démonstration.

Imaginons un arc rectifiable, de l'intervalle $(0, 1)$, correspondant à une fonction $f(x)$. Considérons une courbe, provenant d'une fonction $\varphi(x)$, astreinte aux seules conditions

$$f(x) - \varepsilon < \varphi(x) < f(x) + \varepsilon.$$

La semi-continuité de la longueur d'arc, à l'ordre zéro, consiste

en ce fait que *si l'arc provenant de $\varphi(x)$ a une longueur moindre que l'arc provenant de $f(x)$*, la différence de ces deux longueurs peut être limitée supérieurement par le nombre ε. On exprime ce fait en disant que l'arc est une fonctionnelle semi-continue, inférieurement.

Cela posé, reprenons la fonction $y(x)$ soumise aux hypothèses précédentes. Le nombre L correspondant est infini. Donc étant donné un nombre positif arbitraire A, on peut inscrire dans la ligne (C) provenant de $y(x)$ une ligne polygonale dont la longueur surpasse A. En vertu de la semi-continuité inférieure, on peut faire correspondre à tout nombre positif η un autre nombre positif ε, tel que la différence entre la longueur de la *ligne polygonale* (toujours susceptible d'être ramenée à l'intérieur de la bande utile) et la limite inférieure λ_ε soit plus petite que η. Et alors le théorème est démontré.

Si donc nous avons pu mettre en défaut l'énoncé douteux (b), cela tient bien au choix de fonctions $y(x)$ très particulières, en dépit de la priorité qu'elles acquièrent dans les questions usuelles (¹).

II.

IMPOSSIBILITÉ D'APPLIQUER L'ÉNONCÉ (a) A CERTAINES FONCTIONNELLES ARBITRAIREMENT CONSTRUITES.

7. Considérons la fonctionnelle, définie par la formule

$$U = \int_0^1 x y' dx, \tag{2}$$

en faisant la convention suivante :

La formule (2) *possède le monopole exclusif de définir* U.

(¹) En théorie des fonctions, on pourrait citer un énoncé analogue, vrai en général, mais mis en défaut par une classe exceptionnelle de nombres (qui sont, cependant, les plus courants) :

Soit x une variable comprise entre 0 et 1. Représentons-la par son développement décimal

$$x = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots,$$

où les a_n sont les chiffres successifs. Considérons une fonction de cette variable dont le développement décimal puisse se déduire simplement de celui de x : par exemple, en partageant ce dernier en tranches de deux chiffres à partir de la virgule et permutant les deux chiffres de chaque tranche. La fonction y ainsi obtenue est continue, sauf pour les nombres à développement décimal limité.

Cette manière d'opérer peut sembler arbitraire, et même factice. Mais du moins est-elle logiquement admissible.

Cela posé, l'égalité (2) est évidemment applicable dans le champ restreint des fonctions $y(x)$ possédant une dérivée continue dans tout l'intervalle (0, 1). Nous disons ici *champ restreint*, parce que nous nous contentons de nous placer dans des conditions suffisantes pour que la formule (2) confère un sens à U. Or, dans ce champ restreint, une intégration par parties permet de transformer U et de l'écrire

$$(3) \qquad U = y(1) - \int_0^1 y\, dx;$$

on ramène ainsi U à l'aire algébrique

$$\int_0^1 y\, dx,$$

délimitée par la courbe (C) et les droites

$$x = 0, \qquad x = 1, \qquad y = 0.$$

Dans ce champ, U *possède donc la continuité d'ordre zéro*.

D'ailleurs, en conférant à la seule formule (2) le privilège de définir U, doit-on s'abstenir d'attribuer à U un sens, dès que la fonction $y(x)$ cesse d'avoir une dérivée pour tous les points d'un intervalle intérieur au segment (0, 1). A plus forte raison, n'a-t-on plus le droit d'intégrer par parties.

Plus généralement, considérons les fonctionnelles définies, pour chaque valeur positive de l'entier k, par la formule

$$(4) \qquad U_k = \int_0^1 x^k y^{(k)}\, dx,$$

en convenant encore d'attribuer à ce mode de définition *un pouvoir exclusif*, et en désignant par $y^{(k)}$ la dérivée d'ordre k de la fonction $y(x)$. La fonctionnelle n'a aucun sens, quand cette dérivée manque dans la totalité d'un intervalle intérieur au segment (0, 1). Elle admet cependant, dans un champ restreint, la continuité d'ordre zéro, comme on le verrait en intégrant par parties k fois de suite.

8. Toutefois les exemples précédents, construits spécialement pour mettre en défaut l'énoncé (a), portent en eux-mêmes un caractère artificiel. En effet, pour établir par exemple que la fonctionnelle U, définie par l'équation (2), possède, au moins dans un certain champ, la continuité d'ordre zéro, nous recourons à une formule auxiliaire (3), et nous n'acceptons cette dernière qu'à une condition : c'est que la fonction y remplisse les conditions requises pour qu'une intégration par parties permette de tirer (3) de (2). Dans les autres cas, nous refusons, car tel est notre bon plaisir, le secours de la formule (3).

A notre hypothèse factice du n° 7, il sera donc naturel, dans de nombreuses questions, d'en substituer une bien différente, celle qui consiste à dire : *la formule* (3) *englobe la formule* (2) [ou tout au moins il en sera bien ainsi si l'on prend l'intégrale figurant dans (2) au sens de M. Lebesgue, et si l'on se place dans le champ des fonctions à variation bornée par un certain nombre A, pour l'intervalle (0,1)] Donc, pour *définir la fonctionnelle utilisons de préférence la formule* (3).

Or, en adoptant ce nouveau point de vue, nous rendons à l'énoncé (a) son exactitude, puisque d'une part la fonctionnelle définie par (3) existe dans le champ des fonctions continues de l'intervalle (0,1) (et même dans d'autres plus étendus), et que dans ce champ elle admet la continuité d'ordre zéro,

Nous venons d'accomplir ici, dans la définition de U, une transformation analogue à celle que ne manque d'effectuer quiconque remarque le fait suivant : la série

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots,$$

qui converge dans l'intervalle $(-1, +1)$, coïncide dans cet intervalle avec $\frac{1}{1-x}\cdot$ Cette expression étant plus générale, on la substitue à la série. Somme toute, nous avons effectué aussi une sorte de *prolongement* de notre fonctionnelle.

Toutefois, on pourrait dire qu'il subsiste encore, dans la question, une part d'arbitraire. On pourrait convenir d'adopter, dans les formules (2) et (3), des intégrales au sens de Riemann. Dans ce cas le domaine d'existence de la fonctionnelle (2) ne serait pas tout entier intérieur à celui de la fonctionnelle (3). Des recherches

de M. Lebesgue, et d'exemples antérieurs donnés par Riemann lui-même, résulte en effet la possibilité du fait suivant : la dérivée de xy (utilisée actuellement) n'est pas intégrable au sens de Riemann.

Mais justement, il faut reconnaître qu'en adoptant l'intégrale de Riemann, on fait encore une restriction extrêmement factice. C'est précisément pour pouvoir envisager dans tous les cas le problème de l'intégration comme le problème inverse de la dérivation que MM. Lebesgue, puis Denjoy, ont construit des intégrales généralisées. Les premiers, ils se sont donc préoccupés de *prolonger une fonctionnelle*. En nous plaçant dans les conditions qui ont été indiquées par ces deux géomètres, nous pourrons regarder la formule (3) comme la véritable source de la fonctionnelle U. Moyennant quoi, cette fonctionnelle sera définie dans le champ des fonctions y, *intégrables dans l'acception la plus large*, et en même temps, elle admettra la continuité liée au voisinage en moyenne d'ordre zéro. L'énoncé de M. Paul Lévy sera donc alors pleinement valable.

III.

CONDITIONS SUFFISANTES POUR PERMETTRE DE RÉHABILITER L'ÉNONCÉ (a).

9. Les observations qui précèdent nous suggèrent immédiatement le problème suivant :

Supposons qu'on sache définir une fonctionnelle U *dans un champ restreint, tel que celui des fonctions de l'intervalle* (0,1) *qui possèdent une dérivée continue en tout point de cet intervalle. Supposons en outre qu'on ait reconnu que la fonctionnelle* U *possède, dans ce champ, la continuité d'ordre zéro. N'est-il pas possible d'étendre cette fonctionnelle* U *à une classe plus générale de fonctions* $y(x)$?

Avant d'entamer toute discussion, remarquons l'analogie qui existe entre ce problème et celui qu'on rencontre en analyse ordinaire, lorsqu'on suppose qu'une fonction $f(x, y)$ a été définie dans le champ des nombres rationnels, qu'elle possède dans ce champ la continuité, et, par suite, *l'uniforme continuité*, et lorsqu'on demande d'étendre cette fonction à l'ensemble des

valeurs réelles de x, y en y sauvegardant sa continuité. Dans ses leçons sur les théories générales de l'Analyse, M. René Baire a systématiquement adopté ce point de vue, pour généraliser au champ de tous les nombres réels les opérations de l'arithmétique et la définition de la fonction exponentielle. Nous ne ferons ici que transposer à la question actuelle l'exposé donné par ce savant.

10. Toutefois, auparavant, nous modifierons un peu l'énoncé de la question proposée : faisant appel au théorème de Weierstrass, suivant lequel *toute fonction continue peut être définie comme la limite, uniformément atteinte, d'une suite de polynomes*, nous supposerons tout simplement ceci :

La fonctionnelle U a été définie dans le champ de tous les polynomes possibles. Sachant qu'elle admet, pour chaque polynome, la continuité d'ordre zéro, à quel champ fonctionnel est-il possible de l'étendre?

Nous raréfions ainsi l'ensemble dans lequel U a été primitivement définie, et cela en profitant du théorème de Weierstrass. Théoriquement la question est ainsi posée d'une manière plus simple [1] : elle appelle même des généralisations intéressantes. En outre, au point de vue pratique, il est parfaitement concevable qu'une fonctionnelle soit donnée *a priori* pour les polynomes, et uniquement pour ces fonctions.

11. Pour généraliser le raisonnement de M. Baire, nous aurons à faire appel, dans l'ordre d'idées présent, à la notion de *continuité uniforme*. Dans l'Ouvrage déjà cité, M. Paul Lévy attire l'attention du lecteur sur le point suivant : c'est la différence que présentent, relativement à cette notion, l'Analyse ordinaire et l'Analyse fonctionnelle. Dans la première, tout ensemble comprenant, dans un espace à un nombre fini de dimensions, une infinité de points, admet au moins un point limite à distance finie ou à l'infini (en adoptant le point de vue projectif). Dans la seconde, ce

[1] Cela dispense en particulier d'avoir à formuler des hypothèses concernant la dérivabilité, jusqu'à un ordre plus ou moins élevé des fonctions du champ restreint où U est initialement définie et possède, par hypothèse, la continuité d'ordre zéro.

résultat n'est pas généralisable à cause de l'existence de fonctions non également continues, lorsqu'on en considère une infinité.

Il s'ensuit qu'il existe des fonctionnelles continues (d'ordre zéro par exemple), mais non uniformément continues. Étant donnée l'importance du rôle joué dans le raisonnement qui va suivre par la continuité uniforme, il est intéressant de donner un exemple explicite d'une fonctionnelle de ce genre.

12. Désignons par $y(x)$ une fonction continue dans l'intervalle o, 1. Cette fonction admet une intégrale au sens de Riemann

$$\int_0^1 y\,dx,$$

qui nous fournit immédiatement un exemple de fonctionnelle uniformément continue, pour un voisinage uniforme d'ordre zéro : autrement dit, le module de continuité α de cette fonctionnelle pour un nombre positif arbitraire ε n'est pas influencé par le plus ou moins grand nombre des sinuosités que peut présenter dans l'intervalle (o, 1) la courbe (C) de $y(x)$ Il est clair que si l'on augmente indéfiniment le nombre des sinuosités qui correspondent à une oscillation au moins égale à un nombre a assigné d'avance, on forme un ensemble de fonctions $y(x)$ non également continues, et cependant une intégrale de la forme précédente aura des lois de continuité indifférentes à de telles circonstances.

Pour former des exemples de fonctionnelles, non uniformément continues, il nous faut d'abord apprendre à définir une expression, dépendant continûment et à l'ordre zéro de $y(x)$ et croissant indéfiniment quand on fait croître sans limite le nombre des oscillations surpassant un nombre assigné d'avance.

Pour réaliser ces conditions, on peut recourir évidemment à la construction suivante. Considérons une longueur l arbitraire, mais fixe, par exemple $l = 0,1$. Inscrivons dans la ligne (C) une ligne polygonale, dont le premier sommet aura pour abscisse o, les abscisses suivantes allant en croissant : nous supposerons que, cette croissance étant la moins rapide possible, tous les côtés de cette ligne soient égaux à l, à l'exception du dernier, qui se terminera au point d'abscisse $+1$, et qui sera, en général, moindre que l.

Nous désignerons par $\mathfrak{L}$ la longueur de cette ligne polygonale. A deux fonctions y et y_1 possédant un voisinage uniforme d'ordre zéro, correspondront des valeurs $\mathfrak{L}$ et $\mathfrak{L}_1$ qui seront aussi infiniment voisines. La fonctionnelle $\mathfrak{L}$ nous sera précieuse, parce que *propre à déceler l'inégale continuité d'un ensemble de fonctions. Soit un ensemble de fonctions non également continues :* pour cet ensemble, *l'ensemble correspondant des valeurs de $\mathfrak{L}$ ne sera pas borné.*

Cela posé, envisageons la quantité

$$(5) \qquad U = \sin\left[\mathfrak{L} . \int_0^1 y\,dx\right].$$

C'est une fonctionnelle continue pour le voisinage uniforme d'ordre zéro. Cependant, elle n'est pas également continue, car si nous donnons seulement le maximum de la différence de deux fonctions de l'intervalle (0, 1) (prise en valeur absolue), nous n'en tirerons aucune indication sur l'ordre de grandeur de $\mathfrak{L}$, qui pourra dépasser toute quantité donnée. Dans ces conditions, la continuité uniforme est manifestement impossible.

13. Avant d'aller plus loin, présentous encore une autre remarque simple, qui nous sera utile pour la suite. A *chaque fonction $y(x)$* de l'intervalle (0, 1) correspond, lorsque l est donné, une valeur $\mathfrak{L}$ bien déterminée. Cette fonctionnelle (dont la continuité est liée au voisinage uniforme d'ordre zéro) dépend du paramètre l, et, à ce titre, nous pouvons la représenter par $\mathfrak{L}_l$.

Cela posé, considérons une fonction continue quelconque $y(x)$, et prenons un nombre positif ε, arbitrairement petit. Considérons les fonctions continues $Y(x)$, qui, dans l'intervalle (0, 1), satisfont aux inégalités suivantes

$$y(x) - \varepsilon \leq Y(x) \leq y(x) + \varepsilon.$$

Effectuons pour la ligne, qui correspond à chaque fonction $Y(x)$, la construction du numéro précédent en prenant précisément

$$l = \varepsilon.$$

Considérons, dans ces conditions, l'ensemble des valeurs de $\mathfrak{L}_\varepsilon$: il est bien clair que, si petit soit ε, cet ensemble ne sera jamais

borné dans le champ des fonctions $Y(x)$ précédentes. C'est justement cette circonstance qui va nous obliger à faire appel à la continuité uniforme pour résoudre le problème proposé.

14. Faisons alors les hypothèses suivantes :

1° *La fonctionnelle* U *est d'ores et déjà définie dans le champ des polynomes ;*

2° *Dans ce champ, elle possède la continuité uniforme liée au voisinage uniforme d'ordre zéro.*

Dans ces conditions, nous allons démontrer qu'*on peut étendre la fonctionnelle* U *au champ de toutes les fonctions continues*, de manière qu'elle possède dans la totalité d'une portion bornée de ce champ *la continuité uniforme d'ordre zéro liée au voisinage uniforme d'ordre zéro.*

Pour démontrer ce théorème, indiquons d'abord comment la fonctionnelle U sera définie pour une fonction continue $y(x)$ absolument quelconque. Comme il a été dit, on peut considérer cette fonction $y(x)$ comme la limite, atteinte uniformément, d'une suite de polynomes $P_n(x)$: à tout nombre positif α, on pourra donc faire correspondre un entier q tel que l'inégalité

$$(6) \qquad n > q$$

entraîne, dans tout l'intervalle utile, l'inégalité

$$|y(x) - P_n(x)| < \frac{\alpha}{2}.$$

Si n et n' sont deux entiers quelconques surpassant q, nous aurons donc

$$(7) \qquad |P_{n'}(x) - P_n(x)| < \alpha.$$

Or dire que la fonctionnelle U est uniformément continue dans le champ des polynomes, c'est dire qu'à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre positif α, tel que l'inégalité

$$(8) \qquad |Q(x) - P(x)| < \alpha$$

entraîne

$$(9) \qquad \left| U\left[Q(x)\right]_0^1 - U\left[P(x)\right]_0^1 \right| < \varepsilon,$$

quels que soient les polynomes P et Q, sous la seule réserve qu'ils vérifient l'inégalité (7). Si nous assujettissons à cette inégalité les polynomes P_n et P'_n de la suite considérée, les valeurs correspondantes de U satisferont à l'inégalité (8).

En définitive, nous pouvons, à tout nombre positif ε, faire correspondre un entier q tel que les inégalités

$$n > q, \qquad n' > q$$

entraînent

$$\left| U\left\{[P_n(x)]_0^1\right\} - U\left\{[P_{n'}(x)]_0^1\right\}\right| < \varepsilon.$$

Or d'après le théorème de Cauchy, cela revient à affirmer que si n croît indéfiniment,

$$U\left\{[P_n(x)]\right\}$$

tend vers une valeur limite bien déterminée

$$U\left\{[y(x)]_0^1\right\}.$$

En outre, cette limite n'est pas modifiée quand on remplace la suite des polynomes $P_n(x)$ par une autre suite de polynomes $Q_n(x)$, convergeant d'une manière uniforme vers la même fonction $y(x)$. En effet, à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre positif α tel que si P_n et Q_n vérifient l'inégalité (8), cela entraîne pour ces polynomes l'inégalité (9). Or, en vertu des hypothèses, on est toujours sûr de déterminer un entier q tel que α étant fixé (d'après ε), l'inégalité $n > q$ entraîne l'inégalité (8) pour P_n et Q_n.

Nous devons donc considérer notre extension comme réalisée, et cela d'une manière univoque. Je dis que la fonctionnelle U ainsi construite est continue pour toute fonction continue $y(x)$, sa continuité dépendant du voisinage uniforme d'ordre zéro.

En effet, soit Y une fonction du même champ que y. Il faut montrer qu'à tout nombre positif ε, on peut faire correspondre un nombre positif α, tel que l'inégalité

(10) $$|Y(x) - y(x)| < \alpha$$

entraîne, indépendamment du choix de la fonction $y(x)$, cette inégalité

(11) $$|U_Y - U_y| < \varepsilon,$$

où les notations abrégées U_y, U_Y remplacent $U|[y(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$ et $U|[Y(\overset{1}{\underset{0}{x}})]|$. Regardons pour cela les fonctions y et Y comme les limites, uniformément atteintes, de deux suites de polynomes

$$p_1(x),\quad p_2(x),\quad \ldots,\quad p_n(x),\quad \ldots,$$
$$P_1(x),\quad P_2(x),\quad \ldots,\quad P_n(x),\quad \ldots.$$

Nous avons évidemment

(12) $$|U_Y - U_y| \leqq |U_Y - U_{P_n}| + |U_y - U_{p_n}| < |U_{P_n} - U_{p_n}|.$$

Le nombre ε étant donné, on peut lui faire correspondre un nombre β tel que les inégalités

(13) $$|Y - P_n| < \beta, \qquad |y - p_n| < \beta$$

entraînent simultanément les inégalités

(14) $$|U_Y - U_{P_n}| < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad |U_y - U_{p_n}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Nous avons alors, en vertu des inégalités (13),

(15) $$|Y - y| > |P_n - y_n| - 2\beta.$$

D'ailleurs β n'est pas limité inférieurement, et cela va nous permettre, dans un instant, de l'amoindrir en vue de l'obtention du résultat final. Des trois termes du second membre de (12), les deux premiers ont été rendus moindres que $\frac{\varepsilon}{3}$: remarquons maintenant que, du fait de l'uniforme continuité de U dans le champ des polynomes, on peut faire correspondre à ε un nombre γ tel que l'inégalité

(16) $$|P_n - p_n| < \gamma$$

entraîne

(17) $$|U_{P_n} - U_{p_n}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

En résumé, l'inégalité (11) sera bien satisfaite pourvu qu'on impose à $|Y - y|$ la borne

$$\alpha = \gamma - 2\beta,$$

ce qui est licite, puisque β n'est pas limité inférieurement. Le théorème est donc ainsi établi.

15. Le théorème précédent se rapporte au cas où l'on prendrait, suivant les notations de M. Paul Lévy (*voir* n° 1),

$$p = 0.$$

Plus généralement, on peut établir le théorème suivant :

Soit U *une fonctionnelle des fonctions* $y(x)$ *de l'intervalle* $(0, 1)$ *définie dans le champ des polynomes, continue dans ce champ pour le voisinage uniforme d'ordre p. Cette continuité étant elle-même supposée uniforme, la fonctionnelle* U *peut être définie pour toute fonction, douée dans l'intervalle* $(0, 1)$ *d'une dérivée continue d'ordre p; et dans ce champ plus général, subsiste la continuité uniforme de* U *liée à un voisinage uniforme d'ordre p.*

Un raisonnement nouveau n'est pas indispensable pour établir cette proposition. Nous supposons que la continuité de y et de ses p premières dérivées a lieu aussi aux limites de l'intervalle : dès lors, $y(x)$ est déterminé par la donnée de

$$y^{p}(x)$$

et de

$$y^{(p-1)}(0), \ldots, y'(0), y(0).$$

On peut donc considérer U comme une fonctionnelle de $y^{(p)}(x)$, dépendant paramétriquement des p variables $y^{(p-1)}(0), \ldots, y'(0), y(0)$. Cette nouvelle fonctionnelle est elle-même définie dans le champ des polynomes, où elle admet la continuité d'ordre zéro par rapport à la fonction primordiale $y^{(p)}(x)$, et la continuité ordinaire par rapport aux p paramètres. Le résultat ci-dessus est ainsi rattaché à celui du numéro précédent.

Moyennant les précautions indiquées, on peut donc répondre à l'énoncé (a) d'une manière affirmative.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE PESANT FIXÉ PAR UN POINT VOISIN DE SON CENTRE DE GRAVITÉ ;

Par M. H. VERGNE

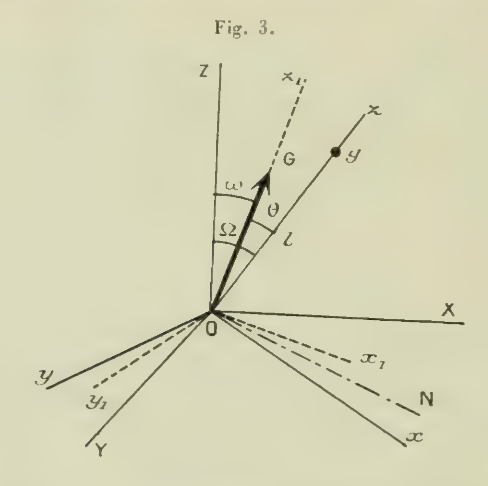
(*suite*).

---

11. *Éléments canoniques.* — Pour appliquer commodément les formules des perturbations (14 *bis*), lorsque nous passerons du mouvement à la Poinsot non troublé au mouvement troublé, nous commencerons par définir la position et les vitesses du solide, autour de son point fixe O, par un système de *variables canoniques*. Nous définirons ce système de la façon suivante [1] :

Prenons (*fig.* 3) pour axes de référence fixes trois axes rectangulaires quelconques OX, OY, OZ passant par le point fixe O, et soient toujours Ox, Oy, Oz les trois axes d'inertie du solide en ce point.

Fig. 3.



Considérons les *six* quantités suivantes :

---

(1) C'est le système de variables canoniques employé par H. Poincaré dans son *Cours de Mécanique céleste* de la Sorbonne en 1909-1910.

G, moment cinétique pris en grandeur (longueur OG);
Φ, projection du moment cinétique OG sur l'axe des z mobile;
Γ, projection du moment cinétique OG sur l'axe des Z fixe;
χ, angle des plans GOZ et GOz;
φ, angle des plans NOz et xOz;
γ, angle des plans GOZ et XOZ.

Ces six quantités, qui définissent complètement l'orientation et les vitesses du solide mobile [1], constituent, on le sait, un système de variables canoniques [2]. Or ces six variables sont intimement liées à celles qui figurent aux premiers membres des formules (20 *bis*) : on passe, en quelque sorte, des unes aux autres, en

---

[1] Les angles ω et θ sont, en effet, déterminés, puisque

$$\cos\omega = \frac{\Gamma}{G}, \qquad \cos\theta = \frac{\Phi}{G};$$

or il est évident que les cinq angles ω, θ, χ, φ, γ déterminent complètement l'orientation du trièdre $Oxyz$. Quant à la rotation instantanée (p, q, r), elle est aussi déterminée, puisque le vecteur OG a pour projection sur les axes mobiles Ap, Bq, Cr.

[2] On peut le voir ainsi : donnons à ces six quantités des accroissements

$$\delta G, \delta\Phi, \delta\Gamma, \delta\chi, \delta\varphi, \delta\gamma,$$

cela constitue une modification virtuelle de la position et des vitesses du système.

Dans cette modification virtuelle, le *travail des quantités de mouvement* a pour valeur

$$G\,\delta\chi + \Phi\,\delta\varphi + \Gamma\,\delta\gamma,$$

car les angles ω et θ ont bien varié de $\delta\omega$ et $\delta\theta$ dans cette modification virtuelle, mais ces variations $\delta\omega$ et $\delta\theta$ n'amènent aucun travail des quantités de mouvement.

Or lorsque, suivant la méthode classique de Poisson-Hamilton, on adopte pour variables des coordonnées curvilignes q_i et les quantités $p_i = \frac{\partial T}{\partial q'_i}$ correspondantes, les quantités q_i, p_i forment, on le sait, un système canonique. Dans une modification virtuelle quelconque δq_i, δp_i, de la position et des vitesses du système, l'expression différentielle $\sum p_i \delta q_i$ représente, elle aussi, le *travail des quantités de mouvement*.

L'expression

$$G\,\delta\chi + \Phi\,\delta\varphi + \Gamma\,\delta\gamma - \sum p_i\,\delta q_i = 0$$

est donc une différentielle exacte, et cela prouve que les variables $G, \Phi, \Gamma, \chi, \varphi, \gamma$ constituent, comme les variables p_i, q_i de Poisson-Hamilton, un système canonique.

donnant au trièdre $Ox_1y_1z_1$ de la figure 1 une orientation arbitraire. On voit ainsi, qu'en désignant par Γ_0, χ_0, γ_0 trois nouvelles constantes arbitraires, on peut écrire

$$\begin{aligned}
G &= G,\\
\Phi &= G\cos\theta,\\
\Gamma &= \Gamma_0,\\
\chi &= \chi_0 + \psi,\\
\varphi &= \varphi,\\
\gamma &= \gamma_0.
\end{aligned}$$

Par suite, utilisant les formules (20 *bis*), nous aurons, pour le mouvement à la Poinsot le plus général, les six éléments canoniques G, Φ, Γ, χ, φ, γ, exprimés cette fois en fonction du temps et de *six* constantes arbitraires n, k, t_0, Γ_0, χ_0, γ_0 sous la forme

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned}
G &= \sqrt{\frac{ABC^2}{(A-C)(B-C)}}\, n\sqrt{1-\frac{A(B-C)}{C(B-A)}k^2},\\
\Phi &= \sqrt{\frac{ABC^2}{(A-C)(B-C)}}\, n\,\mathrm{dn}\,\tau,\\
\Gamma &= \Gamma_0,\\
\chi &= \chi_0 + \lambda\tau + \frac{i}{2}\,\mathrm{Log}\,\frac{H(ic+\tau)}{H(ic-\tau)},\\
\varphi &= \mathrm{arc\,tang}\sqrt{\frac{A(B-C)}{B(A-C)}}\,\frac{\mathrm{cn}\,\tau}{\mathrm{sn}\,\tau},\\
\gamma &= \gamma_0.
\end{aligned}\right.$$

Telles sont les formules qui vont jouer le rôle des formules (12) de la théorie générale (n° **4**). Les grandes lettres G, Φ, Γ vont jouer le rôle des y, les petites lettres χ, φ, γ, le rôle des x.

Sur ces formules faisons les remarques suivantes :

1° La constante Γ_0 n'intéresse que la variable Γ; la constante γ_0, que la variable γ; la constante χ_0, que la variable χ;

2° La constante t_0 ne figure que dans l'argument $\tau = n(t-t_0)$, et l'on a

$$\frac{\partial}{\partial t_0} = -n\frac{\partial}{\partial\tau},$$

il en résulte que (au facteur constant $-n$ près) toutes les dérivées

partielles $\frac{\partial}{\partial t_0}$ pourront, dans les calculs, être remplacées par des dérivées partielles $\frac{\partial}{\partial \tau}$;

3° La constante n figure, d'abord explicitement dans G et Φ, ensuite implicitement dans l'argument τ : une dérivée partielle par rapport à n doit donc s'écrire

$$\frac{\partial}{\partial n} + (t - t_0)\frac{\partial}{\partial \tau};$$

4° La constante k figure, d'abord explicitement dans G, ensuite comme module des fonctions sn, cn, dn, H, enfin par les lettres λ et c, qui en dépendent par les formules (21).

Enfin observons que :

G	ne dépend que de	n, k;
Φ	»	n, k; τ;
Γ	»	Γ_0;
χ	»	χ_0, k, τ;
φ	»	k, τ;
γ	»	γ_0.

Ces diverses remarques permettront de simplifier notablement les jacobiens que nous aurons à utiliser dans l'emploi des formules (14 *bis*).

12. *Fonction perturbatrice f et fonction résolvante σ.* — Maintenant que nous possédons, par les formules (22), la solution générale du mouvement à la Poinsot, qui est notre mouvement non troublé, nous allons étudier les perturbations de ce mouvement sous l'action d'une fonction perturbatrice f. Dans le problème que nous avons en vue, le corps est *pesant*, et son centre de gravité est *voisin* du point fixe O. Prenons, pour commencer, le cas où ce centre de gravité g est situé sur l'axe d'inertie Oz, à une distance du point fixe $Og = l$. Alors, la fonction perturbatrice (potentiel de pesanteur) est, en appelant P le poids du solide, et supposant l'axe OZ vertical,

$$Pl\cos\Omega.$$

Nous désignerons par ε la quantité (par hypothèse très petite) Pl,

et nous écrirons, d'après une formule bien connue de trigonométrie sphérique,

$$\cos\Omega = \cos\omega\cos\theta - \sin\omega\sin\theta\cos\chi$$
$$= \frac{\Gamma}{G}\frac{\Phi}{G} - \sqrt{1-\frac{\Gamma^2}{G^2}}\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{G^2}}\cos\chi.$$

Il vient donc pour la fonction perturbatrice

$$\varepsilon f = \varepsilon\left(\frac{\Gamma_0}{G^2}\Phi - \sqrt{1-\frac{\Gamma_0^2}{G^2}}\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{G^2}}\cos\chi\right),$$

formule où il n'y a plus qu'à remplacer G, Φ, χ par leurs valeurs (22), pour avoir f exprimé en fonction de τ (c'est-à-dire du temps), et des six constantes arbitraires d'intégration.

Pour avoir la fonction résolvante σ, nous n'avons plus qu'à effectuer la quadrature

$$(23)\qquad \sigma = \int_{t_0}^{t} f\,dt = \frac{1}{n}\int_0^{\tau} f\,d\tau$$
$$= \frac{1}{n}\left(\frac{\Gamma_0}{G^2}\int\Phi\,d\tau - \sqrt{1-\frac{\Gamma_0^2}{G^2}}\int\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{G^2}}\cos\chi\,d\tau\right).$$

Lorsqu'on aura remplacé G, Φ, χ par leurs valeurs (22), σ se trouvera exprimé en fonction du temps et des constantes arbitraires : cette formule (23) jouera le rôle de la formule (13) de la théorie générale.

Observons dès maintenant que cette fonction σ est essentiellement périodique par rapport à τ, *à part un seul terme séculaire* provenant de ce que Φ n'a pas une valeur moyenne nulle : on a, en effet,

$$\frac{1}{n}\int\Phi\,d\tau = \sqrt{\frac{ABC^2}{(A-C)(B-C)}}\int \mathrm{dn}\,\tau\,d\tau$$
$$= \sqrt{\frac{ABC^2}{(A-C)(B-C)}}\,\frac{\pi}{2K}\tau + \text{termes périodiques},$$

car la valeur moyenne de $\mathrm{dn}\,\tau$ est $\frac{\pi}{2K}$, en désignant toujours par

2K la période réelle de la fonction dn, reliée au module k^2 par la formule (19 *bis*) [1].

On peut donc écrire finalement

$$(23\ bis)\quad \sigma = \frac{\Gamma_0}{G}\,\frac{\pi}{2K\sqrt{1-\dfrac{A(B-C)}{C(B-A)}k^2}}(t-t_0) + \text{termes périodiques.}$$

13. *Perturbations des éléments* G, Γ, γ. — Revenons aux formules (22). D'après la remarque déjà faite que les constantes χ_0, Γ_0, γ_0 ne figurent respectivement que dans χ, Γ, γ, nous sommes dans le cas d'application des formules simplifiées (14 *ter*) du n° 7. Nous avons donc immédiatement, et d'une manière complètement explicite, les perturbations des éléments G, γ, Γ (respectivement conjugués de χ, Γ, γ) :

$$\delta G = -\varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial\chi_0},\qquad \delta\gamma = \varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial\Gamma_0},\qquad \delta\Gamma = -\varepsilon\frac{\partial\sigma}{\partial\gamma_0}.$$

Remplaçant σ par sa valeur complète (23), ces formules s'écrivent

$$\delta G = \frac{\varepsilon}{n}\sqrt{1-\frac{\Gamma_0^2}{G^2}}\int\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{G^2}}\sin\chi\,d\tau,$$

$$\delta\gamma = \frac{\varepsilon}{nG^2}\int\Phi\,d\tau + \frac{\varepsilon\Gamma_0}{n\sqrt{1-\dfrac{\Gamma_0^2}{G^2}}}\int\sqrt{1-\frac{\Phi^2}{G^2}}\cos\chi\,d\tau,$$

$$\delta\Gamma = 0.$$

La dernière montre que Γ, moment cinétique par rapport à la verticale OZ, ne subit aucune perturbation ni séculaire ni périodique (c'est le théorème des aires).

La première montre que G (moment cinétique pris en valeur

---

[1] De la formule

$$\int \text{dn}\,\tau\,d\tau = -i\,\text{Log}(\text{cn}\,\tau + i\,\text{sn}\,\tau)$$

(qui se vérifie immédiatement par différentiation), on déduit pour la valeur moyenne de la fonction dn

$$\frac{1}{2K}\int_0^{2K}\text{dn}\,\tau\,d\tau = -\frac{i}{2K}[\text{Log}(-1)-\text{Log}\,1] = \frac{\pi}{2K}.$$

absolue) ne subit que des variations périodiques : l'angle ω, dont le cosinus est $\frac{\Gamma}{G}$, reste donc moyennement constant.

Enfin la seconde montre que γ (angle du plan vertical contenant OG avec un plan vertical fixe) subit, outre des variations périodiques, une variation séculaire égale à

$$\varepsilon \frac{\text{moy. } \Phi}{G^2}(t - t_0) = \frac{\varepsilon}{G^2}\sqrt{\frac{ABC^2}{(A-C)(B-C)}}\frac{\pi}{2K}\tau.$$

Nous trouvons ainsi la loi principale du mouvement précessionnel : Le vecteur OG, moment cinétique, reste moyennement constant en grandeur, il fait avec la verticale un angle moyennement constant ω, enfin son plan vertical ZOG tourne moyennement autour de la verticale avec un lent mouvement de précession de vitesse angulaire

$$\varepsilon \frac{\text{moy. } \Phi}{G^2} = \varepsilon \frac{\text{moy. } \cos\theta}{G}.$$

14. *Perturbations des éléments* Φ, χ, φ. — Il nous reste à étudier les perturbations $\delta\Phi$, $\delta\chi$, $\delta\varphi$, dont le calcul est un peu moins simple. Nous nous servirons des formules générales (14 *bis*), qui vont nous donner ces perturbations par le quotient de deux jacobiens, tous deux de la forme

$$\frac{D(G, \ldots, \gamma)}{D(n, k, t_0, \chi_0, \Gamma_0, \gamma_0)}.$$

Utilisons ici les remarques faites à la fin du n° 11. Il est d'abord évident que, dans un tel quotient, les dérivées $\frac{\partial}{\partial t_0}$ peuvent être remplacées par des dérivées $\frac{\partial}{\partial \tau}$, qui n'en diffèrent que par le facteur $-n$. Ensuite, au lieu de prendre les dérivées partielles par rapport à n sous la forme complète

$$\frac{\partial}{\partial n} + (t - t_0)\frac{\partial}{\partial \tau},$$

nous pourrons nous contenter de les prendre sous la simple forme $\frac{\partial}{\partial n}$ (cela revient à faire, dans chaque jacobien, une combinaison de colonnes).

Bref, nous aurons, par exemple, comme formule donnant $\delta\Phi$:

$$\delta\Phi = -\varepsilon \frac{\dfrac{D(G, \Phi, \Gamma, \chi, \sigma, \gamma)}{D(n, k, \tau, \chi_0, \Gamma_0, \gamma_0)}}{\dfrac{D(G, \Phi, \Gamma, \chi, \varphi, \gamma)}{D(n, k, \tau, \chi_0, \Gamma_0, \gamma_0)}},$$

où le jacobien du numérateur ne diffère de celui du dénominateur que par la substitution des dérivées de σ aux dérivées de φ.

Examinons cette expression de $\delta\Phi$: notre but est de reconnaître que Φ ne subit aucune perturbation séculaire, en ce sens que Φ $\left(\text{par suite } \cos\theta = \frac{\Phi}{G}\right)$ oscille entre deux limites moyennement constantes.

Nous simplifierons encore l'expression de $\delta\Phi$ par la remarque suivante. Dans les formules (22), Φ, φ, χ dépendent seuls de la lettre τ; et comme les fonctions sn, cn, dn, H admettent toutes la période 4K [formule (19 *bis*)], nous voyons que Φ, $(\chi - \lambda\tau)$, $\left(\varphi - \frac{\pi}{2K}\tau\right)$ admettent la même période, et pourraient, par suite, être développés en séries trigonométriques de la forme

$$\sum_m a_m \frac{\cos}{\sin} mv \qquad (m = \text{entier}),$$

en posant, pour l'argument v,

$$v = \frac{\pi\tau}{2K} = \frac{n\pi}{2K}(t - t_0);$$

dans ces séries, les coefficients a_m dépendraient du module k^2. Nous aurions ainsi :

$$(22\ bis)\qquad \begin{cases} \Phi = \text{termes périodiques}, \\ \varphi = v + \text{termes périodiques}, \\ \chi = \dfrac{2K\lambda}{\pi} v + \text{termes périodiques}. \end{cases}$$

La lettre τ ne figurant que par l'argument v, nous pourrons, dans le quotient des deux jacobiens donnant $\delta\Phi$, remplacer les dérivées $\frac{\partial}{\partial\tau}$ par des dérivées $\frac{\partial}{\partial v}$.

Observons en dernier lieu que, v dépendant de k (par l'inter-

médiaire de K), les dérivées partielles par rapport à k devraient être prises sous la forme complète

$$\frac{\partial}{\partial k} + \left(\frac{\pi\tau}{2}\,\frac{d\frac{1}{K}}{dk}\right)\frac{\partial}{\partial v};$$

en désignant par $\frac{\partial}{\partial k}$ une dérivée prise sans faire varier v. Mais il est clair qu'en faisant dans chaque jacobien une combinaison de colonnes, nous pourrons nous contenter de la simple forme $\frac{\partial}{\partial k}$.

Finalement, l'expression de la perturbation $\delta\Phi$ s'écrit

$$(24)\qquad \delta\Phi = -\,\varepsilon\,\frac{\dfrac{D(G,\Phi,\Gamma,\chi,\sigma,\gamma)}{D(n,k,v,\chi_0,\Gamma_0,\gamma_0)}}{\dfrac{D(G,\Phi,\Gamma,\chi,\varphi,\gamma)}{D(n,k,v,\chi_0,\Gamma_0,\gamma_0)}}.$$

Examinons séparément le numérateur et le dénominateur de cette fraction.

Le dénominateur que j'appelle Δ, s'écrit, en tenant compte des formules (22) et (22 *bis*), et de la remarque qui termine le n° 11 :

$$(25)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial n} & \frac{\partial G}{\partial k} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} & \frac{\partial \Phi}{\partial k} & \frac{\partial \Phi}{\partial v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \chi}{\partial k} & \frac{\partial \chi}{\partial v} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial k} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix},$$

formule qui se réduit immédiatement à

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial n} & \frac{\partial G}{\partial k} & 0 \\ \frac{\partial \Phi}{\partial n} & \frac{\partial \Phi}{\partial k} & \frac{\partial \Phi}{\partial v} \\ 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial k} & \frac{\partial \varphi}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

D'après les formules (22) et (22 *bis*), il est clair que ce jacobien

ne comporte que des termes constants ou périodiques. Aucun terme *séculaire* ne s'introduira donc dans $\delta\Phi$ du fait du dénominateur.

Quant au numérateur, nous l'obtenons en remplaçant, dans le déterminant (25), les éléments de l'avant-dernière ligne par les dérivées de σ. Ce numérateur, si on le développe par rapport aux éléments de la seconde ligne, s'écrira

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}\nu + \frac{\partial\Phi}{\partial k}\varkappa + \frac{\partial\Phi}{\partial v}\upsilon,$$

ν, $\varkappa$, υ désignant les mineurs correspondants, qui sont

$$\nu = -\begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial k} & 0 & 0 \\ \frac{\partial\chi}{\partial k} & \frac{\partial\chi}{\partial v} & 1 \\ \frac{\partial\sigma}{\partial k} & \frac{\partial\sigma}{\partial v} & \frac{\partial\sigma}{\partial\chi_0} \end{vmatrix}, \qquad \varkappa = \begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial n} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial\chi}{\partial v} & 1 \\ \frac{\partial\sigma}{\partial n} & \frac{\partial\sigma}{\partial v} & \frac{\partial\sigma}{\partial\chi_0} \end{vmatrix},$$

$$\upsilon = -\begin{vmatrix} \frac{\partial G}{\partial n} & \frac{\partial G}{\partial k} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\chi}{\partial k} & 1 \\ \frac{\partial\sigma}{\partial n} & \frac{\partial\sigma}{\partial k} & \frac{\partial\sigma}{\partial\chi_0} \end{vmatrix}.$$

Dans ces mineurs, il faut se rappeler que l'on doit prendre pour G la formule (22), pour χ la formule (22 *bis*), et pour σ la formule déduite de (23 *bis*)

$$\sigma = \sqrt{\frac{ABC^2}{(A-C)(B-C)}}\frac{\Gamma_0}{G^2}v + \text{termes périodiques.}$$

Alors examinons si nos trois mineurs ν, $\varkappa$, υ peuvent contenir des termes séculaires. Les seuls éléments de ces trois déterminants, contenant de tels termes, sont

$$\frac{\partial\chi}{\partial k}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial k}, \quad \frac{\partial\sigma}{\partial n},$$

car tous les autres éléments sont constants ou périodiques. On voit donc immédiatement que ν et $\varkappa$ ne comportent aucun terme

séculaire; au contraire, υ comporte le terme séculaire mixte

$$-\frac{\partial G}{\partial n}\frac{\partial \chi}{\partial k}\frac{\partial \sigma}{\partial \chi_0} \quad (^1).$$

En résumé, l'expression (24) de $\delta\Phi$ s'écrit

$$\delta\Phi = -\frac{\varepsilon}{\Delta}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial n}\nu + \frac{\partial\Phi}{\partial k}\varkappa + \frac{\partial\Phi}{\partial v}\upsilon\right),$$

formule qui peut s'interpréter de la façon suivante. La formule (22) [ou (22 *bis*)] donne la valeur non troublée de Φ. La valeur troublée $\Phi + \delta\Phi$ s'obtiendra en donnant dans (22) [ou dans (22 *bis*)], à n, k, v, respectivement les petits accroissements *fictifs*

$$-\frac{\varepsilon\nu}{\Delta}, \quad -\frac{\varepsilon\varkappa}{\Delta}, \quad -\frac{\varepsilon\upsilon}{\Delta},$$

dont les deux premiers sont essentiellement périodiques : cette valeur troublée [formule (22)] est donc exprimée (à un facteur moyennement constant près) par une fonction dn dont le module k^2 est moyennement constant, et dont l'argument seul comporte un terme séculaire mixte. C'est bien dire, comme nous l'avions annoncé, que $\Phi + \delta\Phi$ oscillera entre deux limites moyennement constantes.

Il resterait, pour être complet, à étudier les perturbations $\delta\chi$ et $\delta\varphi$. Or, une analyse entièrement analogue à celle que nous venons de faire pour $\delta\Phi$ montrerait que $\delta\chi$ et $\delta\varphi$ comportent bien des termes séculaires, mais que ceux-ci peuvent s'interpréter tout comme ceux de $\delta\Phi$, en ce sens qu'ils ne portent que sur l'argument v (c'est-à-dire, somme toute, sur le temps lui-même).

15. *Cas général.* — Dans ce qui précède, nous avons supposé que le centre de gravité du solide, par hypothèse très voisin du point fixe O, se trouvait en g sur l'axe d'inertie Oz (n° 12) : la fonction perturbatrice était alors

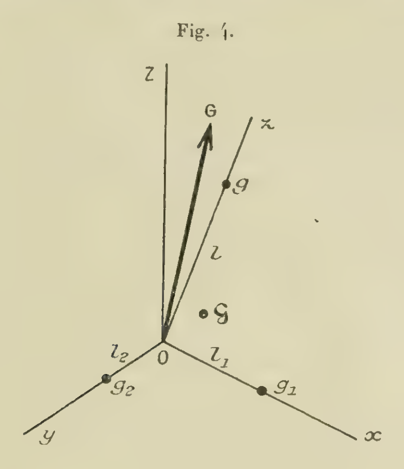
$$\varepsilon f = P\,l\cos(ZOz);$$

(1) Il n'en comporte pas d'autre, car le terme $\left(\frac{\partial G}{\partial n}\frac{\partial \sigma}{\partial k} - \frac{\partial G}{\partial k}\frac{\partial \sigma}{\partial n}\right)$ est évidemment identiquement nul si l'on n'y retient que la partie séculaire de σ.

elle avait une valeur moyenne non nulle dans le mouvement non troublé, ce qui amenait dans la fonction résolvante $\sigma = \int f\,dt$ un terme séculaire.

Nous traiterions d'une façon analogue le cas où le centre de gravité du solide serait en g_1 ou en g_2 sur l'un des autres axes d'inertie Ox ou Oy (*fig.* 4). Nous aurions alors une petite sim-

Fig. 4.



plification, du fait que σ n'aurait aucun terme séculaire : en effet, la fonction perturbatrice serait alors

$$P\,l_1 \cos(ZOx) \quad \text{ou} \quad P\,l_2 \cos(ZOy),$$

et l'on reconnaît aisément, sur le mouvement à la Poinsot non troublé, que ces deux derniers cosinus ont une valeur moyenne nulle.

Nous pouvons donc dire que dans ce dernier cas (centre de gravité en g_1 ou g_2), le mouvement à la Poinsot ne subit que de petites variations périodiques : il n'y a même pas le mouvement de précession signalé au n° 13 (provenant alors du terme séculaire de $\delta\gamma$).

Enfin, dans le cas général, où le centre de gravité $\mathcal{G}$ du solide aurait une position quelconque (voisine du point fixe O), nous décomposerions le poids total du corps, appliqué en $\mathcal{G}$, en trois autres poids fictifs P, P_1, P_2 appliqués en trois points g, g_1, g_2

sur les axes d'inertie, ce qui nous ramènerait aux cas particuliers précédents.

Pour résumer tout ce qui précède, nous dirons que *lorsqu'un solide pesant est suspendu par un point voisin de son centre de gravité, la seule perturbation séculaire que subit le mouvement à la Poinsot* (qui existerait seul en l'absence de la pesanteur), *est le mouvement conique de précession du moment cinétique* OG, *signalé au n°* **13**.

Ce résultat, qui est bien conforme à ce que l'intuition géométrique et mécanique permettait de prévoir, sinon de démontrer, se trouve, remarquons-le, en complet accord avec le théorème démontré au n° 5, sur l'*invariabilité de la valeur moyenne de la fonction perturbatrice.*

(*A suivre.*)

MÉLANGES.

PASCAL MATHÉMATICIEN ET PHYSICIEN;

Par M. Émile PICARD (1).

L'Académie des Sciences est heureuse de s'associer à l'hommage rendu à l'un des plus glorieux enfants de notre pays. Elle aime à rappeler ces années du XVIIe siècle, où sans avoir une existence officielle, elle formait une petite société de mathématiciens et de physiciens groupés autour du Père Mersenne. Parmi les membres de cette académie libre figuraient Descartes, Fermat, Roberval, Desargues, Pascal, pléiade illustre, que nous sommes fiers de rattacher ainsi à notre compagnie.

Avec le XVIIe siècle avait commencé une brillante période de l'histoire des sciences. Kepler et Galilée avaient ouvert des voies nouvelles par leurs immortelles découvertes en astronomie, en physique et en mécanique. Peu à peu s'élaboraient les méthodes de la science moderne, et les sciences physico-mathématiques se constituaient sous la forme qui devait leur permettre de prendre, pendant deux siècles, un incomparable essor. Dans les milieux scientifiques, où Blaise Pascal fut introduit tout jeune encore par son père, les sciences mathématiques étaient en grand honneur, et l'on y avait aussi le goût de l'observation et de l'expérimentation. Étienne Pascal entretenait la curiosité d'esprit de son fils, en lui décrivant les phénomènes de la nature et les plus beaux résultats de l'industrie humaine. C'est sous l'influence d'une éducation où la science tenait une large place, et où se manifestait quelque défiance de la spéculation philosophique *a priori*, que

(1) Discours prononcé au nom de l'Académie des Sciences, à Clermont-Ferrand, le dimanche 8 juillet 1923, à l'occasion du tricentenaire de la naissance de Pascal.

se développa le génie de Pascal. Son vigoureux esprit se forma en dehors des cadres habituels, et, de bonne heure, la recherche de la vérité le prit tout entier.

Encore enfant, Pascal s'essayait déjà dans des recherches géométriques, où, quelle que puisse être la part de la légende, il montrait une extraordinaire facilité. A seize ans, il publiait un court *Essay pour les coniques*. Ces courbes remarquables, déjà considérées dans l'antiquité grecque, avaient été utilisées par Kepler dans l'étude du mouvement des planètes, et bientôt elles allaient, avec Newton, jouer un rôle essentiel en mécanique céleste, exemple mémorable de spéculations théoriques ayant attendu deux mille ans leur application. Pascal, dans son *Essay*, a dit ce qu'il doit au mathématicien lyonnais Desargues. Mais, en prenant pour base de la théorie des coniques la proposition célèbre sur l'hexagone inscrit, qui porte son nom, il témoignait de la puissance d'invention d'un grand géomètre; aussi la perte du *Traité sur les coniques*, auquel il travailla plus tard, et dont quelques fragments furent communiqués à Leibniz, est-elle à jamais regrettable. Alors que Descartes ramenait la géométrie à l'algèbre avec la géométrie analytique, Pascal s'engageait dans les voies de la géométrie pure, que Poncelet et Chasles devaient suivre avec tant d'éclat au siècle dernier.

L'éducation reçue par Pascal l'avait rendu curieux de toutes choses, et les applications pratiques de la science ne l'intéressaient pas moins que la théorie pure. Pour venir en aide à son père, il pose le problème de la construction des machines à calculer. Sa machine concerne les opérations d'addition et de soustraction; elle donne la somme de deux nombres dont les chiffres ont été successivement inscrits sur diverses roues. Dans cette opération, le report des retenues constituait une sérieuse difficulté. Quoique le procédé employé par Pascal nous paraisse aujourd'hui bien grossier, on doit admirer l'ingéniosité dont il faisait preuve à une époque où l'étude des transformations cinématiques était si peu avancée. Pascal attachait un grand intérêt à son invention, et il traita avec quelque dédain ceux qui cherchèrent à l'imiter. Il montra là d'ailleurs de véritables qualités d'homme d'affaires, et le privilège qu'il se fit attribuer pour sa machine arithmétique et qui prévoyait « tous les déguisements possibles » constitue un

brevet difficile à tourner. En fait, c'est seulement au milieu du siècle dernier que la conception première de Pascal est devenue susceptible d'une forme vraiment pratique, et l'on sait le développement pris aujourd'hui par des mécanismes capables de réaliser les opérations algébriques les plus complexes.

Les circonstances décidèrent maintes fois de l'orientation des recherches de Pascal, attentif à toutes les nouveautés. En 1644, Torricelli réalisait une expérience célèbre avec un tube rempli de mercure, et faisait renaître la question du vide longtemps agitée par les écoles de l'antiquité et du moyen âge. Aristote avait conclu, comme conséquence de sa théorie du lieu naturel, à l'impossibilité du vide. Plus tard, Roger Bacon, posant un principe de continuité universelle, regardait le vide comme un désordre, et, comme, d'après lui, la nature a besoin d'ordre, elle contraint les corps à se mouvoir de manière qu'aucun espace vide ne se produise entre eux. Cependant l'observation et l'expérience intervenaient peu à peu dans l'étude des phénomènes naturels. Il semble que, à la suite de son expérience, Torricelli ait soupçonné que la force soulevant le vif argent n'est pas une force intérieure et provient de la gravité de l'air extérieur poussant le liquide dans le tube. Mais les hypothèses les plus diverses sont alors agitées, hypothèses qui, comme le dit Pascal, « conspirant à bannir le vide, exercent à l'envi cette puissance de l'esprit qu'on nomme subtilité et, pour solution de difficultés véritables, ne donnent que de vaines paroles sans fondement ». Pascal demande à l'expérience et non à des dissertations stériles des réponses aux questions posées. Il témoigne du sens critique le plus pénétrant dans la discussion des faits, dont il tire les conséquences avec une logique d'une rare vigueur. Il montre, par de longues et coûteuses expériences, où figurent des tubes et des siphons de cinquante pieds de haut, que le vide existe dans la partie supérieure du baromètre, ou du moins « que l'espace, vide en apparence, n'est rempli d'aucune des matières qui sont connues dans la nature et qui tombent sous aucun de nos sens ». On lui a parfois reproché de n'avoir abandonné que peu à peu l'opinion d'après laquelle la nature abhorre le vide. Quoiqu'il éprouvât des difficultés à croire que la nature, « qui n'est point animée ni sensible, puisse être susceptible d'horreur », Pascal ne se

décida, en effet, que lentement à abandonner, comme il l'avoue lui-même, les opinions où le respect de l'antiquité l'avait retenu, et il formula correctement la solution du problème, en parlant des matières qui nous sont connues. Trente ans plus tard, l'illustre Huyghens, plus audacieux, invoquait l'expérience de Torricelli pour prouver que le vide barométrique, laissant passer la lumière, doit contenir une matière d'espèce nouvelle. Ce fut l'origine de la théorie si féconde des ondulations; mais, de cet éther, où se propagent les ondes lumineuses, la science, il faut l'avouer, n'a pas encore réussi, depuis plus de deux siècles, à concilier certaines propriétés contradictoires, au point que quelques-uns, enclins à ne voir dans les théories que des jeux de formules, ne lui accordent plus aujourd'hui qu'une existence symbolique. Pascal, en ces questions, ne se préoccupant que « des matières qui sont en notre connaissance », laissait, sans l'écouter peut-être, Descartes disserter sur les tourbillons de sa matière subtile. L'expérience, dite du vide dans le vide, par laquelle un baromètre était réalisé dans le vide, l'inclinait à se rallier à l'explication entrevue par Torricelli, mais il fallut l'expérience du Puy de Dôme pour lui faire admettre définitivement que la pesanteur et la pression de l'air sont les seules causes de la suspension du mercure dans le tube barométrique. Qui eut le premier l'idée de réaliser cette expérience ? C'est un point sur lequel on a beaucoup discuté. Descartes, sans séparer jamais la physique de sa métaphysique, y pensa sans doute en même temps que Pascal, et aussi le Père Mersenne, dont Pascal disait qu'il n'avait pas d'égal pour poser de belles questions. Il semble même que le Minime ait à cet égard quelque priorité, ayant proposé l'expérience dans un livre imprimé en 1647. Mais Pascal sut le premier organiser systématiquement les observations, et, le 19 septembre 1648, son beau-frère Perier constatait l'inégalité des hauteurs dans le baromètre à la base et au sommet du Puy de Dôme. Cette démonstration expérimentale de la pesanteur et de la pression de l'air eut un retentissement immense. Désormais, on ne pouvait plus professer l'horreur de la nature pour le vide, sans supposer que cette nature abhorre le vide au pied de la montagne plus que sur son sommet; l'explication purement verbale avait reculé devant le fait précis, et un progrès scientifique considérable était réalisé.

Pascal voit aussi l'importance pratique de la célèbre expérience, mandant de suite à son beau-frère que non seulement la diversité des lieux, mais aussi la diversité des temps en un même lieu, selon qu'il fait plus ou moins froid ou chaud, sec ou humide, amenaient des variations de niveau dans les tubes barométriques. C'était là tout un programme météorologique, et l'observatoire du Puy de Dôme, dont la ville de Clermont est justement fière, fut virtuellement fondé par l'illustre enfant de Clermont, dont nous célébrons aujourd'hui le troisième centenaire.

Si importante qu'ait été l'observation du Puy de Dôme, elle ne fut qu'un brillant épisode dans le développement d'une étude plus générale entreprise par Pascal. Sa pensée allait au delà du problème particulier de la pesanteur de l'air. Sous le nom de *Traité de l'équilibre des liqueurs*, il compose un traité d'hydrostatique, œuvre admirable dans laquelle sont coordonnés, d'une manière logique et harmonieuse, les résultats épars obtenus depuis Archimède dans la statique des fluides. Des expériences précises définissent ce qu'on doit entendre par la pression en un point d'un liquide et en font connaître les lois. Pascal rattache ensuite ces lois « pour ceux qui sont géomètres » à des principes généraux de mécanique, comme celui-ci, que « jamais un corps ne se meut par son poids, sans que son centre de gravité descende ». Il utilise aussi le principe des déplacements virtuels, qui, soupçonné dès le XIIIe siècle par l'école de Jordanus, connu de Galilée, et formulé pour la première fois avec les précisions nécessaires par Descartes, domine la statique tout entière. De cet ordre constant « d'après lequel le chemin dans les machines est en raison inverse de la force », Pascal déduit, en faisant abstraction du poids du liquide, la propriété fondamentale de la presse hydraulique à laquelle son nom reste attaché. Le *Traité de l'équilibre des liqueurs* est un ouvrage qui fait époque dans l'histoire de la mécanique; c'est de cette base solide que partiront plus tard, après le développement des méthodes du calcul infinitésimal, Clairaut, d'Alembert et leurs successeurs, pour fonder la théorie générale des fluides. Le *Traité de l'équilibre des liqueurs* et celui de *la Pesanteur de la masse de l'air* ne sont pas moins mémorables dans l'histoire de la littérature scientifique française. Pascal, avec sa pensée merveilleusement

lucide, y donne le modèle du style scientifique; de sa phrase sobre et allant droit au but à la phrase lourde et parfois obscure de Descartes dans sa *Dioptrique* et dans ses *Météores*, le progrès est considérable. Pascal avait conscience de l'importance de l'œuvre accomplie, en coordonnant les travaux de ses prédécesseurs et les rattachant à quelques principes simples; il pouvait écrire très justement : « Je sais un peu ce que c'est que l'ordre, et combien peu de gens l'entendent. » Mais, s'il était fier du succès de ses efforts, il savait aussi que la science est une œuvre collective, comme en témoigne cette phrase des *Pensées:* « Certains auteurs, parlant de leurs ouvrages, disent : mon livre, mon commentaire, mon histoire, etc. Ils sentent leurs bourgeois qui ont pignon sur rue, et toujours un « chez moi » à la bouche. Ils feraient mieux de dire : notre livre, notre commentaire, notre histoire, etc., vu que d'ordinaire il y a plus en cela du bien d'autrui que du leur. »

Les premiers travaux mathématiques de Pascal avaient porté sur les sections coniques. Il ne semble pas avoir approfondi l'œuvre algébrique de Viète, non plus que la géométrie analytique de Descartes. La généralité même de la méthode, préconisée par le grand philosophe, devait plutôt en détourner Pascal, soucieux de résultats précis. Son esprit, curieux des détails, préférait les beaux problèmes qu'offre la géométrie traitée à la manière des anciens et les questions délicates posées par l'analyse combinatoire et le calcul des probabilités. Pascal a consacré un traité à ce qu'il a appelé « le triangle arithmétique »; il entend par là une suite d'entiers disposés en colonnes verticales formant un triangle indéfini, où chaque nombre se calcule en faisant la somme des entiers qui le surmontent dans la colonne précédente. On obtient ainsi les nombres de combinaisons de diverses grandeurs prises entre elles un certain nombre de fois, et la considération du triangle devait lui être utile pour ses recherches sur le calcul des probabilités. Il faut cependant reconnaître que, si Pascal avait employé les signes de l'algèbre, il aurait, en évitant les longs détours du langage ordinaire, grandement facilité la tâche de ses lecteurs.

Deux questions sur le jeu, posées par le chevalier de Méré, furent l'origine du calcul des probabilités. La première se formulait ainsi : si l'on joue plusieurs fois avec deux dés, combien faudra-t-il de coups au minimum pour que l'on puisse parier avec avantage que,

après avoir joué ces coups, on aura fait *rafle de six?* La réponse, qui se déduit facilement de l'évaluation du nombre des cas favorables, est que, si l'on parie d'amener *double-six* en *vingt-quatre* coups, les chances de perte l'emportent sur celles de gain; c'est le contraire, si l'on accorde *vingt-cinq* coups. La seconde question était moins simple. Comme l'écrivait Pascal à Fermat, au sujet de Méré qui ne put la résoudre : « Il a un très bon esprit, mais il n'est pas géomètre; et c'est, comme vous savez, un grave défaut. » Ce problème concerne le cas où, des joueurs rompant le jeu avant la fin, on cherche à opérer la juste distribution, qui s'appelle le *parti*. La méthode de Pascal est d'une admirable simplicité, et, en formant une équation aux différences finies, il invente une des deux méthodes analytiques du calcul des probabilités. L'autre méthode, qui repose sur la théorie des combinaisons, fut donnée dans le même temps par Fermat. La correspondance si curieuse entre ces deux grands esprits nous fait assister à la genèse des premiers principes du calcul des probabilités. Le compliment, cet ennemi des conversations douces et aisées, suivant l'expression de Fermat, en est le plus souvent banni. Cependant, on y sent la déférence de Pascal pour le grand géomètre de Toulouse, et celui-ci lui ayant envoyé les énoncés de quelques-uns de ses théorèmes sur la décomposition des entiers en nombres carrés et en nombres triangulaires, dans l'espérance qu'il le suivrait dans la même voie, Pascal répond, au sujet de ces énoncés : « Pour moy, je vous confesse que cela me passe de bien loin; je ne suis capable que de les admirer. » En une autre occasion, Pascal écrit à Fermat qu'il est celui de toute l'Europe qu'il tient pour le plus grand géomètre. La correspondance entre Fermat et Pascal, imprimée seulement longtemps après, circula dans le monde scientifique d'alors et provoqua de nouvelles recherches sur le calcul des probabilités. Huyghens, Leibniz et d'autres développent et appliquent les principes de Fermat et de Pascal, sans y rien ajouter d'essentiel, jusqu'à ce que Jacques Bernoulli découvre le célèbre théorème qui porte son nom, et que Poisson a généralisé un siècle plus tard en l'appelant la loi des grands nombres. Sans parler des nombreuses applications pratiques du calcul des probabilités, on sait la place qu'il a prise dans la science de notre époque, au point que, d'après certains théoriciens de la mécanique statistique, les lois de la

physique ne sont que des lois de plus grande probabilité, si bien que, quelque jour, le monde pourrait faire machine en arrière, éventualité qui, hâtons-nous de le dire, est infiniment peu probable.

Pascal, retiré à Port-Royal, avait abandonné toute recherche scientifique, quand, au mois de juin 1658, il adresse un défi aux mathématiciens sur des problèmes relatifs à la courbe appelée roulette ou cycloïde. Galilée et le Père Mersenne avaient les premiers considéré cette courbe, étudiée ensuite par Torricelli et surtout par Roberval, qui démontra que l'aire comprise entre la cycloïde et sa base est égale à trois fois l'aire du cercle générateur. Pour résoudre les problèmes posés par Pascal, il fallait faire des intégrations très complexes, et les vues qu'il développa à cette occasion portent au delà du cadre spécial des questions mises au concours. Le principe général posé par Cavalieri dans sa *Géométrie des indivisibles* est mis en pleine lumière par Pascal, qui soutient la légitimité de ce calcul des infiniment petits, encore enveloppé de brumes. La phrase suivante, précisant son emploi, répondait à certaines critiques : « On n'augmente pas une grandeur continue d'un certain ordre, formule Pascal, lorsqu'on lui ajoute en tel nombre que l'on voudra des grandeurs d'un ordre infinitésimal supérieur. » Peu à peu se clarifiait ainsi la notion de sommation ou d'intégration, posée sous d'autres points de vue par Eudoxe et par Archimède dans l'antiquité, et dont Fermat donnait de son côté des exemples mémorables relatifs aux paraboles de degrés supérieurs. On trouve dans l'ouvrage de Pascal sur la roulette, sous des formes géométriques extrêmement ingénieuses, des résultats fondamentaux se rapportant à ce que les géomètres appellent aujourd'hui les intégrales curvilignes et les intégrales doubles, et il suffit, pour indiquer la puissance de ses méthodes, de rappeler le beau théorème sur l'égalité à un arc d'ellipse d'un arc de cycloïde allongée ou raccourcie. N'oublions pas non plus que Leibniz a plus tard reconnu expressément tout ce qu'il devait aux ouvrages de Pascal. Les amis des sciences mathématiques regarderont toujours avec respect à la Bibliothèque de Clermont les deux exemplaires, offerts par Marguerite Perier, de la *Lettre contenant la solution de tous les problèmes touchant la roulette*, écrite par Pascal à M. de Carcavi, sous le nom d'Amos Dettonville,

qui était l'anagramme de Louis de Montalte, l'auteur des *Provinciales.*

Telle fut, pendant les quelques années où il poursuivit des recherches scientifiques, l'œuvre de Blaise Pascal en mathématiques et en physique. Il y chercha surtout un délassement et une occasion d'exercer son vigoureux esprit. Depuis Lagrange et Laplace, on s'accorde à regarder Fermat, cet autre amateur de génie, comme le premier fondateur du calcul différentiel, que Leibniz devait doter plus tard d'un fécond algorithme. C'est aussi pour nous un légitime sujet de fierté que de voir les noms associés de Fermat et de Pascal briller au premier rang parmi ceux des fondateurs du calcul intégral et du calcul des probabilités. Chez Pascal, la puissance d'invention fut égale à celle des plus grands géomètres, et il est permis de regretter que d'autres soucis l'aient détourné des voies de la science à une époque où se préparait, en mécanique et en physique, comme dans l'analyse infinitésimale, la magnifique floraison qui allait éclore dans la seconde moitié du XVIIe siècle avec Huyghens, Newton et Leibniz.

En physique, Pascal se montre habile expérimentateur, et il apparaît mécanicien ingénieux dans la construction de la machine à calculer et dans l'invention du haquet. La physique est, avant tout, pour lui, une science expérimentale, et il insiste sur ce que l'expérience et l'observation sont la seule source de nos connaissances. « Que tous les disciples d'Aristote, — écrit-il dans la conclusion de ses traités sur le vide et sur la pesanteur de l'air, — assemblent tout ce qu'il y a de fort dans les écrits de leur maître et de ses commentateurs pour rendre raison de ces choses par l'horreur du vuide, s'ils le peuvent; sinon, qu'ils reconnaissent que les expériences sont les véritables maistres qu'il faut suivre dans la physique. » Mais on doit aussi admirer la puissance de coordination dont Pascal fait preuve dans ses recherches sur les fluides. D'après lui, une tâche essentielle du physicien est de disposer les faits dans un ordre logique, en les rattachant les uns aux autres grâce à quelques principes simples qui généralisent eux-mêmes des résultats expérimentaux. C'est ce qu'il fit en hydrostatique avec le principe du travail virtuel et celui du centre de gravité.

Pascal regardait la physique positive comme essentiellement

distincte de la cosmologie, c'est-à-dire d'une métaphysique du monde matériel, et, s'il était permis de transposer quelque peu en se servant d'un langage tout moderne, on qualifierait d'énergétique le point de vue sous lequel il envisageait la science. On peut penser aussi qu'il se ralliait à l'antique doctrine, d'après laquelle la science n'a d'autre objet que de *sauver les phénomènes*, σώζειν τὰ φαινόμενα, suivant une formule platonicienne ; c'est ainsi qu'il trouve bon qu'on n'approfondisse pas l'opinion de Copernic considérant sans doute qu'il y a équivalence entre les systèmes héliocentrique et géocentrique dans l'explication des apparences offertes par les mouvements des planètes.

Pour Pascal, la physique ne peut être réduite à une mathématique universelle, et la tendance cartésienne lui paraissait trop audacieuse de chercher l'essence de la matière et de préciser la façon dont le monde est construit avec de la figure et du mouvement. « Il faut dire en gros, — répète-t-il, — cela se fait par figure et mouvement, car cela est vrai, mais de dire quels et composer la machine, cela est ridicule, car cela est inutile, et incertain, et pénible. » Le point de vue est étroit, mais, depuis un siècle, d'éminents physiciens, en s'y tenant, ont fait progresser la science. Par contre, d'autres, plus confiants, se sont efforcés de démonter la machine pour voir ce qu'elle contient, et les hypothèses sur lesquelles ils ont bâti des théories les ont parfois conduits à la découverte de faits importants et nouveaux. Les savants ont aujourd'hui moins de goût pour les querelles d'écoles, où se plaisaient leurs devanciers, et ils jugent mieux de ce qu'il faut demander aux hypothèses et aux théories. Cependant, ceux mêmes qui accorderaient à Pascal qu'il est incertain et inutile de chercher la composition de la machine ne le suivraient sans doute pas jusqu'au bout d'une pensée, qu'il termine par ces mots : « Et quand cela serait vrai, nous n'estimons pas que toute la philosophie vaille une heure de peine. » Par philosophie, il entend ici la philosophie naturelle, c'est-à-dire les sciences physiques, suivant une expression malheureusement abandonnée en France depuis un siècle. De la géométrie, il jugeait à peu près comme de la physique, quand il écrivait à Fermat : « car, pour vous parler franchement de la géométrie, je la trouve le plus haut exercice de l'esprit, mais en même temps je la connais pour si inutile que je

fais peu de différence entre un homme qui n'est que géomètre et un habile artisan. Aussi je l'appelle le plus beau métier du monde, mais enfin ce n'est qu'un métier; et j'ai dit souvent qu'elle est bonne pour faire l'essai, mais non pas l'emploi de notre force. »

C'est une des étrangetés du génie de Pascal, qu'il ait tracé un sillon aussi éclatant dans des recherches, dont il proclamait la vanité. De bonne heure, il jugea seuls dignes de ses efforts la philosophie morale et les problèmes religieux, jamais résolus, dans lesquels l'humanité exprime ses inquiétudes et ses angoisses. Cependant, il ne se détachait qu'à regret des études scientifiques pour lesquelles il était si merveilleusement doué, et, après avoir paru les abandonner sans esprit de retour, il y fut ramené un moment par une heureuse inconséquence, qui nous permet de le regarder comme un des fondateurs de l'analyse infinitésimale.

Sous l'empire de ses préoccupations religieuses, Pascal en était venu à voir dans la recherche scientifique systématiquement poursuivie un exercice non seulement inutile, mais dangereux. On lit dans les *Pensées :* « Écrire contre ceux qui approfondissent la science : Descartes ». Pascal et Descartes. Que de contrastes entre ces deux grands génies ! Dans sa vision de la science, Pascal a montré trop de prudence, et Descartes a fait preuve de trop d'audace. Jamais esprits ne furent plus dissemblables, et moins faits pour se comprendre. Si nous sommes tentés de sourire de l'assurance avec laquelle Descartes trouvait des explications pour toutes choses, nous nous étonnons de l'indifférence de Pascal pour les points de vue féconds introduits par les idées cartésiennes. Mais l'œuvre scientifique de Pascal est assez grande pour que nous ne nous abandonnions pas à des regrets superflus, et nous pouvons placer son nom à côté de ceux de Descartes et de Fermat. Ces trois grands géomètres sont l'honneur de la science française dans la première moitié du XVIIe siècle; les mathématiciens et les physiciens les associent dans une commune admiration.

MOUVEMENT D'UN SOLIDE PESANT FIXÉ PAR UN POINT VOISIN DE SON CENTRE DE GRAVITÉ;

PAR M. H. VERGNE.

(*Suite et fin.*)

---

16. *Cas particulier.* — Un cas particulier intéressant se présente lorsque le module k des fonctions elliptiques est très petit. Il est alors possible de développer toutes les fonctions (y compris la fonction résolvante σ) en séries rapidement convergentes ordonnées suivant les puissances de k^2. On pourra par exemple se contenter, dans les perturbations, de conserver les termes en k^2, et les calculs peuvent être alors pratiquement effectués.

La formule (19) montre que deux circonstances bien différentes peuvent rendre le module k très petit :

1° Si A est voisin de B, c'est-à-dire si le corps est presque de révolution autour de l'axe d'inertie Oz, k sera très petit quelles que soient les conditions initiales.

2° Si A et B sont très différents, c'est-à-dire si le corps est quelconque, mais si D est très voisin de C, k sera très petit grâce aux conditions initiales : car prendre la constante arbitraire D voisine de C revient à faire tourner initialement le corps autour d'un axe très voisin de son axe d'inertie Oz [1].

Enfin, il peut arriver que les deux circonstances se présentent à la fois, et comme ce cas présente des applications importantes, nous allons l'étudier d'un peu plus près.

Nous supposerons donc que notre corps solide, fixé en O, est une toupie gyroscopique qui n'est pas parfaitement de révolution autour de l'axe d'inertie Oz; nous la lançons initialement avec une grande vitesse de rotation autour d'un axe voisin de cet axe Oz. Nous cherchons son mouvement dans le champ de la pesanteur [2]

---

[1] On voit, en effet, sur les formules (20) ou (20 *bis*) que, dans ce cas, cos θ est très voisin de 1 : l'angle θ est donc très petit.

[2] L'énergie potentielle de pesanteur jouera le rôle de fonction perturbatrice : elle est, en effet, très petite vis-à-vis de l'énergie cinétique de rotation du solide, que nous supposons très grande.

en supposant que son centre de gravité n'est pas exactement situé sur l'axe Oz, mais en est voisin (les longueurs l_1, l_2 de la figure 4 sont très petites à côté de l qui est fini).

Bref, nous étudions le mouvement d'un gyroscope ordinaire présentant de légers défauts de révolution et de centrage du centre de gravité : nous allons voir que ces défauts n'influent, pratiquement, en rien sur son mouvement (¹).

Tout d'abord les fonctions perturbatrices

$$P_1 l_1 \cos(ZOx), \qquad P_2 l_2 \cos(ZOy)$$

envisagées au nº 15 sont par hypothèse très petites à côté de la fonction perturbatrice principale

$$\varepsilon f = P l \cos(ZOz)$$

envisagée au nº 12, et il suffira de retenir cette dernière.

D'ailleurs, nous avons toujours

$$\cos(ZOz) = \cos\Omega = \cos\omega \cos\theta - \sin\omega \sin\theta \cos\chi.$$

L'angle θ est supposé initialement très petit : dans le mouvement à la Poinsot non troublé, il reste *toujours* très petit (d'ailleurs, il reste aussi très petit dans le mouvement troublé, puisque nous savons qu'il ne subit que des perturbations périodiques); comme $\cos\Omega$ est multiplié par $\varepsilon = Pl$, nous pourrons, dans son expression, remplacer $\sin\theta$ par zéro et $\cos\theta$ par 1, ce qui réduira la fonction perturbatrice à

$$\varepsilon f = P l \cos\omega,$$

$$\varepsilon f = P l \frac{\Gamma}{G},$$

d'où, pour la fonction résolvante,

$$\varepsilon\sigma = \int \varepsilon f \, dt = P l . \frac{\Gamma}{G} t.$$

La fonction σ ne dépend que des deux éléments canoniques Γ

(¹) Le défaut de révolution pourrait être assez grand sans infirmer cette conclusion pourvu que le défaut de centrage du centre de gravité reste faible; si ce dernier défaut devenait grand, cela introduirait des perturbations *périodiques* non négligeables.

et G, les formules (14) donnent immédiatement

$$\delta\gamma = \frac{Pl}{G}t,$$

$$\delta\chi = -Pl\frac{\Gamma}{G^2}t = -\frac{Pl\cos\omega}{G}.t,$$

et toutes les autres perturbations sont nulles.

La perturbation $\delta\gamma$ donne le mouvement précessionnel du vecteur du moment cinétique OG.

La perturbation $\delta\chi = -\delta\gamma\cos\omega$ n'est pas, à proprement parler, une perturbation : elle provient de ce que l'angle χ est compté, non pas à partir d'un plan fixe, mais à partir du plan ZOG qui tourne avec la vitesse angulaire précessionnelle $\frac{Pl}{G}$, dont la composante suivant la direction OG est précisément $\frac{Pl}{G}\cos\omega$.

Nous pouvons résumer ainsi le résultat qui précède : S'il n'y avait pas de pesanteur (c'est-à-dire s'il n'y avait aucune action perturbatrice), le moment cinétique OG serait absolument fixe, et notre gyroscope non de révolution aurait autour de OG comme axe, un mouvement à la Poinsot qui ne différerait, par hypothèse, que très peu d'une simple rotation rapide autour de l'axe d'inertie Oz, ce dernier axe décrivant autour de OG un cône de *nutation* d'ouverture θ toujours très petite. L'action de la pesanteur n'amène à ce mouvement à la Poinsot qu'une seule perturbation, celle de faire décrire au moment cinétique OG (axe du mouvement à la Poinsot) le cône de précession.

C'est précisément à ce résultat qu'aurait conduit immédiatement, mais d'une manière qui n'est peut-être pas entièrement rigoureuse, la simple application du théorème des moments cinétiques : la vitesse du point G (extrémité du vecteur moment cinétique) est équipollente (*fig.* 3) au moment $O\mu$ de la force perturbatrice (poids P appliqué en g); or, l'angle θ étant très petit, ce moment $O\mu$ est à très peu près égal à $Pl\sin\omega$, qui est bien la vitesse du point G quand le vecteur OG décrit le cône de précession.

Si, à partir du point O comme centre, nous imaginons tracée la sphère de rayon 1, le moment cinétique OG a sur cette sphère une trace que nous appellerons le point G, et l'axe d'inertie Oz

a une trace que nous appellerons le point z. Le point G, dans le mouvement de précession, décrit sur cette sphère le parallèle de colatitude ω, tandis que le point z décrit autour du point G la petite courbe nutationnelle, si bien que le mouvement résultant du point z est une sorte de courbe épicycloïdale, festonnant de boucles très petites la circonférence lieu du point G.

Dans beaucoup de cas, on peut convenir de ne pas parler du petit mouvement de nutation, et ne retenir que la précession. Cela revient, puisque l'angle θ est très petit, à confondre sur la sphère le point z avec le point G, et à dire que l'axe de rotation du gyroscope, pratiquement confondu avec l'axe d'inertie Oz, décrit autour de la verticale le cône précessionnel. Il sera d'ailleurs toujours loisible de superposer, après coup, à cette précession, la petite nutation telle qu'elle serait dans le mouvement à la Poinsot non troublé, puisque l'angle θ ne subit aucune perturbation.

17. *Couple perturbateur dépendant explicitement du temps.* — Dans ce qui précède, nous avons toujours supposé que le champ de pesanteur dans lequel se trouve placé notre gyroscope est un champ *constant* en intensité et en direction. Il pourrait n'en être pas ainsi : par exemple, on pourrait imaginer le gyroscope dans un champ dont l'intensité et la direction varieraient avec le temps suivant une loi donnée : le couple perturbateur, qui produit la précession, serait alors fonction non seulement de la position actuelle du solide, mais aussi explicitement du temps, et le mouvement conique de précession, au lieu de s'effectuer autour d'un axe vertical fixe, aurait lieu maintenant autour d'une verticale variable, dont la direction serait connue à chaque instant [1]. Plaçons-nous dans cette hypothèse, en nous bornant au cas envisagé en dernier lieu d'un gyroscope lancé initialement autour d'un axe de rotation très peu différent de l'axe principal d'inertie Oz

(1) En fait, par suite de la rotation de la Terre, la verticale d'un lieu n'a pas une direction fixe *dans l'espace absolu :* elle y décrit en 24 heures un cône de révolution ayant pour demi-angle au sommet la colatitude du lieu. C'est donc en réalité autour d'une verticale *lentement variable* que s'accomplit le mouvement précessionnel d'une toupie. De ce chef, il résulte que les indications données par les appareils gyroscopiques (gyroscope collimateur Fleuriais) servant, en marine, à déterminer la verticale (lorsque l'horizon est invisible, la nuit ou par temps de brume) doivent subir une petite correction qui n'est pas toujours négligeable.

(angle θ très petit) [1]. En faisant abstraction du petit mouvement de nutation (dont on peut d'ailleurs tenir compte après coup, si l'on veut), on peut dire que l'on connaîtra le mouvement de l'axe d'inertie Oz, dès que l'on connaîtra le mouvement du vecteur OG : or, la vitesse de l'extrémité G de la flèche OG est à chaque instant équipollente au moment $O\mu$ du couple perturbateur par rapport au point fixe O.

Cette remarque trouve son application, par exemple, dans le problème des mouvements précessionnels de l'axe d'un corps céleste, et dans le problème très analogue du mouvement précessionnel des projectiles oblongs lancés par les armes rayées. Dans ces deux problèmes, il est vrai, le corps solide étudié (corps céleste ou obus) n'est en réalité fixé par aucun point; mais comme l'on étudie le mouvement *autour du centre de gravité* O, celui-ci est regardé comme fixe, par définition, et l'application du théorème des moments cinétiques (qui s'étend au mouvement autour du centre de gravité) fournit encore à chaque instant la vitesse du mouvement de précession de l'extrémité du vecteur moment cinétique, vitesse qui est équipollente au moment $O\mu$ du couple perturbateur, lequel, ici, dépend bien explicitement du temps.

Nous dirons, pour terminer, quelques mots de ces deux problèmes.

18. *Mouvements précessionnels de l'axe d'un corps céleste.* — Les corps célestes, planètes et satellites, sont très voisins de corps de révolution et sont animés d'un mouvement de rotation relativement rapide autour d'un axe très voisin de leur plus petit axe principal d'inertie Oz. Ils subissent, dans leur mouvement autour de leur centre de gravité O, l'influence perturbatrice des astres voisins, qui se traduit à chaque instant par un petit *couple* perturbateur, agissant comme le couple dû à un champ de pesanteur variable agirait sur un gyroscope.

Prenant comme exemple la Terre, étudions le mouvement de son axe Oz sous l'action perturbatrice de la Lune et du Soleil, dont nous considérerons séparément les effets.

---

[1] Le cas général où θ n'est pas très petit pourrait être abordé par la méthode que nous avons suivie dans le cas d'un champ de pesanteur constant.

Assimilons la Terre à un corps de révolution de moments d'inertie principaux A et C. Désignons par Ω la distance polaire géocentrique de la Lune, par L sa masse (celle de la Terre étant prise pour unité), par D sa distance au centre de la Terre.

Le couple perturbateur a pour moment, cela est bien connu,

$$\frac{3L(C-A)}{D^3}\cos\Omega\sin\Omega,$$

et le vecteur $O\mu$ qui représente ce moment par rapport au centre de gravité O de la Terre est toujours *dans le plan de l'équateur* et perpendiculaire au plan méridien de la Lune. C'est ce vecteur moment qui donne, à chaque instant, la vitesse de l'extrémité G de la flèche OG représentant le moment cinétique; comme on peut, ici, confondre en direction la flèche OG avec l'axe d'inertie Oz, on en déduit le mouvement du pôle terrestre sur la sphère céleste.

Le vecteur moment, nous venons de le dire, est toujours *dans le plan de l'équateur*, et sa direction et sa grandeur sont *fonctions périodiques du temps*. Or on sait que, quand un vecteur tourne dans un plan en ayant sa grandeur et sa direction fonctions périodiques du temps, on peut toujours le considérer comme la résultante d'une série de vecteurs *constants en grandeur* et tournant *uniformément* dans ce plan. A ces vecteurs tournants, il convient d'ajouter un vecteur fixe représentant, en quelque sorte, la moyenne du vecteur ainsi décomposé.

Dans le cas actuel, le vecteur fixe produira les perturbations *séculaires*, les vecteurs tournants produiront les perturbations *périodiques*.

Chacune de ces perturbations périodiques pourra être étudiée indépendamment des autres : ayant pour vitesse un vecteur de grandeur constante qui tourne uniformément, elle consiste évidemment en un petit mouvement circulaire du pôle autour de sa position moyenne ([1]). Nous ne nous arrêterons pas à ces perturbations périodiques.

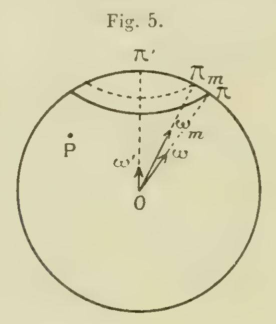
Nous parlerons plutôt des perturbations séculaires, qui sont de

([1]) Il arrivera d'ailleurs que deux mouvements circulaires de sens inverse et de même période se composeront en un mouvement elliptique ayant cette période.

beaucoup les plus importantes puisque leurs effets se cumulent. Ces perturbations séculaires sont dues, nous l'avons dit, au vecteur *fixe* qui représente la moyenne du moment perturbateur. Ce vecteur fixe moyen se trouve être parallèle à la ligne des nœuds, intersection de l'équateur avec le plan de l'orbite lunaire. La vitesse de déplacement séculaire du pôle terrestre P est donc constamment parallèle au plan de l'orbite lunaire. Si donc nous considérions l'orbite lunaire comme fixe, nous verrions le pôle terrestre P décrire sur la sphère céleste un cercle précessionnel avec une vitesse angulaire constante ω autour du pôle π de l'orbite lunaire.

Telle est la perturbation séculaire due à la Lune. Mais il y en a

Fig. 5.



aussi une due au Soleil : elle consiste en un pareil mouvement circulaire précessionnel du pôle terrestre P autour du pôle de l'écliptique π'.

Pour avoir le mouvement séculaire complet du pôle terrestre P, il nous faut composer ces deux précessions lunaire et solaire (*fig.* 5). La précession lunaire consiste en une rotation ω autour de $O\pi$. La précession solaire consiste en une rotation ω' autour de $O\pi'$. Ces deux rotations se composent en une seule ω_m autour d'un axe moyen $O\pi_m$ (¹).

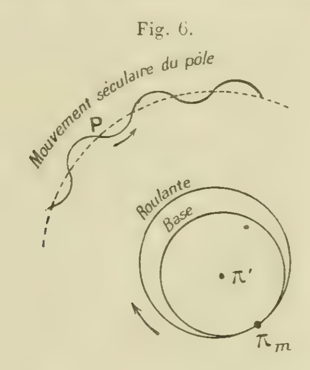
Si les points $\pi\pi'$ étaient fixes, nous verrions le point P décrire un petit cercle autour de π_m comme pôle. Or le pôle π' de l'écliptique peut bien être regardé comme fixe, mais il n'en est pas de

(¹) Comme il se trouve que ω est à peu près deux fois plus grand que ω', le point π_m est plus rapproché de π que de π'.

même du pôle π de l'orbite lunaire. Un mouvement connu sous le nom de « rétrogradation des nœuds » lui fait décrire autour du point π' un petit cercle de 5° de rayon en une période de 18 ans et demi environ. Le point π_m, par suite, tourne aussi autour de π' dans le même temps.

Le mouvement séculaire complet du pôle terrestre P est donc un mouvement épicycloïdal résultant d'une rotation autour du « pôle instantané » π_m qui tourne lui-même autour du point fixe π'. Nous plaçant à un point de vue classique en Cinématique, nous pouvons obtenir ce mouvement épicycloïdal en faisant rouler une *courbe-roulante* invariablement liée au point mobile P sur une *courbe-base* fixe (*fig.* 6). Le rôle de courbe-base est, ici, joué par

Fig. 6.



le petit cercle lieu du pôle instantané π_m; celui de courbe-roulante par un petit cercle dont le rayon, on le voit facilement, est à peine différent. La roulante roule donc sur la base, qui a un rayon à peine inférieur, en la tangentant intérieurement, le point de contact π_m faisant un tour en 18 ans et demi ([1]).

Nous verrons alors le pôle terrestre P décrire, en gros, un petit cercle autour de π' : il le parcourra, dans le sens rétrograde, en 26000 ans environ : c'est la *précession des équinoxes*. Ce petit cercle précessionnel a un rayon de 23°28′ (inclinaison de l'écliptique). Il est festonné par des ondulations dues à ce que le point π_m tourne autour de π' : ces ondulations dont la période (18 ans et demi) est celle de la rétrogradation des nœuds, et dont l'ampli-

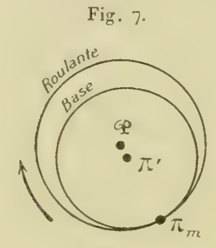
([1]) En toute rigueur, la courbe-roulante ni la courbe-base ne sont des circonférences, car ω_m n'est pas tout à fait constant, pas plus que la distance $\pi'\pi$.

tude est de 18′ environ en latitude, constituent la *nutation de Bradley*.

19. Tel est le mouvement séculaire de l'axe terrestre sous l'influence perturbatrice de la Lune et du Soleil. Cherchons à étudier, de la même manière, le mouvement séculaire de l'axe lunaire sous l'influence perturbatrice de la Terre et du Soleil. Il semble, à première vue, qu'il suffira de permuter le rôle de la Lune et celui de la Terre, et qu'ainsi nous devrions trouver, pour le pôle lunaire, un mouvement sur la sphère céleste analogue, au moins qualitativement, à celui du pôle terrestre. Mais nous allons voir que, dans le cas de la Lune, une circonstance très spéciale rend le mouvement du pôle fort différent.

Soit $\mathfrak{P}$ la position du pôle lunaire sur la sphère céleste. Envisa-

Fig. 7.



geons séparément la perturbation séculaire due à la Terre, et celle, incomparablement plus petite, due au Soleil. Nous pouvons refaire une figure analogue à la figure 5. L'effet précessionnel dû à la Terre consistera en une rotation du pôle $\mathfrak{P}$ autour de $O\pi$ ([1]). L'effet précessionnel dû au Soleil consistera en une rotation du pôle $\mathfrak{P}$ autour de $O\pi'$. Ces deux rotations se composeront encore en une seule autour d'un axe moyen $O\pi_m$; et d'ailleurs, comme la rotation autour de $O\pi$ est incomparablement plus grande que la rotation autour de $O\pi'$, le point π_m sera, cette fois, presque confondu avec le point π.

Nous pourrons encore faire une autre figure analogue à la figure 6, où nous représenterons une circonférence-base (lieu du

---

([1]) Le point π est, en effet, le pôle de l'orbite que la Terre décrit dans son mouvement relatif autour de la Lune.

nouveau point π_m sur la sphère céleste), sur laquelle roulera une nouvelle circonférence-roulante invariablement liée au point $\mathfrak{L}$, qu'elle entraîne dans son mouvement (*fig.* 7). La circonstance très curieuse qui se présente dans le cas de la Lune est que *le pôle* $\mathfrak{L}$ *coïncide avec le centre de la roulante.* Cette coïncidence remarquable permet d'expliquer immédiatement le mouvement du pôle lunaire.

Le pôle lunaire $\mathfrak{L}$ décrit, autour du pôle de l'écliptique π, un petit cercle en 18 ans et demi. Il est toujours sur le même grand cercle que π et π', à distance constante (1 degré et demi environ) de π'.

Ce sont les lois de la *libration* de la Lune, bien connues des astronomes sous le nom de « lois de Cassini ».

20. *Libration en rotation.* — Le cas de la Lune présente encore une autre circonstance, que nous avons négligée jusqu'à présent, et dont nous devons maintenant dire un mot. Dans les lignes précédentes, nous avons traité la Lune comme un corps *de révolution.* Il en résultait que le moment $O\mu$ du couple dû à l'astre perturbateur (Terre) était dans le plan de *l'équateur lunaire*, ainsi que nous l'avons dit. Ce vecteur $O\mu$ représentant la vitesse de l'extrémité G du moment cinétique (pratiquement dirigé suivant l'axe de révolution), il n'en résultait, pour le moment cinétique OG, aucune variation *en grandeur*, $O\mu$ étant perpendiculaire à OG. Comme OG mesure (à très peu près) le produit Cr du moment d'inertie principal par la rotation propre, nous pouvions dire que la vitesse angulaire de rotation propre r autour de l'axe de révolution restait *constante* en grandeur, tandis que cet axe de révolution décrivait le mouvement de précession indiqué ci-dessus.

Tenons maintenant compte de ce que la Lune n'est pas rigoureusement de révolution autour de son petit axe d'inertie.

Nous allons voir qu'alors le moment $O\mu$ du couple perturbateur n'est plus purement équatorial ; il va avoir une petite composante suivant la ligne des pôles, d'où résultera, cette fois, pour le vecteur OG (par suite pour la rotation propre r) une petite variation *en grandeur* : c'est en cela que consiste la « libration en rotation ».

La Lune est, comme on sait, légèrement allongée vers la Terre à laquelle elle tourne toujours la même face, sa vitesse angulaire

de rotation propre r étant constamment égale *en moyenne* à sa vitesse angulaire de révolution autour de la Terre. Supposons d'abord cette dernière vitesse angulaire constante, c'est-à-dire faisons abstraction de ses variations (dont nous parlerons un peu plus loin) provenant de l'excentricité de l'orbite lunaire et de l'influence perturbatrice du Soleil. Les deux vitesses angulaires n'étant égales qu'*en moyenne*, supposons qu'à l'instant considéré la rotation propre soit légèrement plus rapide, par exemple, que la révolution. Un observateur lunaire qui prendrait pour trièdre référence $Oxyz$ celui formé par les trois axes principaux d'inertie de la Lune, verrait la Terre (initialement dans la direction Ox du plus grand axe) s'éloigner peu à peu vers la droite du plan xOz. D'où un moment $O\mu$ dirigé suivant Oz, croissant de plus en plus en valeur absolue, et donnant au point G extrémité du moment cinétique une vitesse vers le point O : la vitesse de rotation propre r va donc diminuer jusqu'à devenir égale puis inférieure à la vitesse angulaire de révolution. A partir de ce moment le phénomène inverse se produira, et l'on devra voir l'axe allongé de la Lune animé d'un balancement de part et d'autre d'une direction moyenne dirigée vers la Terre. La période d'un tel balancement est très longue (les deux moments d'inertie A et B étant très voisins), et son amplitude doit dépendre des « conditions initiales » du mouvement. Or, l'observation ne donne aucune trace d'un pareil balancement à longue période, preuve que l'influence des conditions initiales est depuis longtemps annulée par des causes étrangères (frottements des marées internes, etc.).

La vitesse angulaire de révolution de la Lune autour de la Terre, que nous avons supposée constante, ne l'est pas rigoureusement. Tenons maintenant compte de ses variations : une inégalité appelée *équation annuelle* la fait varier, dans le cours d'une année, d'une révolution à l'autre, les lunaisons d'été étant plus rapides que les lunaisons d'hiver. L'observateur lunaire, dont nous parlions tout à l'heure, verra donc, de ce chef, la Terre se déplacer vers sa droite en hiver, vers sa gauche en été : la Terre sera alternativement à gauche et à droite du plan xOz. D'où pour le moment $O\mu$ une composante alternative de direction Oz, donnant effectivement à la rotation propre r une petite variation de période annuelle (libration en rotation annuelle).

Enfin, tenons compte de l'excentricité de l'orbite lunaire (dont nous avons jusqu'ici fait abstraction), nous devrons considérer que, dans le cours même d'une révolution, la vitesse angulaire de la Lune autour de la Terre varie de part et d'autre de sa valeur moyenne (équation du centre). L'observateur lunaire verra donc, de ce chef, la Terre animée d'un mouvement alternatif de gauche à droite et de droite à gauche du plan xOz, ayant pour période une révolution ([1]). D'où pour le moment $O\mu$ une composante alternative mensuelle de direction Oz, donnant une petite « libration en rotation » de même période.

Il est à remarquer que l'équation annuelle est, pour le mouvement angulaire de révolution de la Lune, une inégalité beaucoup plus petite que l'équation du centre. Pourtant la libration en rotation mensuelle donne un effet beaucoup moins sensible que la libration en rotation annuelle : cela tient à ce que l'équation annuelle, qui cause cette dernière, a une période beaucoup plus longue (environ 13 fois) que l'équation du centre ([2]).

21. *Mouvements précessionnels des projectiles.* — Les projectiles oblongs lancés par les armes rayées, obus ou balles de fusils, sont animés à leur départ d'un vif mouvement de rotation autour de leur axe de révolution; cela leur assure une certaine tendance à rester couchés sur la trajectoire, l'angle que fait l'axe avec la tangente à la trajectoire restant toujours petit; en même temps il se produit un écart, connu sous le nom de *dérivation*, perpendiculairement à la direction du tir.

On s'accorde à voir la cause principale de ces phénomènes dans les effets gyroscopiques produits par la résistance de l'air au mouvement de translation du projectile assimilé lui-même à un gyroscope. A vrai dire, on fait, sur le couple de renversement dû à la résistance de l'air, précisément les hypothèses nécessaires pour

([1]) Il en résulte qu'un observateur terrestre ne verra pas toujours l'axe le plus allongé de la Lune rigoureusement dirigé vers le centre de la Terre. Il semblera animé d'un balancement mensuel autour de cette direction. Ce phénomène (complètement indépendant des petites variations de la rotation propre r) constitue la libration *apparente* ou *optique* : c'est surtout à elle que nous devons de connaître de la surface de la Lune un peu plus que 180° en longitude.

([2]) On conçoit que les autres inégalités du mouvement de révolution de la Lune (évection, variation) qui sont à la fois petites et à courte période, ne produisent, pour la libration en rotation, que des effets absolument insensibles.

expliquer les effets observés : mais ces hypothèses n'ont rien que de très naturel et paraissent tout à fait conformes à la réalité.

Dans son mouvement autour de son centre de gravité, l'obus est supposé soumis à un couple de renversement, qui est fonction croissante de sa vitesse de translation V, fonction aussi de l'angle ω que fait son axe longitudinal avec la tangente à la trajectoire; d'ailleurs ce couple s'annule avec $\sin\omega$; donc pour les *petites* valeurs de ω on peut le supposer proportionnel à $\sin\omega$ et le représenter par

$$F(V)\sin\omega,$$

$F(V)$ étant une fonction croissante de la vitesse de translation V (bien déterminée pour un projectile donné, mais pouvant varier d'un projectile à l'autre).

Comme l'obus tourne très rapidement autour de son axe de révolution (ou autour d'un axe très voisin de cet axe de révolution), il est à chaque instant, dans son mouvement autour du centre de gravité, assimilable à un gyroscope soumis à un couple de renversement $F(V)\sin\omega$ (au lieu du couple $Pl\sin\omega$ qui, pour le gyroscope ordinaire, était dû à la pesanteur). Seulement, ici, la direction de la verticale fictive (qui est la tangente à la trajectoire) est *variable avec le temps*, et il en est de même de l'intensité de la pesanteur fictive qui est $\left[\frac{gF(V)}{Pl}\right]$ produisant le couple de renversement.

Nous sommes donc bien dans le cas signalé au n° 17 d'un « couple perturbateur dépendant explicitement du temps ». Comme d'ailleurs le moment cinétique OG, autour du centre de gravité O, est toujours pratiquement confondu en direction avec l'axe de révolution, on peut traiter le problème par la méthode élémentaire basée sur le théorème des moments cinétiques, que nous venons d'employer pour l'étude des mouvements précessionnels des corps célestes. C'est ce que j'ai fait dans un précédent travail [1], en supposant le projectile *rigoureusement de révolution* aux points de vue géométrique et mécanique. Je ne reviendrai pas ici sur les mouvements précessionnels qui se produisent alors et qui sont bien connus.

---

[1] H. VERGNE, *Théorie élémentaire du mouvement de précession ou de dérivation des projectiles* (*Bulletin des Sc. math.*, 2e série, t. XLII, avril-mai 1918).

Je désire seulement examiner les conséquences qu'auraient, pour le mouvement précessionnel de l'obus, de légers défauts de révolution et de centrage du centre de gravité.

Tout d'abord, si le centre de gravité ne se trouve pas rigoureusement sur l'axe longitudinal du projectile, sa trajectoire à l'intérieur de l'âme de la bouche à feu ne sera pas l'axe rectiligne lui-même de cette âme, mais une hélice *très allongée* s'enroulant autour de cette droite (par suite de la rayure de l'âme) : le premier élément de la trajectoire du centre de gravité hors du canon ne sera pas tangent à l'axe de ce canon. Si donc ce défaut de centrage n'était pas très petit, il en résulterait de graves écarts, soit en portée, soit en direction.

Voyons maintenant l'effet d'un léger défaut de révolution. Bien entendu, la forme extérieure du projectile sera toujours presque rigoureusement de révolution, au point de vue géométrique, puisque le projectile doit se mouvoir dans l'âme du canon. Il ne peut s'agir que de légers défauts de révolution au point de vue mécanique : par exemple, l'ellipsoïde d'inertie relatif au centre de gravité n'est pas rigoureusement de révolution, ou bien encore son plus grand axe ne coïncide pas rigoureusement avec l'axe longitudinal du projectile. L'étude que nous avons faite un peu plus haut (nº 16) du mouvement d'un gyroscope ordinaire présentant de légers défauts de révolution nous permet de dire que ces défauts, s'ils sont faibles, n'influeront pour ainsi dire pas sur le mouvement précessionnel du projectile, qui restera le même que pour un projectile parfaitement de révolution. Il est vrai que le mouvement nutationnel pourra bien être un peu plus grand, si l'axe de l'ellipsoïde et l'axe longitudinal du projectile ne coïncident pas rigoureusement. Mais comme c'est la précession seule, et non la nutation qui influe sur la portée et la dérivation, on voit que de petits défauts de révolution du projectile n'influeront pratiquement pas sur le tir.

Il n'en faut certes pas conclure que la perfection de révolution des obus ne soit pas très désirable, car il est très vraisemblable que les défauts ne sont pas sans influence sur la détérioration de la bouche à feu, en particulier sur l'usure des rayures.

LE PROBLÈME DE DIRICHLET ET LE POTENTIEL DE SIMPLE COUCHE;

PAR M. GASTON BERTRAND.

1. *Exposé de la question.* — On résout habituellement le problème de Dirichlet à l'aide d'un potentiel de *double couche*, dont la densité est déterminée par une équation intégrale de deuxième espèce.

Si l'on se sert du potentiel de *simple couche*, on est conduit à une équation de première espèce, que M. E. Picard a étudiée à l'aide du théorème fondamental qui porte son nom [1].

Mais cette dernière équation peut être résolue par un procédé tout différent. En effet, une simple différentiation la transforme en une équation de première espèce à *intégrale principale au sens de Cauchy*. Dès lors, elle se ramène immédiatement à une équation de deuxième espèce [2].

C'est cette équation que nous nous proposons de former dans le cas de l'espace à deux dimensions.

2. *Le problème de Dirichlet et le potentiel de simple couche.* — Soit un domaine simplement connexe $\mathfrak{D}$, limité par une courbe C ayant pour équations $x = x(s)$, $y = y(s)$, s étant l'abscisse curviligne. Cherchons une fonction $V(x, y)$, harmonique dans $\mathfrak{D}$ et prenant sur sa frontière C une succession continue de valeurs données à l'avance $f(s)$.

Essayons de résoudre le problème par le potentiel logarithmique d'une simple couche, de densité inconnue $\rho(s)$, répandue sur la

(1) E. PICARD, *Sur un théorème général relatif aux équations intégrales de première espèce et sur quelques problèmes de Physique mathématique* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XXIX, 1910).

(2) G. BERTRAND, *Equations de Fredholm à intégrales principales au sens de Cauchy* (*Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences*, t. 172, 1er semestre 1921, p. 1458-1461).

FRANCESCO TRICOMI, *Su di un'equazione integrale di prima specie* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. XLVI, 1922, p. 357-388).

courbe C; autrement dit, posons

$$V(x, y) = \int_C \log\frac{1}{r}\,\rho(s')\,ds',$$

$$r^2 = [x - x(s')]^2 + [y - y(s')]^2.$$

Cette fonction V étant harmonique, il suffit d'exprimer qu'elle satisfait à la condition au bord, ce qui donne

$$(1)\qquad f(s) = \int_C \log\frac{1}{r}\,\rho(s')\,ds',$$

avec

$$(2)\qquad r^2 = r^2(s, s') = [x(s) - x(s')]^2 + [y(s) - y(s')]^2.$$

Telle est l'équation intégrale de première espèce qui a été étudiée par M. Picard.

3. *Équation singulière du problème.* — Je différentie par rapport à s les deux membres de l'équation (1). Pour éviter le point singulier $s' = s$ je partage l'intégrale en trois parties :

$$(3)\quad f(s) = \int_0^{s-\varepsilon} \log\frac{1}{r}\,\rho(s')\,ds' + \int_{s+\varepsilon}^{l} \log\frac{1}{r}\,\rho(s')\,ds' + \int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \log\frac{1}{r}\,\rho(s')\,ds',$$

l désignant la longueur de la courbe C.

On a évidemment

$$\frac{d}{ds}\log\frac{1}{r} = \frac{[x(s') - x(s)]\,x'(s) + [y(s') - y(s)]\,y'(s)}{r^2} = \frac{\cos \mathrm{TMM'}}{r} = \frac{\cos\chi}{r},$$

en appelant $\chi = \mathrm{TMM'}$ l'angle formé par la demi-tangente aux arcs croissants en M et le vecteur MM′ qui joint le point s au point s'. Cela permet d'écrire

$$(4)\qquad f'(s) = \int_0^{s-\varepsilon} \frac{\cos\chi}{r}\,\rho(s')\,ds' + \int_{s+\varepsilon}^{l} \frac{\cos\chi}{r}\,\rho(s')\,ds'$$
$$+ \rho(s-\varepsilon)\log\frac{1}{r(s, s-\varepsilon)} - \rho(s+\varepsilon)\log\frac{1}{r(s, s+\varepsilon)}$$
$$+ \frac{d}{ds}\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \log\frac{1}{r}\,\rho(s')\,ds'.$$

Tout d'abord quand ε tend vers zéro, la somme des deux premières intégrales a pour limite *la valeur principale au sens de Cauchy* de l'intégrale singulière

$$\int_0^l \frac{\cos\chi}{r}\rho(s')\,ds'.$$

On la désignera dans ce qui suit à l'aide d'un *signe somme accentué*

$$\int_0^{'l} \frac{\cos\chi}{r}\rho(s')\,ds' = \lim_{\varepsilon=0}\left[\int_0^{s-\varepsilon}\frac{\cos\chi}{r}\rho(s')\,ds' + \int_{s+\varepsilon}^{l}\frac{\cos\chi}{r}\rho(s')\,ds'\right].$$

Quant à la seconde ligne de (4) elle peut s'écrire

$$\frac{1}{2}\rho(s+\varepsilon)\log r^2(s, s-\varepsilon) - \frac{1}{2}\rho(s-\varepsilon)\log r^2(s, s-\varepsilon).$$

Or d'après une formule bien connue

$$r^2(s, s+h) = h^2 - \frac{h^4}{12\,R^2} + \frac{h^5}{12\,R^3}\frac{dR}{ds} + \ldots,$$

R étant le rayon de courbure au point s. D'où

$$\log r^2(s, s+h) = \log h^2\left(1 - \frac{h^2}{12\,R^2} + A\,h^3\right) = \log h^2 - \frac{h^2}{12\,R^2}(1 + B\,h).$$

On a ainsi pour la somme des deux termes en question

$$\frac{1}{2}[\rho(s+\varepsilon) - \rho(s-\varepsilon)]\log\varepsilon^2$$
$$+ \frac{1}{24\,R^2}\varepsilon^2(1 - B\varepsilon)\rho(s+\varepsilon) - \frac{1}{24\,R^2}\varepsilon^2(1 + B'\varepsilon)\rho(s-\varepsilon).$$

Pour que cette expression tende vers zéro avec ε, *il suffit* que le rayon de courbure R reste supérieur à un nombre fixe et soit dérivable, et aussi que la densité $\rho(s)$ satisfasse à une condition de continuité analogue à celle de Lipschitz.

Reste enfin le terme

$$T = \frac{d}{ds}\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}\log\frac{1}{r}\rho(s')\,ds' = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon}\log r^2\rho(s')\,ds'.$$

Dans cette intégrale, s' est voisin de s, on peut donc poser

$$h = s' - s,$$

ce qui donne

$$\log r^2 = \log(s' - s)^2 - \frac{(s' - s)^2}{12\,R^2(s)}\left[1 + (s' - s)\,B(s)\right]$$

et par conséquent

$$T = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \rho(s')\log(s' - s)^2\,ds'$$

$$+ \frac{1}{24}\frac{d}{ds}\int_{s-\varepsilon}^{s+\varepsilon} \frac{1 + (s' - s)B(s)}{R^2(s)}(s' - s)^2\rho(s')\,ds'.$$

Sous les conditions ci-dessus, le second terme tend bien vers zéro avec ε. Pour étudier le premier, je pose

$$s' = s + h,$$

il devient

$$J = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \log h^2 \rho(s + h)\,dh,$$

c'est-à-dire

$$J = -\frac{1}{2}\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \log h^2 \rho'(s + h)\,dh.$$

Cette opération est légitime, si la dérivée ρ' reste finie, ou ne devient infinie en certains points que d'un ordre inférieur à l'unité. Et l'on a alors

$$\lim_{\varepsilon = 0} J = 0.$$

Je reviens maintenant à l'équation (4). Dans les deux membres je fais tendre ε vers zéro. J'obtiens ainsi la formule cherchée. Étant donnés le potentiel de simple couche et sa valeur sur la courbe C

$$(1) \qquad f(s) = \int_c \log\frac{1}{r}\,\rho(s')\,ds',$$

on a pour sa *dérivée tangentielle* l'expression

$$(1') \qquad f'(s) = \int_c \frac{\cos\chi}{r}\,\rho(s')\,ds'.$$

4. *Théorème sur les intégrales principales.* — Je me propose de démontrer le théorème suivant :

Théorème. – Soit $M(x, y)$ un noyau admettant la période l par rapport à chacune des variables x et y, et qui considéré comme fonction de y n'admet comme singularité que le pôle simple $y = x$ de résidu 1 ; autrement dit tel que l'on ait

$$M(x, y) = \frac{1}{y - x} + M_1(x, y),$$

$M_1(x, y)$ ayant des *dérivées premières*.

Soient $N(x, y)$ un second noyau analogue et $f(x)$ une fonction périodique *dérivable ;* on a la formule fondamentale

$$(5)\qquad \int_0^l M(x, y)\,dy \int_0^l N(y, z) f(z)\,dz$$
$$= -\pi^2 f(x) + \int_0^l f(z)\,dz \int_0^l M(x, y) N(y, z)\,dy.$$

C'est la formule d'interversion de l'ordre des intégrations dans une intégrale double avec valeurs principales.

Pour alléger l'écriture je choisis l'unité de longueur de manière que la période l soit égale à 2π.

I. *Formules auxiliaires*, — On trouve facilement en appliquant la définition des valeurs principales

$$(6)\qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cot\frac{y - x}{2}\,dy = 0,$$

$$(7)\qquad \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cot\frac{y - x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cot\frac{z - y}{2}\,dy = \frac{\pi}{2}\cdot$$

D'autre part la théorie du potentiel fournit les intéressantes for-

mules suivantes [1] :

$$\int_0^{2\pi} \sin ny \log \left| \sin \frac{y-x}{2} \right| dy = -\frac{\pi}{n} \sin nx,$$

$$\int_0^{2\pi} \cos ny \log \left| \sin \frac{y-x}{2} \right| dy = -\frac{\pi}{n} \cos nx,$$

on en déduit en différentiant par rapport à x

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cot \frac{y-x}{2} \sin ny\, dy = \quad \pi \cos nx,$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cot \frac{y-x}{2} \cos ny\, dy = -\pi \sin nx.$$

Ces deux formules sont d'ailleurs aisées à établir directement. On en tire

$$(8) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cot \frac{y-x}{2}\, dy \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cot \frac{z-y}{2} \sin nz\, dz = -\pi^2 \sin nx, \\ \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cot \frac{y-x}{2}\, dy \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cot \frac{z-y}{2} \cos nz\, dz = -\pi^2 \cos nx. \end{cases}$$

II. *Application à $f(x)$.* — $f(x)$ étant dérivable est développable en série trigonométrique

$$f(x) = a_0 + \Sigma\, a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Je considère

$$\mathrm{I} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cot \frac{y-x}{2}\, dy \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cot \frac{z-y}{2} f(z)\, dz$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cot \frac{y-x}{2}\, dy \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cot \frac{z-y}{2} [a_0 + \Sigma\, a_n \cos nz + b_n \sin nz]\, dz.$$

J'intègre terme à terme en appliquant les formules (6) et (8). Le terme a_0 disparaît et il reste

$$\mathrm{I} = -\pi^2 \Sigma\, a_n \cos nx + b_n \sin nx,$$

c'est-à-dire

$$\mathrm{I} = -\pi^2 f(x) + \pi^2 a_0.$$

---

[1] E. Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, t. III, 3e édition, 1923, p. 238.

D'un autre côté, j'envisage l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} f(z)\,dz \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cot\frac{y-x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cot\frac{z-y}{2}\,dy.$$

D'après la formule (7) elle peut s'écrire

$$\frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi} f(z)\,dz = \frac{\pi}{2}\int_0^{2\pi}[a_0 + \Sigma a_n \cos n z + b_n \sin n z]\,dz = \pi^2 a_0.$$

D'où, en rassemblant tous ces résultats, la formule

$$(9)\quad \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cot\frac{y-x}{2}\,dy \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cot\frac{z-y}{2} f(z)\,dz$$
$$= \pi^2 f(x) + \int_0^{2\pi} f(z)\,dz \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\cot\frac{y-x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cot\frac{z-y}{2}\,dy.$$

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LEVI-CIVITA (Tullio) e AMALDI (Ugo). — Lezioni di Meccanica razionale. Vol. I : *Cinematica. Principi e Statica* (Leçons de Mécanique rationnelle. Vol. I : *Cinématique. Principes et Statique*). Un volume in-8° de XVI-744 pages. Bologne, Nicola Zanichelli, 1923. Prix : 65 lires.

Les Leçons de Mécanique rationnelle des deux savants géomètres italiens comporteront deux volumes. Le premier qui vient de paraître, est consacré à la Cinématique, aux principes de la Mécanique et à la Statique; le second volume sera consacré à la Dynamique du point et des systèmes holonomes, ainsi qu'à la Mécanique des milieux continus.

Les auteurs, qui ont enseigné l'un et l'autre la Mécanique rationnelle, ont tenu à conserver à leur ouvrage un caractère élémentaire, sans perdre de vue les multiples exigences de tous ceux qui ont besoin de connaissances mécaniques précises : physiciens, astronomes, géodésiens, ingénieurs; tous y trouveront les notions fondamentales clairement exposées et illustrées par des applications simples et toujours concrètes. L'appareil analytique y est réduit au minimum et le lecteur n'y rencontrera aucun des problèmes, d'intérêt purement mathématique, qui se sont parfois glissés dans les cours de Mécanique.

Le premier volume est divisé en seize Chapitres. Le premier est consacré à la Théorie des vecteurs, les cinq suivants à la Cinématique du point et du solide, le septième aux notions fondamentales et aux axiomes de la Mécanique, le huitième aux notions mécaniques dérivées, aux dimensions et à la similitude, le neuvième à la Statique du point, le dixième à la Géométrie des masses, le onzième aux éléments de la théorie du potentiel newtonien, le douzième aux principes de la Statique des systèmes, le treizième à la Statique des solides, le quatorzième à la Statique des systèmes déformables, le quinzième au principe des vitesses virtuelles et le dernier à l'équilibre relatif. Des énoncés d'exercices, toujours de nature concrète, suivent chaque Chapitre.

Les développements accordés aux différentes théories traitées

dans ce volume correspondent à peu près au programme de notre certificat de Mécanique rationnelle, avec quelques compléments de Mécanique appliquée. Le Chapitre consacré au mouvement d'une figure plane de forme invariable dans son plan contient la formule de Savary et ses applications, ainsi que les éléments de la méthode épicycloïdale pour la recherche des profils conjugués, et des notions sommaires sur les engrenages. Le Chapitre XI ne fait qu'aborder l'étude des propriétés du potentiel de volume (existence et continuité des dérivées premières), réservant au volume II de l'ouvrage l'étude des dérivées secondes et la théorie des potentiels de simple et de double couche; mais il contient l'étude directe du potentiel d'une couche homogène limitée par deux sphères concentriques ou deux ellipsoïdes concentriques et homothétiques (le point où l'on prend le potentiel étant, dans ce dernier cas, à l'intérieur de la couche). La Statique du solide est d'abord étudiée par la méthode classique élémentaire, puis rattachée au principe des vitesses virtuelles. Le Chapitre consacré aux systèmes déformables contient un paragraphe sur l'équilibre des verges (élastique plane). Le dernier Chapitre (équilibre relatif) renferme des applications détaillées de Mécanique appliquée (rotation de régime d'un arbre horizontal, résistance éprouvée par une voiture animée d'un mouvement uniforme sur sol horizontal, transmission par courroies, etc.); le problème de l'équilibre à la surface terrestre est étudié en négligeant, dans une première approximation, l'influence du mouvement de translation de la Terre.

Nous achèverons de donner une idée de l'ouvrage en ajoutant que les démonstrations sont toujours élégantes et comportent le minimum de calculs. Les auteurs utilisent les notations vectorielles les plus élémentaires (produit scalaire et produit vectoriel de deux vecteurs); on ne voit du reste pas pourquoi, dans ces limites restreintes, elles ne seraient pas adoptées dans l'enseignement en France.

Il ne nous reste qu'à souhaiter la prochaine publication du second volume de cet ouvrage appelé à rendre de grands services à tous ceux qui, sans développements mathématiques superflus, désirent s'initier aux théories fondamentales de la Mécanique.

E. CARTAN.

DISCOURS SUR MARC SEGUIN, PRONONCÉ A ANNONAY LE 10 JUILLET 1923;

Par M. Émile PICARD.

L'Académie des Sciences ne pouvait manquer de s'associer à la commémoration du savant éminent et du grand ingénieur, que la ville d'Annonay fête aujourd'hui. Ce fut une figure singulièrement originale que celle de Marc Seguin. La profondeur de ses conceptions théoriques lui assure un rang élevé parmi les mécaniciens, et il fut en même temps un homme d'action et un réalisateur puissant.

Marc Seguin témoigna de bonne heure de cet esprit d'observation, qui devait lui être si utile pendant toute sa carrière. Venu à Paris dès l'âge de treize ans, il y travailla sous la direction de son oncle Montgolfier. Esprit très pénétrant et s'écartant volontiers des voies battues, Joseph Montgolfier eut une grande influence sur la formation intellectuelle de son neveu, en qui il reconnut vite une nature analogue à la sienne. Seguin ne manqua jamais par la suite de dire toute sa reconnaissance pour celui qui lui avait donné le goût de la science et de ses applications.

Joseph Montgolfier et son frère Étienne, qui s'illustrèrent par leur invention de la machine aérostatique, appartenaient à une famille vouée depuis des siècles à l'art de la fabrication du papier. Marc Seguin commença par suivre la tradition familiale, et fit progresser l'industrie à laquelle les siens étaient attachés, en introduisant à Annonay une industrie nouvelle, celle des draps et feutres destinés à la fabrication du papier. Mais son esprit inventif poursuivait en même temps d'autres recherches. Son nom reste attaché à la première introduction en France des ponts suspendus, où des câbles en fil de fer remplaçaient avec grand avantage les barres et les chaînes métalliques employées jusqu'alors. L'Amérique et l'Angleterre nous avaient précédés dans la construction de ces ponts, mais Seguin fit une étude théorique et expérimentale de la question, qui lui permit d'opérer d'une manière moins empirique. En 1824, il obtint avec son frère l'autorisation de construire

un pont en fils de fer sur le Rhône entre Tain et Tournon; ce fut la premier pont de ce genre jeté en France sur un grand fleuve. La simplicité, l'élégance et le bas prix de ces constructions les recommandèrent vite à la faveur publique, malgré quelques accidents amenés par des constructions défectueuses. Entre beaucoup d'autres, le pont de Brooklyn à New-York, accessible aux voitures de toute nature et aux trains de chemin de fer, dit assez le parti que l'on peut tirer de ces ouvrages économiques, et d'un entretien facile pouvant être effectué, sans interrompre la circulation, quand ils ont été rationnellement construits. Il est peut-être permis de regretter que ce mode de constructions ne soit pas plus usité en France, alors que d'autres pays continuent à construire de grands ponts suspendus, dont ils sont justement fiers.

Les difficultés rencontrées par Seguin dans l'établissement d'un service de bateaux à vapeur entre Valence et Lyon, par suite de l'insuffisance des machines qu'il avait fait venir d'Angleterre, l'amenèrent à réfléchir sur les conditions dans lesquelles fonctionnaient les chaudières. Ce fut là l'origine d'une de ses plus importantes découvertes. Il se préoccupa d'accroître la quantité de vapeur fournie par la chaudière, sans accroître beaucoup son poids, en augmentant la surface de contact entre l'eau à échauffer et les gaz du foyer. Dans ce but, Philippe de Girard, l'inventeur de la machine à filer le lin, avait déjà cherché à introduire des tubes dans les chaudières, mais il faisait passer l'eau dans les tubes, et obtenait des résultats peu satisfaisants. Seguin au contraire fait circuler l'eau autour de nombreux tubes métalliques, dans lesquels passe la flamme. La production de la vapeur fut ainsi rendue quatre fois plus grande que dans les machines anglaises alors usitées. En même temps, par l'emploi de deux ventilateurs poussant l'air sous le foyer avec une assez forte pression, un bon tirage put être établi. Ces inventions ne tardèrent pas à transformer les machines à vapeur, et les chaudières tubulaires sont depuis lors devenues d'un universel emploi. Appliquées aux locomotives, elles permirent d'obtenir des vitesses beaucoup plus grandes, et les chemins de fer purent prendre une extension considérable grâce au génie inventif de notre illustre compatriote.

De très bonne heure, Marc Seguin s'était préoccupé de développer

dans une large mesure les moyens de communication, qu'il jugeait indispensables au développement de l'industrie. Maints passages de son grand Ouvrage sur les chemins de fer témoignent d'une foi robuste dans l'action bienfaisante des progrès industriels. « C'est l'industrie, écrit-il en 1839, qui fait naître et qui développe chez les hommes de nouveaux besoins, et qui leur donne en même temps le moyen de les satisfaire. Elle est la vie des peuples civilisés. C'est donc à son développement que doivent tendre tous les talents, toutes les intelligences; c'est autour de ce puissant levier que doivent se réunir les esprits supérieurs qui aspirent à l'honneur de concourir à notre régénération sociale. » Nous ne pouvons que souscrire à la noble pensée qui animait Seguin, quand il écrivait ces lignes, en faisant seulement la réserve que, l'industrie comme la science, est indifférente au mal comme au bien, et que, si elle contribue au bien-être de l'humanité, elle peut aussi concourir, nous n'en avons vu que trop d'exemples, à des buts criminels. Mais l'âme ardente et généreuse de Seguin, surajoutant en quelque sorte un élément moral, était trop haute pour voir dans le développement de l'industrie autre chose que ses fins bienfaisantes. On peut dire alors avec lui que « les changements, s'opérant au profit de la généralité et tendant à vulgariser le bien-être, sont un élément de régénération sociale ».

La construction du chemin de fer de Saint-Étienne à Lyon, sur lequel circulèrent en France les premières locomotives, avait présenté, sur une étendue de cinquante-huit kilomètres, des difficultés considérables, telles que, pont à construire au confluent du Rhône et de la Saône, percement de tunnels dans des roches granitiques ou schisteuses, dont Seguin triompha très heureusement. C'est dans son livre aussi que sont exposés les principes généraux sur le tracé des chemins de fer, qui depuis lors ont servi de guide aux ingénieurs, et l'on reste étonné devant l'habileté avec laquelle il résout certains problèmes que l'on n'avait pas encore osé aborder en Angleterre, pays où avaient été construites les premières voies ferrées. Avec quelle justesse aussi il analyse ce qui concerne la partie financière de cette industrie appelée à un si grand avenir.

En même temps qu'il fut un ingénieur et un technicien hors de pair, Marc Seguin eut le culte de la Science, culte qu'il tenait, comme il aimait à le répéter, de son oncle Montgolfier. On parle

beaucoup aujourd'hui de l'union de la science et de l'industrie; elle fut admirablement réalisée chez notre confrère. Il avait la confiance la plus absolue dans la puissance de la science, et ne voyait pas de limites aux services qu'elle peut rendre à l'humanité. L'inventeur de la chaudière tubulaire s'écriait un jour dans une éloquente préface : « Où sont les bornes devant lesquelles s'arrêtera la puissance humaine.... Quand la force matérielle de l'homme s'est trouvée insuffisante pour accomplir son œuvre et persévérer dans le progrès, quand sa volonté semblait devoir se briser contre d'insurmontables obstacles, voici qu'une goutte d'eau réduite en vapeur est venue suppléer à sa faiblesse, et lui créer une puissance dont on n'a pu encore, dont on ne pourra de longtemps peut-être mesurer l'étendue ». En fait, la goutte d'eau, réduite en vapeur, avait déjà fourni une belle carrière, depuis le temps où Denis Papin faisait connaître *une nouvelle manière pour élever l'eau par la force du feu*. Sur quel ton lyrique, Marc Seguin ne parlerait-il pas aujourd'hui des sources d'énergie, qui ont conduit depuis lors à de nouveaux moyens de communication.

L'étude du fonctionnement des machines à vapeur avait amené Seguin à réfléchir sur la théorie des phénomènes où la chaleur est en jeu. A la fin du XVIIIe siècle, le calorique était généralement regardé comme un agent impondérable, susceptible de passer d'un corps à un autre, ou de rester latent, mais indestructible. Cependant Lavoisier et Laplace, dans leur mémoire de 1780 sur la chaleur, avaient rappelé que, si certains physiciens regardent celle-ci comme un fluide répandu dans toute la nature, d'autres pensent qu'elle n'est que le résultat des mouvements insensibles des molécules de la matière, hypothèse dans laquelle la chaleur serait la force vive correspondant à ces mouvements. Un peu plus tard, Rumford, étudiant la chaleur produite dans le forage des canons, avait émis l'idée qu'elle pouvait être créée ou détruite; mais ces vues étaient bien vagues. Dans ses célèbres *Réflexions sur la puissance motrice du feu*, où apparaît pour la première fois le second principe de la Thermodynamique, Sadi Carnot considérait encore le calorique comme une substance. Que de tâtonnements dans la fondation de la Thermodynamique eussent été évités s'il n'avait pas été enlevé en 1832 par une mort prématurée. Nous savons aujourd'hui que les idées de Carnot sur la chaleur

s'étaient modifiées vers la fin de sa vie, comme en témoignent des notes manuscrites, publiées seulement en 1878, où l'on voit que le grand physicien avait pleinement adopté l'idée de l'équivalence de la chaleur et du travail, donnant même pour l'équivalent mécanique de la calorie un nombre voisin de celui que devait trouver longtemps après Robert Mayer.

Marc Seguin ne pouvait avoir connaissance des travaux restés inédits de Sadi Carnot. Se référant à certaines idées émises autrefois par son oncle Montgolfier, il affirme nettement, dès 1839, c'est-à-dire quatre ans avant Mayer, le principe de l'équivalence de la chaleur et du travail. Il est frappé d'abord de ce que la quantité de puissance mécanique susceptible d'être développée par une masse donnée de vapeur est relative à sa différence de densité et de température dans les deux états consécutifs où elle se trouve, avant et après la production du mouvement; il ajoute que la vapeur ne paraît être que l'intermédiaire du calorique pour produire la force, et que « *il doit exister entre le mouvement et le calorique un rapport direct, indépendant de l'intermédiaire de la vapeur, ou de tout autre agent qu'on pourrait y substituer* ». Examinant ensuite ce qui se passe dans la machine à condensation ordinaire, il lui paraît que, si l'on admet la conservation du calorique, on pourrait, au moyen d'une masse finie de calorique, obtenir une quantité indéfinie de mouvement, ce qui, dit-il, ne peut être admis ni par le bon sens, ni par une saine logique. Il aime mieux supposer « qu'une certaine quantité de calorique disparaît dans l'acte même de la production de la puissance mécanique, et réciproquement, et que les deux phénomènes sont liés entre eux par des conditions qui leur assignent des relations invariables». Et Seguin croit pouvoir signaler à l'appui de ses idées l'abaissement de température qui accompagne l'expansion d'un fluide aériforme et le phénomène opposé, c'est-à-dire la production de la chaleur qui est la suite de la compression. Sans doute, quelques-unes des assertions de Seguin étaient à préciser, mais le point essentiel demeure, *celui de la disparition du calorique correspondant à un travail*. C'était alors une conjecture hardie et nouvelle de croire que la chaleur cesse d'exister, au lieu de la croire indestructible et de la dire latente. Quoique Marc Seguin n'ait pas appuyé de preuves formelles ses merveilleuses divinations, on

peut dire que la profondeur de ses conceptions le range parmi les fondateurs de la Thermodynamique. Ainsi, avec Sadi Carnot et Marc Seguin, notre pays peut, en toute justice, revendiquer une place d'honneur dans l'histoire de la science des énergies calorifiques, qui a eu une si grande répercussion sur le développement de la physique tout entière.

Seguin, qui ne cessait de s'intéresser aux machines à vapeur, a cherché en 1857 à construire une nouvelle machine devant marcher constamment avec la même vapeur. L'idée qui l'a guidé est que la chaleur dépensée pour la vaporisation de l'eau est perdue dans la condensation, et que, en évitant ces changements d'état, on pourrait ne dépenser que la quantité de chaleur représentant strictement la puissance mécanique obtenue. Il voulait en fait réaliser un cycle thermodynamique, où l'eau reste constamment à l'état de vapeur, et il aurait eu alors un moteur analogue aux moteurs à air chaud. Quoique les essais pour la réalisation de cette machine, qu'il appelle pulmonaire, n'aient pas été couronnés de succès, on est frappé de l'extrême ingéniosité qu'il déploie. Et même le « générateur » qu'il fait construire « pour restituer à chaque coup de piston à la vapeur la chaleur qu'elle a perdue en produisant l'effet mécanique » pourrait être l'ancêtre des surchauffeurs des machines modernes à vapeur surchauffée, si le but poursuivi n'était pas entièrement différent.

Le neveu des Montgolfier ne pouvait manquer de s'intéresser à la navigation aérienne, mais il n'avait pas confiance dans l'avenir des ballons. Aussi dirigea-t-il ses recherches du côté des hélices, guidé par l'exemple des aérodons qui servent aux enfants; mais, après des essais infructueux, pensant au battement des ailes de l'oiseau, il est convaincu, je cite ses propres expressions, « qu'il faut imiter le mode au moyen duquel la Providence divine a su résoudre la question d'une manière à la fois si simple et si avantageuse ». Il construit à cet effet une aile de toile fine de quatre mètres carrés, montée sur une charpente légère, et, imposant à cette aile un battement au moyen d'un effort musculaire appliqué au bras d'un levier, il obtient à chaque coup un petit soulèvement au-dessus du sol. Il voit l'importance du problème de la résistance à l'avancement dans les fluides, et présente d'ingénieuses remarques sur la dépendance entre la forme des poissons et celle de la proue qui se

forme derrière un obstacle placé dans un courant d'eau; plusieurs de ses tentatives à ce sujet ont été reprises de nos jours. Seguin croyait à l'avenir de la solution orthoptère, et il termine son étude par ces mots : « Il me suffit pour le moment d'avoir constaté la possibilité de résoudre un problème hérissé de tant de difficultés, pour acquérir la certitude que, dans un temps plus ou moins éloigné, on parviendra à voyager aussi facilement dans les airs qu'on le fait aujourd'hui sur mer ». Ces vues prophétiques devaient être réalisées, mais par une autre voie que celle entrevue par Seguin, bien que ses allusions aux hydroglisseurs eussent pu l'amener à penser aux avions.

Le grand réalisateur, que fut Seguin dans la première partie de sa carrière, s'est toute sa vie intéressé aux questions les plus élevées de la physique théorique. Il avait compris de bonne heure que les principes généraux de la science sont le guide le plus sûr pour réaliser des progrès importants dans les applications. A une époque, où le principe de la conservation de l'énergie, qui domine la science moderne, présentait encore bien des obscurités, notre confrère en fut l'infatigable apôtre. On trouve chez lui des raisonnements qui rappellent ceux de Sadi Carnot, dont le travail *sur la puissance motrice du feu* est resté si longtemps ignoré de tous, raisonnements où l'impossibilité du mouvement perpétuel joue le rôle essentiel.

Seguin avait pour Newton une admiration sans bornes. Il chercha à établir que la gravitation universelle est susceptible d'expliquer tous les phénomènes naturels; dans ses études sur les causes et les effets de la chaleur, de la lumière et de l'électricité, il déclare « qu'il a en vue d'élever bien haut l'immense et immortel génie de Newton, l'esprit le plus droit, le plus grand, le plus vaste et le plus profond, qui ait jamais existé de mémoire d'homme ». C'est le sort commun des synthèses trop vastes, qui veulent tout embrasser, de ne pouvoir remplir complètement leur objet, mais certaines vues audacieuses de Seguin témoignent de la pénétration de son esprit critique. Il s'attaque vivement au fluide impondérable, que les physiciens appellent *éther*, et à travers lequel ils supposent que se propagent les ondes lumineuses. « Cet agent auquel faute de mieux, écrit-il, des hommes recommandables à tous égards s'étaient attachés, en donnant à son existence une

réalité fictive, ne peut plus se soutenir, et on doit forcément en faire l'abandon. » Seguin allait peut-être un peu vite, et les choses sont plus complexes qu'il ne le supposait; mais notre confrère, s'il vivait aujourd'hui, trouverait dans ses attaques contre l'éther des alliés, que d'ailleurs il jugerait peut-être compromettants, parmi les partisans de la théorie moderne de la relativité qui, ne voyant dans la science qu'un vaste symbolisme et qu'un jeu de formules, ensevelissent, eux aussi, le fluide éthéré dans le linceul de pourpre, où dorment les dieux morts.

Telle fut la vie scientifique, prodigieusement active, de Marc Seguin. Chez lui, l'homme fut à la hauteur du savant et du technicien, et il n'est pas besoin de rappeler les éminentes qualités de son cœur compatissant à toutes les misères, dans cette ville d'Annonay, où sa figure vénérable est restée légendaire. Bien rares sont les hommes de cette trempe et de ce caractère; leur grande, comme leur petite patrie, doivent conserver pieusement leur souvenir. Aussi l'Académie des Sciences a-t-elle tenu à apporter son tribut d'admiration à son illustre correspondant, que nous saluons comme un précurseur dans la théorie de la chaleur, et dont le nom reste à jamais inscrit dans l'histoire de la locomotion à vapeur à côté de ceux de Papin et de Stephenson.

LE PROBLÈME DE DIRICHLET ET LE POTENTIEL DE SIMPLE COUCHE;

Par M. Gaston BERTRAND

(*suite et fin*).

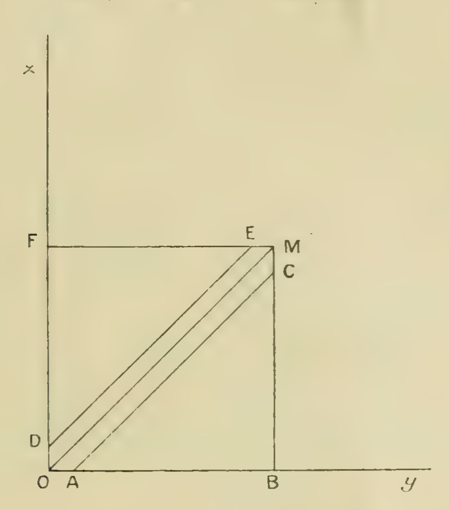
III. *Calcul de*

$$\int_0^{2\pi} \Lambda(y, x)\, dy \int_0^{2\pi} \cot\frac{z-y}{2} f(z)\, dz.$$

Dans le plan yOz je forme le carré OBMF de côté 2π, et j'isole

la bissectrice singulière $z - y = 0$ par les droites

$$\text{AC, c'est-à-dire } z = y + \varepsilon;$$
$$\text{DE,} \quad\quad » \quad\quad z = y - \varepsilon.$$



J'intègre de deux manières la fonction $A(y, x) \cot \dfrac{z-y}{2} f(z)$, dans le champ ABC et DEF. Soit J cette intégrale. J'ai d'abord

$$J = \int_{\varepsilon}^{2\pi} A(y, x)\, dy \int_{0}^{y-\varepsilon} \cot \frac{z-y}{2} f(z)\, dz + \int_{0}^{2\pi-\varepsilon} A(y, x)\, dy \int_{y+\varepsilon}^{2\pi} \cot \frac{z-y}{2} f(z)\, dz,$$

ou encore

$$J = \int_{0}^{2\pi} A(y, x)\, dy \int_{0}^{y-\varepsilon} \cot \frac{z-y}{2} f(z)\, dz + \int_{0}^{2\pi} A(y, x)\, dy \int_{y+\varepsilon}^{2\pi} \cot \frac{z-y}{2} f(z)\, dz$$
$$- \int_{0}^{\varepsilon} A(y, x)\, dy \int_{0}^{y-\varepsilon} \cot \frac{z-y}{2} f(z)\, dz - \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} A(y, x)\, dy \int_{y-\varepsilon}^{2\pi} \cot \frac{z-y}{2} f(z)\, dz.$$

Je m'occupe maintenant de l'avant-dernière intégrale double

$$F(\varepsilon) = \int_{0}^{\varepsilon} A(y, x)\, dy \int_{0}^{y-\varepsilon} \cot \frac{z-y}{2} f(z)\, dz.$$

je l'intègre par parties

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}(\varepsilon) = &\int_0^{\varepsilon} \mathrm{A}(y, x)\, dy \left[2\log\left|\sin\frac{z-y}{2}\right| f(z) \right.\\
&\left. - \int 2\log\left|\sin\frac{z-y}{2}\right| f'(z)\, dz \right]_0^{y-\varepsilon}\\
= &\int_0^{\varepsilon} \mathrm{A}(y, x)\, 2\log\sin\frac{\varepsilon}{2} f(y-\varepsilon)\, dy\\
&- \int_0^{\varepsilon} \mathrm{A}(y, x)\, 2\log\sin\frac{y}{2} f(0)\, dy\\
&- \int_0^{\varepsilon} \mathrm{A}(y, x)\, dy \int_0^{y-\varepsilon} 2\log\left|\sin\frac{z-y}{2}\right| f'(z)\, dz.
\end{aligned}$$

Quand ε tend vers zéro, il en est de même des deux dernières intégrales, il suffit donc d'étudier

$$2\log\sin\frac{\varepsilon}{2} \int_0^{\varepsilon} \mathrm{A}(y, x) f(y-\varepsilon)\, dy.$$

A et f étant bornées, la valeur absolue de ce terme est moindre que

$$2\mathrm{M}\varepsilon \log\sin\frac{\varepsilon}{2}\cdot$$

Donc $\mathrm{F}(\varepsilon)$ tend vers zéro avec ε.

La même démonstration vaut pour le quatrième terme de J, et l'on a

$$\lim_{\varepsilon=0} \mathrm{J} = \int_0^{2\pi} \mathrm{A}(y, x)\, dy \int_0^{2\pi} \cot\frac{z-y}{2} f(z)\, dz.$$

Je reprends la fonction $\mathrm{A}(y, x)\cot\frac{z-y}{2} f(z)$ et je l'intègre dans l'autre sens

$$\begin{aligned}
\mathrm{J} = &\int_{\varepsilon}^{2\pi} f(z)\, dz \int_0^{z-\varepsilon} \mathrm{A}(y, x)\cot\frac{z-y}{2}\, dy\\
&+ \int_0^{2\pi-\varepsilon} f(z)\, dz \int_{z+\varepsilon}^{2\pi} \mathrm{A}(y, x)\cot\frac{z-y}{2}\, dy\\
= &\int_0^{2\pi} f(z)\, dz \int_0^{z-\varepsilon} \mathrm{A}(y, x)\cot\frac{z-y}{2}\, dy\\
&+ \int_0^{2\pi} f(z)\, dz \int_{z+\varepsilon}^{2\pi} \mathrm{A}(y, x)\cot\frac{z-y}{2}\, dy\\
&- \int_0^{\varepsilon} f(z)\, dz \int_0^{z-\varepsilon} \mathrm{A}(y, x)\cot\frac{z-y}{2}\, dy\\
&- \int_{2\pi-\varepsilon}^{2\pi} f(z)\, dz \int_{z+\varepsilon}^{2\pi} \mathrm{A}(y, x)\cot\frac{z-y}{2}\, dy;
\end{aligned}$$

d'où en répétant exactement le raisonnement ci-dessus

$$\lim_{\varepsilon=0} \mathrm{J} = \int_0^{2\pi} f(z)\,dz \int_0^{2\pi} \mathrm{A}(y, x) \cot\frac{z-y}{2}\,dy.$$

On a donc

$$(10)\qquad \int_0^{2\pi} \mathrm{A}(y, x)\,dy \int_0^{2\pi} \cot\frac{z-y}{2} f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(z)\,dz \int_0^{2\pi} \mathrm{A}(y, x) \cot\frac{z-y}{2}\,dy.$$

IV. *Calcul de*

$$\int_0^{2\pi} \cot\frac{y-x}{2}\,dy \int_0^{2\pi} \mathrm{B}(z, y) f(z)\,dz.$$

J'envisage

$$\mathrm{J}' = \int_0^{x-\varepsilon} \cot\frac{y-x}{2}\,dy \int_0^{2\pi} \mathrm{B}(z, y) f(z)\,dz + \int_{x+\varepsilon}^{2\pi} \cot\frac{y-x}{2}\,dy \int_0^{2\pi} \mathrm{B}(z, y) f(z)\,dz,$$

cela peut s'écrire

$$\mathrm{J}' = \int_0^{2\pi} f(z)\,dz \int_0^{x-\varepsilon} \cot\frac{y-x}{2} \mathrm{B}(z, y)\,dy + \int_0^{2\pi} f(z)\,dz \int_{x+\varepsilon}^{2\pi} \cot\frac{y-x}{2} \mathrm{B}(z, y)\,dy;$$

d'où en faisant tendre ε vers zéro

$$(11)\qquad \int_0^{2\pi} \cot\frac{y-x}{2}\,dy \int_0^{2\pi} \mathrm{B}(z, y) f(z)\,dz = \int_0^{2\pi} f(z)\,dz \int_0^{2\pi} \cot\frac{y-x}{2} \mathrm{B}(z, y)\,dy.$$

V. *Cas général*

$$\mathrm{P} = \int_0^{2\pi} \mathrm{M}(x, y)\,dy \int_0^{2\pi} \mathrm{N}(y, z) f(z)\,dz.$$

D'après l'énoncé du théorème on peut écrire

$$\mathrm{M}(x, y) = \frac{1}{2} \cot\frac{y-x}{2} - \mathrm{A}(x, y),$$

$$\mathrm{N}(x, y) = \frac{1}{2} \cot\frac{y-x}{2} + \mathrm{B}(x, y).$$

Les fonctions A et B étant continues et pourvues de dérivées du premier ordre, on a donc

$$\begin{aligned}
P = & \int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\cot\frac{y-x}{2}+A(y,x)\,dy\right] \\
& \times\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\cot\frac{z-y}{2}+B(z,y)\right]f(z)\,dz \\
& = \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cot\frac{y-x}{2}\,dy\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cot\frac{z-y}{2}f(z)\,dz \\
& + \int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cot\frac{y-x}{2}\,dy\int_0^{2\pi}B(y,z)f(z)\,dz \\
& + \int_0^{2\pi}A(y,x)\,dy\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cot\frac{z-y}{2}f(z)\,dz \\
& + \int_0^{2\pi}A(y,x)\,dy\int_0^{2\pi}B(z,y)f(z)\,dz;
\end{aligned}$$

d'où en tenant compte des formules d'interversion (9), (10) et (11)

$$\begin{aligned}
P = -\pi^2 f(x) & + \int_0^{2\pi}f(z)\,dz\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cot\frac{y-x}{2}\cdot\frac{1}{2}\cot\frac{z-y}{2}\,dy \\
& + \int_0^{2\pi}f(z)\,dz\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\cot\frac{y-x}{2}B(z,y)\,dy \\
& + \int_0^{2\pi}f(z)\,dz\int_0^{2\pi}A(y,x)\frac{1}{2}\cot\frac{z-y}{2}\,dy \\
& + \int_0^{2\pi}f(z)\,dz\int_0^{2\pi}A(y,x)B(z,y)\,dy,
\end{aligned}$$

autrement dit

$$\begin{aligned}
P = -\pi^2 f(x) + \int_0^{2\pi}f(z)\,dz\int_0^{2\pi} & \left[\frac{1}{2}\cot\frac{y-x}{2}+A(y,x)\right] \\
& \times\left[\frac{1}{2}\cot\frac{z-y}{2}+B(z,y)\right]dy;
\end{aligned}$$

d'où enfin la formule fondamentale cherchée

$$\begin{aligned}
(5)\qquad & \int_0^{2\pi}M(x,y)\,dy\int_0^{2\pi}N(y,z)f(z)\,dz \\
& = -\pi^2 f(x) + \int_0^{2\pi}f(z)\,dz\int_0^{2\pi}M(x,y)N(y,z)\,dy.
\end{aligned}$$

5. *Le problème ramené à une équation de seconde espèce.* — On a donc à résoudre l'équation singulière

$$\int_0^l \frac{\cos\chi}{r}\rho(s')\,ds' = f'(s),$$

qu'on peut écrire pour simplifier

$$(12) \qquad \int_0^l K(s, s')\rho(s')\,ds' = f'(s),$$

On trouve sans peine

$$\frac{\cos\chi}{r} = K(s, s') = \frac{1}{s'-s} - \frac{s'-s}{12R^2} + \ldots.$$

Dès lors, si le contour C a *une courbure finie et dérivable*, le noyau $K(s, s')$ satisfait aux conditions du théorème précédent. Je multiplie les deux membres de (12) par $K(s'', s)\,ds$, et j'intègre tout le long de C en prenant la valeur principale

$$\int_0^l K(s'', s)\,ds \int_0^l K(s, s')\rho(s')\,ds' = \int_0^l K(s'', s)f'(s)\,ds;$$

d'où en appliquant la formule (5)

$$(13) \quad -\pi^2\rho(s'') + \int_0^l \rho(s')\,ds' \int_0^l K(s'', s)K(s, s')\,ds = \int_0^l K(s'', s)f'(s)\,ds.$$

C'est bien une équation intégrale de seconde espèce.

Remarque. — Pour que l'analyse précédente soit valide, il faut que $\rho(s)$ ait une dérivée, ce qui conduit à étudier d'un peu plus près les différentes fonctions qui figurent dans l'équation (13).

6. *Étude du noyau de l'équation intégrale*

$$N(s, s') = \int_0^l K(s, t)\,K(t, s')\,dt.$$

On vient de trouver

$$K(s, t) = \frac{1}{t-s} - \frac{t-s}{12R^2} + \ldots.$$

ce qui peut s'écrire

$$K(s, t) = \frac{\pi}{l}\cot\frac{\pi}{l}(t-s) + \frac{1}{t-s} - \frac{\pi}{l}\cot\frac{\pi}{l}(t-s) - \frac{t-s}{12R^2} + \ldots.$$

Donc si le contour C a une courbure finie et dérivable, on a

$$K(s, t) = \frac{\pi}{l} \cot \frac{\pi}{l}(t - s) + \Phi(s, t),$$

$\Phi(s, t)$ ayant des dérivées premières. On a de même

$$K(t, s') = \frac{\pi}{l} \cot \frac{\pi}{l}(s' - t) + \Phi(t, s'),$$

et par conséquent

$$\begin{aligned} N(s, s') = & \int_0^l \frac{\pi^2}{l^2} \cot \frac{\pi}{l}(t - s) \cot \frac{\pi}{l}(s' - t)\, dt + \int_0^l \frac{\pi}{l} \cot \frac{\pi}{l}(t - s) \Phi(t, s')\, dt \\ & + \int_0^l \frac{\pi}{l} \cot \frac{\pi}{l}(s' - t) \Phi(s, t)\, dt + \int_0^l \Phi(s, t) \Phi(t, s')\, dt. \end{aligned}$$

Tout d'abord, on trouve aisément en effectuant l'intégration et en prenant la valeur principale

$$\int_0^l \frac{\pi^2}{l^2} \cot \frac{\pi}{l}(t - s) \cot \frac{\pi}{l}(s' - t)\, dt = \frac{\pi^2}{l} \cdot$$

Donc tout revient à étudier la nature analytique d'une intégrale de la forme

$$I(s) = \int_0^l \cot \frac{\pi}{l}(t - s) F(t)\, dt.$$

Or, il est aisé d'en calculer la dérivée. Pour cela je pose

$$t = s + x.$$

L'intégrale devient

$$I(s) = \int_0^l \cot \frac{\pi x}{l} \times F(s + x)\, dx;$$

d'où évidemment

$$I'(s) = \int_0^l \cot \frac{\pi x}{l} \times F'(s + x)\, dx,$$

ce qui en revenant à t donne la formule intéressante

$$\frac{d}{ds} \int_0^l \cot \frac{\pi}{l}(t - s) F(t)\, dt = \int_0^l \cot \frac{\pi}{l}(t - s) F'(t)\, dt.$$

Précisément dans le noyau $N(s, s')$ les fonctions $\Phi(t, s')$, $\Phi(s, t)$ sont des fonctions dérivables de t, s et s'. D'où cette conclusion :

Dans l'équation intégrale (13) le noyau est une fonction dérivable par rapport à chacune de ses variables.

Étude du terme connu

$$\int_0^l K(s, t) f'(t)\, dt;$$

ce terme peut s'écrire

$$\int_0^l \frac{\pi}{l} \cot \frac{\pi}{l}(t - s) f'(t)\, dt + \int_0^l \Phi(s, t) f'(t)\, dt,$$

il aura donc une dérivée si $f''(t)$ existe, c'est-à-dire *si la succession de valeurs données sur la courbe* C *forme une fonction ayant une dérivée seconde.*

7. *Nous sommes dans le cas d'un pôle.* — J'envisage l'équation homogène déduite de (13)

$$\rho(s) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^l \rho(s')\, ds' \int_0^l K(s, s'') K(s'', s')\, ds'',$$

que j'écris pour alléger

$$\rho(s) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^l N(s, s') \rho(s')\, ds'. \tag{14}$$

Je dis qu'elle a une solution non nulle, et par suite que $\frac{1}{\pi^2}$ est un pôle de la résolvante relative au noyau

$$N(s, s') = \int_0^l K(s, s'') K(s'', s')\, ds''.$$

En effet, l'équation (14) est équivalente à

$$\int_c \log \frac{1}{r} \rho(s')\, ds' = k. \tag{15}$$

la constante k pouvant être nulle.

Je forme le potentiel relatif à cette loi de densité $\rho(s')$. Il est constant par définition sur la courbe C, il est donc constant dans tout le domaine intérieur ꝺ. Sa dérivée normale prise à l'intérieur est nulle et l'on a avec les notations accoutumées

$$\rho(s) = \frac{1}{\pi} \int_c \frac{\cos \psi}{r} \rho(s')\, ds'.$$

Comme il est bien connu, cette équation a une solution non nulle $\rho(s')$, qui est aussi solution de l'équation (15). Cette solution l'est également de (14) qui se déduit de (15) par une différentiation et une itération.

En conséquence, pour que l'équation non homogène (13) ait une solution, il faut et il suffit que le terme connu à savoir

$$\int_0^l \mathrm{K}(s, t) f'(t)\, dt,$$

soit orthogonal aux solutions de l'équation associée

$$\rho(s) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^l \rho(s')\, ds' \int_0^l \mathrm{K}(s', s'') \mathrm{K}(s'', s)\, ds''.$$

8. *Résumé et conclusion.* — Le problème ordinaire de Dirichlet peut s'exprimer par l'équation intégrale de première espèce

$$\int_c \log \frac{1}{r} \rho(s')\, ds' = f(s) + k,$$

ou encore par l'équation singulière

$$\int_c \frac{\cos \chi}{r} \rho(s')\, ds' = f'(s);$$

celle-ci se ramène à une équation de deuxième espèce, à savoir

$$-\pi^2 \rho(s) + \int_c \rho(s')\, ds' \int_c \mathrm{K}(s, s'') \mathrm{K}(s'', s')\, ds'' = \int_c \mathrm{K}(s, s') f'(s')\, ds'$$

où l'on a posé

$$\mathrm{K}(s, s') = \frac{\cos \chi}{r} = \frac{d}{ds} \log \frac{1}{r}.$$

Dès lors, pour que le problème de Dirichlet soit résoluble par un potentiel de simple couche :

1° Il suffit que le contour C ait une courbure finie et dérivable;

2° Il suffit que la fonction périodique $f(s)$ ait une dérivée seconde;

3° Il faut et il suffit que le terme

$$\int_0^l \mathrm{K}(s, s') f'(s')\, ds'$$

soit orthogonal aux solutions de l'équation homogène

$$(16)\qquad -\pi^2\rho(s) + \int_C \rho(s')\,ds' \int_C K(s', s'')\,K(s'', s)\,ds'' = 0.$$

En fait cette dernière condition n'est pas restrictive. Supposons, pour fixer les idées, que l'équation (16) n'ait qu'une solution $\rho_1(s)$. Au lieu de prendre pour $V(x, y)$ uniquement un potentiel de simple couche, je pose

$$V(x, y) = -k - h\,u(x, y) + \int_C \log\frac{1}{r}\,\rho(s')\,ds',$$

$u(x, y)$ étant une fonction harmonique quelconque. On a ainsi sur la courbe C

$$(17)\qquad f(s) + k + hu(s) = \int_C \log\frac{1}{r}\,\rho(s')\,ds'.$$

et par conséquent

$$(18)\qquad f'(s) + h\,u'(s) = \int_C \frac{\cos\chi}{r}\,\rho(s')\,ds'.$$

D'après ce qui précède on doit avoir

$$\int_C \rho_1(s)\,ds \int_C K(s, s')\,[f'(s') + h\,u'(s')]\,ds' = 0.$$

Cette équation détermine h, si l'on a choisi $u(x, y)$ de façon que le coefficient de h ne soit pas nul. Sous cette condition, l'équation (18) a une solution non nulle. Et l'on détermine k en intégrant (17) tout le long de la courbe C.

Le problème posé est ainsi entièrement résolu.

SUR LA DÉRIVATION ET L'INTÉGRATION GÉNÉRALISÉES;

PAR M. PAUL LÉVY.

---

1. Riemann a introduit en analyse une opération fonctionnelle qui généralise la dérivation, et qu'on peut appeler dérivation d'ordre non entier. Sa définition repose sur la définition préalable

de ce qu'on peut de même appeler l'intégration d'ordre non entier.

L'intégration et la dérivation sont des opérations inverses l'une de l'autre, comme cela a lieu pour l'intégration et la dérivation ordinaires, et cette remarque permet de résoudre aisément certaines équations intégrales de première espèce. Une autre application de ces notions provient de ce que, si une fonction a des dérivées jusqu'à l'ordre α restant finies pour $z = 0$, sa dérivée d'ordre α ayant une limite non nulle c, cette fonction a pour valeur principale $\frac{c z^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$.

L'objet du présent mémoire est d'indiquer une généralisation de la dérivation selon Riemann, qui permet de résoudre de nouvelles équations intégrales, et qui peut aussi s'appliquer à l'étude de l'allure d'une fonction à l'origine; elle nous permettra de reconnaître si une fonction a une valeur principale de la forme $k z^\alpha \left(\log \frac{1}{z}\right)^\beta \left(\log \log \frac{1}{z}\right)^\gamma$. Les principaux résultats obtenus ont été résumés dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 22 mai 1923.

La dérivée généralisée de Riemann semblant assez peu connue, malgré l'application qu'en a faite M. Hadamard à l'étude des fonctions définies par des séries de Taylor, nous commencerons par en rappeler la définition et les principales propriétés, et en indiquer l'application à la fonction exponentielle et à la fonction caractéristique du calcul des probabilités.

2. Définissons d'abord l'intégrale généralisée d'une fonction $f(z)$. Si l'on intègre n fois de suite cette fonction, à partir d'une valeur initiale que nous prendrons égale à zéro, on obtient l'intégrale d'ordre n

$$I_z^n[f(z)] = \int_0^z dz_n \int_0^{z_n} dz_{n-1} \ldots \int_0^{z_2} f(z_1)\, dz_1,$$

qui se ramène, en intervertissant l'ordre des intégrations et en effectuant celles qui peuvent s'effectuer, à l'intégrale simple

$$\int_0^z \frac{(z-z_1)^{n-1}}{(n-1)!} f(z_1)\, dz_1.$$

La généralisation introduite par Riemann consiste à remplacer l'entier n par un nombre positif quelconque α; naturellement, $(n-1)!$ doit être d'abord remplacé par la fonction eulérienne $\Gamma(n)$, qui conserve un sens lorsqu'on remplace n par α. On pourrait même donner à α des valeurs imaginaires; mais cela ne sera pas utile pour la suite.

Considérons donc l'expression

$$(1) \qquad I_z^{\alpha}[f(z)] = \int_0^z \frac{(z-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(u)\,du, \qquad (\alpha > 0),$$

que nous appellerons l'intégrale $\alpha^{\text{ième}}$ de $f(z)$. Nous l'écrirons aussi, en posant $u = tz$,

$$(2) \qquad I_z^{\alpha}[f(z)] = z^{\alpha} \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(tz)\,dt.$$

On remarque que, si $f(z)$ est uniforme, cette opération introduit un point critique à l'origine. Pour qu'elle soit définie sans ambiguïté, nous considérerons le plan de la variable z comme coupé par la partie négative de l'axe réel, la coupure elle-même étant rattachée, pour fixer les idées, au demi-plan supérieur; la détermination de z^{α} choisie dans le plan coupé sera celle qui est réelle et positive avec z.

Il résulte aisément des propriétés des fonctions eulériennes B et Γ que la succession des opérations I_z^{α} et I_z^{β} équivaut à l'opération unique $I_z^{\alpha+\beta}$. On a en effet

$$\begin{aligned} I_z^{\beta}\{I_z^{\alpha}[f(z)]\} &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^z (z-v)^{\beta-1}\,dv \int_0^v (v-u)^{\alpha-1} f(u)\,du \\ &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^z f(u)\,du \int_u^z (z-v)^{\beta-1}(v-u)^{\alpha-1}\,dv. \end{aligned}$$

Si l'on pose $v = u + t(z-u)$, cette expression devient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^z (z-u)^{\alpha+\beta-1} f(u)\,du \int_0^1 (1-t)^{\beta-1} t^{\alpha-1}\,dt \\ &= \frac{B(\alpha,\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_0^z (z-u)^{\alpha+\beta-1} f(u)\,du = \int_0^z \frac{(z-u)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} f(u)\,du. \end{aligned}$$

On a donc

$$(3) \qquad I_z^{\beta}\{I_z^{\alpha}[f(z)]\} = I_z^{\alpha+\beta}[f(z)].$$

Si l'on donne à β une valeur entière n, il résulte immédiatement de notre point de départ qu'en dérivant n fois cette expression on annule l'effet de l'opération I_z^n. On a donc

$$(4)\qquad I_z^\alpha[f(z)] = \frac{d^n}{dz^n} I_z^{\alpha+n}[f(z)].$$

Cette formule, établie pour α positif, peut servir de définition de l'opération I_z^α quand α est négatif; il suffit de prendre pour n un entier supérieur à $|\alpha|$; l'expression obtenue est évidemment indépendante de l'entier n. En remplaçant α par $-\alpha$, on a ainsi défini l'opération

$$(5)\qquad D_z^\alpha[f(z)] = I_z^{-\alpha}[f(z)] = \frac{d^n}{dz^n} I^{n-\alpha}[f(z)],$$

que nous appellerons *dérivation d'ordre α par rapport à z*.

Lorsqu'il n'en résultera aucune ambiguïté, nous supprimerons après les lettres I ou D l'indice qui indique la variable par rapport à laquelle on intègre ou dérive.

3. Appliquons les opérations I^α et D^α à la fonction $\frac{z^m}{\Gamma(m+1)}$, $(m > -1)$. Il vient

$$I^\alpha\left[\frac{z^m}{\Gamma(m+1)}\right] = z^{m+\alpha}\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{t^m}{\Gamma(m+1)}\,dt$$
$$= \frac{B(\alpha, m+1)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(m+1)} z^{m+\alpha},$$

c'est-à-dire

$$(6)\qquad I^\alpha\left[\frac{z^m}{\Gamma(m+1)}\right] = \frac{z^{m+\alpha}}{\Gamma(m+\alpha+1)}.$$

Par application de la formule (5), il vient alors

$$(7)\qquad D^\alpha\left[\frac{z^m}{\Gamma(m+1)}\right] = \frac{z^{m-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha+1)}.$$

Ainsi l'intégration d'ordre α et la dérivation d'ordre α ont pour effet respectivement d'augmenter ou de diminuer de α le paramètre m.

On en déduit aisément les formules d'intégration et de dérivation des séries entières. D'une manière générale, on peut intégrer et dériver les séries dans les mêmes conditions que pour l'intégra-

tion et la dérivation ordinaires. L'intégration d'ordre α, d'après la formule (1), consiste dans le calcul d'une intégrale ordinaire; il en résulte qu'on peut intégrer terme à terme toute série uniformément convergente. La dérivation résultant d'une intégration suivie d'une dérivation ordinaire, il suffit certainement que la série initiale soit uniformément convergente de o à z, et que la série finale le soit dans un petit intervalle comprenant la valeur considérée z.

Les mêmes remarques s'appliquent à l'intégration et la dérivation sous le signe somme.

4. Montrons maintenant que l'intégration et la dérivation sont des opérations inverses l'une de l'autre.

Je dis d'abord que l'on a

$$D^{\alpha}\{I^{\alpha}[f(z)]\} = f(z), \qquad (\alpha > 0). \tag{8}$$

Cela est exact si α est entier. Supposons α non entier, et posons $\alpha = p + \alpha'$, p étant le plus grand entier inférieur à α. D'après la définition même de l'opération D^{α}, et par application de la formule (3), cette expression s'écrit

$$\frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}} I^{1-\alpha'}\{I^{p+\alpha'}[f(z)]\} = \frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}} I^{p+1}[f(z)].$$

Elle est bien égale à $f(z)$.

Étudions maintenant l'opération inverse, qui consiste à effectuer l'opération D^{α}, puis l'opération I^{α}. La première opération, comme le montre la formule (7), conduit en général à une fonction $g(z)$ devenant infinie à l'origine, et qu'on ne peut pas intégrer à partir de ce point. On ne peut donc remonter de $g(z)$ à la primitive $f(z)$ qu'en effectuant des intégrations indéfinies ordinaires, jusqu'à ce qu'on obtienne une fonction qu'on puisse intégrer à partir de l'origine; si n est le nombre de ces intégrations, I^{α} indiquera la succession des opérations I^{n} et $I^{\alpha-n}$, la première comprenant n intégrations ordinaires; cette opération introduit essentiellement n constantes d'intégration.

Supposons la fonction initiale $f(z)$ intégrable; ses intégrales le seront aussi, mais non nécessairement ses dérivées, de sorte qu'il faudra en général prendre $n = p + 1$ (p et α' désignant toujours

respectivement la partie entière de α et sa partie fractionnaire). Alors la succession des opérations D^α, I^α se décomposera de la manière suivante :

$$(9) \qquad I^{1-\alpha'},\quad D^{p+1},\quad I^{p+1},\quad I^{\alpha'},\quad D^1.$$

Pour des valeurs convenables des constantes d'intégration introduites par l'opération I^{p+1}, il est alors évident qu'on retrouve finalement la fonction $f(z)$. Mais si ces constantes sont quelconques, on trouve pour l'expression calculée la valeur

$$(10) \qquad I^\alpha\{D^\alpha[f(z)]\} = f(z) + z^{\alpha'-1}P_p(z),$$

$P_p(z)$ désignant un polynome de degré p à coefficients arbitraires. On remarque d'ailleurs que l'opération D^α, effectuée sur le second membre de cette formule, donne $g(z)$, quel que soit ce polynome, de sorte que rien ne distingue la fonction initiale $f(z)$ de l'ensemble des fonctions représentées par la formule (10).

D'après la succession d'opérations (9), on voit qu'on n'est pas assuré de pouvoir remonter de la dérivée $g(z)$ à la primitive $f(z)$ rien que par des intégrations; une dérivation finale peut être nécessaire.

Mais, si $f(z)$ est holomorphe, on peut sûrement prendre $n = p$ et effectuer la succession d'opérations

$$I^{1-\alpha'},\quad D^{p+1},\quad I^p,\quad I^{\alpha'}.$$

Après la troisième opération, la fonction obtenue devient infinie au plus comme $\frac{1}{z^{\alpha'}}$, et la dernière opération se réduit à une intégration. On peut alors remonter de la dérivée à la primitive à l'aide de quadratures seulement.

Il peut arriver que $n < p$; le nombre n peut même être nul. Le nombre n de constantes arbitraires sera alors réduit, puisque après n quadratures on intégrera à partir de l'origine. On voit aisément (par application du numéro suivant) que les fonctions ainsi obtenues finalement se distinguent dans l'ensemble des fonctions (10) parce qu'elles sont d'un ordre infinitésimal plus élevé à l'origine.

Les résultats qui précèdent permettent naturellement la résolution d'équations intégrales.

D'après la formule (10), l'equation

$$\text{(11)} \qquad D^{\alpha}[f(z)] = g(z)$$

se résout par la formule

$$\text{(12)} \qquad f(z) = I^{\alpha}[g(z)] + c_0 z^{\alpha-1} + c_1 z^{\alpha-2} + \ldots + c_p z^{\alpha-p-1},$$

c_0, c_1, …, c_p étant des constantes arbitraires. Inversement, de l'équation

$$\text{(13)} \qquad I^{\alpha}[f(z)] = g(z)$$

on déduit, par la formule (8),

$$\text{(14)} \qquad f(z) = D^{\alpha}[g(z)];$$

mais il résulte de ce qui précède que, si $g(z)$ a une valeur principale d'une des formes $c z^{\alpha-h}$ $(h = 1, 2, \ldots, p+1)$, la fonction ainsi obtenue ne vérifie pas l'équation (13) qui, en conséquence, n'a pas de solution.

On remarque que, pour $\alpha = \frac{1}{2}$, l'équation (13) ainsi résolue n'est autre que l'équation intégrale d'Abel à l'aide de laquelle on résout le problème de la courbe tautochrone.

5. Il est facile de limiter supérieurement l'intégrale généralisée.

Si nous supposons seulement que la fonction $|f(z)|$ soit intégrable le long du chemin rectiligne $(0, z)$, la formule de définition (1) donne, si $\alpha \geq 1$,

$$|I^{\alpha}[f(z)]| < \frac{|z|^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z |f(u)\,du|,$$

et par suite

$$\text{(15)} \qquad I^{\alpha}[f(z)] = z^{\alpha-1}\varepsilon(z),$$

$\varepsilon(z)$ s'annulant avec z. Si $\alpha < 1$, il suffit de séparer l'intégrale (1) en deux parties correspondant respectivement aux intervalles d'intégration $(0, kz)$ et (kz, z), k étant un nombre un peu plus petit que l'unité, pour arriver au même résultat, si l'on suppose que $zf(z)$ reste fini.

Supposons maintenant, d'une manière plus précise, que l'on ait

$$(16)\qquad |f(z)| \leq \frac{k|z|^m}{\Gamma(m+1)}, \qquad (m > -1).$$

La formule (2) donne alors

$$(17)\qquad |\mathrm{I}^\alpha[f(z)]| \leq \frac{k}{\Gamma(m+1)}|\mathrm{I}^\alpha[z^m]| = \frac{k|z|^{m+\alpha}}{\Gamma(m+\alpha+1)}.$$

Précisons encore notre hypothèse, en supposant que

$$(18)\qquad f(z) \sim \frac{c z^m}{\Gamma(m+1)} \qquad (m > -1).$$

le signe $\sim$ indiquant que les deux quantités considérées sont équivalentes pour z infiniment petit. On peut appliquer le résultat précédent à leur différence, et prendre k aussi petit que l'on veut, pourvu que z soit assez petit. On a donc

$$(19)\qquad \mathrm{I}^\alpha[f(z)] \sim \frac{c z^{m+\alpha}}{\Gamma(m+\alpha)}.$$

Ce mode de raisonnement montre, d'une manière générale, qu'on peut intégrer les inégalités et les égalités asymptotiques, pourvu que les seconds membres soient intégrables, et positifs (ou du moins d'argument constant) sur le chemin rectiligne $(0, z)$ [1].

Naturellement, ces mêmes résultats peuvent s'énoncer autrement en faisant intervenir la dérivation. Ainsi, pour ne considérer que le cas le plus important où $m = 0$, on a les énoncés suivants :

Si la dérivée d'ordre α d'une fonction $f(z)$ est au plus égale en module à un nombre positif k, ses dérivées d'ordres inférieurs à α étant finies et continues, on a

$$|f(z)| \leq k\frac{|z|^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

---

[1] On peut même étendre ces résultats à certains cas où les seconds membres ne sont pas intégrables. Seulement il est essentiel que l'opération I^α puisse être définie par des intégrations seulement (nous avons vu au n° 4 que ce n'était pas toujours le cas); et il faut tenir compte des constantes d'intégration indéterminées qui s'introduisent.

Si la dérivée d'ordre α d'une fonction $f(z)$ a pour $z=0$ une limite non nulle c, ses dérivées d'ordres inférieurs à α restant finies et continues, on a

$$f(z) \sim c \frac{z^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

Nous savons en effet qu'on peut remonter de la dérivée à la primitive par l'opération I^α en ajoutant une expression de la forme

$$c_0 z^{\alpha-1} + c_1 z^{\alpha-2} + \ldots + c_p z^{\alpha-p-1}.$$

Si les coefficients $c_0, c_1, \ldots, c_p$ n'étaient pas tous nuls, les dérivées de $f(z)$ d'ordres compris entre α et $\alpha-1$ seraient infinies à l'origine, ce qui est contraire à l'hypothèse. Ils sont donc nuls, et les théorèmes énoncés se réduisent à ceux qui s'expriment par les formules (17) et (19).

Naturellement, dans ces différents énoncés, on peut considérer séparément les valeurs positives et les valeurs négatives de z.

6. Appliquons maintenant les résultats obtenus à la fonction exponentielle

(20) $$e^z = 1 + z + \ldots + \frac{z^m}{m!} + \ldots.$$

Remarquons d'abord qu'on pourrait modifier la définition des opérations I^α et D^α en intégrant à partir d'un point autre que l'origine. En intégrant à partir de $-\infty$, on trouve que toutes les intégrales ou dérivées de e^z sont égales à e^z. Ce résultat simple, qui nous servira plus loin, peut être appliqué à l'étude des séries de Dirichlet

$$a_1 e^{-\lambda_1 z} + a_2 e^{-\lambda_2 z} + \ldots + a_n e^{-\lambda_n z} + \ldots,$$

dont la dérivée d'ordre α serait

$$(-1)^\alpha [a_1 \lambda_1^\alpha e^{-\lambda_1 z} + a_2 \lambda_2^\alpha e^{-\lambda_2 z} + \ldots + a_n \lambda_n^\alpha e^{-\lambda_n z} + \ldots].$$

Une telle étude serait une généralisation de celle faite par M. Hadamard sur la série de Taylor, qui, par le changement de z en e^{-z}, se ramène à un cas particulier des séries de Dirichlet.

Mais, pour certaines applications, il est utile d'étudier l'intégrale

de e^z prise à partir de l'origine. Intégrant terme à terme la série (15), il vient

$$I^\alpha[e^z] = \overline{\Omega}_\alpha(z),$$

en posant

(21) $$\overline{\Omega}_\alpha(z) = \frac{z^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{z^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \ldots + \frac{z^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha+m)} + \ldots,$$

et si l'on dérive, on constate que cette formule est vraie quel que soit α. Cette fonction est le produit de z^α par une fonction entière, ce qui est évident *a priori*, l'intégration n'introduisant pas d'autres singularités que celles de z^α.

La fonction $\overline{\Omega}(z)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d}{dz}\overline{\Omega}_\alpha(z) - \overline{\Omega}_\alpha(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

et peut être définie, si α est positif, comme étant l'intégrale de cette équation s'annulant avec z. On a alors (en multipliant par le facteur intégrant e^{-z} et intégrant)

(22) $$e^{-z}\overline{\Omega}_\alpha(z) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^z t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt \qquad (\alpha > 0).$$

Cette expression s'obtient d'ailleurs directement en faisant dans l'intégrale (1) le changement de variable $u = z - t$.

Transformons-la en décomposant l'intégrale en deux parties, l'une allant de 0 à $+\infty$, l'autre de $+\infty$ à z. Il vient ainsi

(23) $$\overline{\Omega}_\alpha(z) = e^z - \overline{\omega}_\alpha(z),$$

en posant

(24) $$\overline{\omega}_\alpha(z) = \frac{e^z}{\Gamma(\alpha)}\int_z^\infty t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt.$$

Cette formule, établie pour α positif, reste vraie pour α négatif, comme on s'en assure immédiatement en dérivant les deux membres.

Des formules (21) et (23), on déduit

(25) $$\overline{\omega}_\alpha(z) - \overline{\omega}_{\alpha-1}(z) = \overline{\Omega}_{\alpha-1}(z) - \overline{\Omega}_\alpha(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)},$$

et par suite

(26) $$\overline{\omega}_\alpha(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \frac{z^{\alpha-2}}{\Gamma(\alpha-1)} + \ldots + \frac{z^{\alpha-m}}{\Gamma(\alpha-m+1)} + \overline{\omega}_{\alpha-m}(z).$$

Si m augmente indéfiniment, on est conduit à un développement divergent, échappant évidemment à toutes les méthodes de sommation, car sa somme serait le produit de z^α par une fonction monodrome, et la fonction qu'il s'agit de représenter n'a pas cette forme. Mais ce développement présente de l'intérêt comme développement asymptotique, à l'infini, dans le plan coupé comme il a été dit au n° 2.

Pour établir cette propriété du développement (26), il suffit évidemment de montrer que $\overline{\omega}_\alpha(z)$ est de l'ordre de grandeur de $z^{\alpha-1}$, ce qu'on peut déduire de la formule de définition (24). Mais nous nous contenterons de déduire de cette formule que, si $\alpha < 0$, $\overline{\omega}_\alpha(z)$ est au plus de l'ordre de grandeur de z^α; le résultat plus précis indiqué d'abord résulte alors évidemment des formules (25) et (26) elles-mêmes.

Nous pouvons supposer, dans la formule (24), qu'on ait pris pour chemin d'intégration, en restant dans le plan coupé, un arc de circonférence ayant l'origine pour centre allant du point z au point $|z|$, puis l'axe réel de ce point jusqu'à l'infini. La partie réelle de t allant en croissant, le module de e^{-t} décroît depuis la valeur initiale $|e^{-z}|$ jusqu'à zéro. La formule (24) donne alors

$$|\overline{\omega}_\alpha(z)| < \left|\frac{\pi z^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\right| + \left|\frac{z^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}\right|. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

7. Il est facile de passer de e^z à e^{zx}, x étant une constante quelconque. Soit en intégrant terme à terme la série qui représente cette fonction, soit en utilisant la formule (2), on voit que

$$(27) \qquad \mathrm{I}_z^\alpha[e^{xz}] = \frac{1}{x^\alpha}\,\overline{\Omega}_\alpha(xz), \qquad \mathrm{D}_z^\alpha[e^{xz}] = x^\alpha\,\overline{\Omega}_{-\alpha}(xz),$$

les symboles I^α et D^α étant affectés de l'indice z, qui indique la variable par rapport à laquelle on dérive. On a de même, plus généralement,

$$(28) \qquad \mathrm{D}_z^\alpha f(xz) = x^\alpha \mathrm{F}(xz), \qquad \{\mathrm{F}(z) = \mathrm{D}^\alpha[f(z)]\}.$$

Pour l'étude de l'exponentielle imaginaire e^{iz}, il est commode d'introduire deux nouvelles fonctions Ω_α et ω_α définies par les formules

$$\overline{\Omega}_\alpha(iz) = i^\alpha \Omega_\alpha(z), \qquad \overline{\omega}_\alpha(iz) = i^\alpha \omega_\alpha(z).$$

Les formules (21), (23) et (26) deviennent alors

$$\Omega_\alpha(z) + \omega_\alpha(z) = i^{-\alpha} e^{iz}, \tag{29}$$

$$I_\alpha[e^{iz}] = \Omega_\alpha(z) = \frac{z^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + i\frac{z^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+2)} + \dots + i_m \frac{z^{\alpha+m}}{\Gamma(\alpha+m+1)} + \dots, \tag{30}$$

$$\omega_\alpha(z) = \frac{z^{\alpha-1}}{i\Gamma(\alpha)} - \frac{z^{\alpha-2}}{i^2\Gamma(\alpha-1)} + \dots + \frac{z^{\alpha-m}}{i^m\Gamma(\alpha-m+1)} + \omega_{\alpha-m}(z), \tag{31}$$

cette dernière formule donnant le développement asymptotique de $\omega_\alpha(z)$, à l'infini, sur l'axe réel. De même les formules (22) et (24), si l'on change z en iz et t en it, donnent

$$\Omega_\alpha(z) = \frac{e^{iz}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^z t^{\alpha-1} e^{-it}\, dt \qquad (\alpha > 0), \tag{32}$$

$$\Omega_\alpha(z) = \frac{e^{iz}}{\Gamma(\alpha)} \int_z^\infty t^{\alpha-1} e^{-it}\, dt \qquad (\alpha < 1). \tag{33}$$

Dans cette dernière formule, le changement de variable indiqué conduirait à prendre $-\infty i$ comme limite supérieure d'intégration : la formule ainsi écrite serait valable quel que soit α. Mais, pour $\alpha < 1$, la fonction $\omega_\alpha(z)$ s'annule à l'infini, sur l'axe réel, et l'on peut prendre $+\infty$ ou $-\infty$ comme limite supérieure, suivant le signe de z, de manière à intégrer sur l'axe réel en évitant l'origine.

On remarque que, si α est compris entre 0 et 1, les fonctions $\Omega_\alpha(z)$ et $\omega_\alpha(z)$ sont bornées sur tout l'axe réel, la première s'annulant à l'origine et la seconde à l'infini, et que l'addition des formules (32) et (33) donne

$$\int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-it}\, dt = i^{-\alpha}\Gamma(\alpha) \qquad (0 < \alpha < 1). \tag{34}$$

Enfin, si l'on remplace z par xz, on a les formules

$$I_z^\alpha[e^{izx}] = \frac{1}{x^\alpha}\Omega_\alpha(zx), \qquad D^\alpha[e^{izx}] = x^\alpha \Omega_{-\alpha}(zx).$$

8. Ces résultats peuvent être utilisés pour l'étude de la fonction, dite *caractéristique*,

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{izx}\, dF(x),$$

qui joue un grand rôle en calcul des probabilités; $F(x)$ est une fonction à variation bornée. Supposons que les intégrales

$$E_\beta = \int_{-\infty}^{+\infty} x^\beta \, dF(x) \qquad (0 \leq \beta \leq \alpha)$$

aient un sens, c'est-à-dire soient absolument convergentes. Nous poserons toujours $\alpha = p + \alpha'$, p étant entier et α' compris entre 0 et 1. On a

$$e^{izx} = 1 + \frac{izx}{1!} + \ldots + \frac{(izx)^p}{p!} + i^{p+1}\Omega_{p+1}(zx),$$

et, en multipliant par $dF(x)$ et intégrant de $-\infty$ à $+\infty$,

$$\varphi(z) = E_0 + iE_1 z + \ldots + \frac{i^p}{p!} E_p z^p + \Phi(z),$$

en posant

$$\Phi(z) = i^{p+1} \int_{-\infty}^{+\infty} \Omega_{p+1}(zx) \, dF(x).$$

D'ailleurs $\varphi(z)$ différant de $\Phi(z)$ par un polynome, l'étude des singularités de $\varphi(z)$ se ramène à l'étude de $\Phi(z)$. Or nous avons

$$D^\alpha \Phi(z) = i^{p+1} \int_{-\infty}^{+\infty} x^\alpha \Omega_{1-\alpha'}(zx) \, dF(x),$$

et la fonction $\Omega_{1-\alpha'}(zx)$, dont l'indice est compris entre 0 et 1, est bornée de $-\infty$ à $+\infty$ et s'annule avec z. La dérivée ainsi calculée existe donc et s'annule avec z, ainsi que toutes les dérivées d'ordres plus petits. On a alors

$$\Phi(z) = z^\alpha \varepsilon(z),$$

la fonction $\varepsilon(z)$ s'annulant avec z. On voit ainsi que, si l'intégrale E_α a un sens, la fonction $\varphi(z)$ ne diffère d'une fonction holomorphe que par une fonction ayant des dérivées jusqu'à l'ordre α déterminées et continues, et qui s'annule à l'origine plus rapidement que z^α (¹).

(¹) J'ai énoncé ce résultat dans une Note présentée à l'Académie des Sciences le 23 avril 1923; j'en indiquais ensuite un autre plus précis, relatif à un cas particulier. Ayant reconnu que cet autre résultat s'obtient très simplement sans faire intervenir la dérivée d'ordre fractionnaire, je ne l'indique pas ici. Je ne reviendrai pas non plus sur la généralisation de ce résultat, facile à déduire de la notion de dérivée d'ordre (α, β, γ) exposée dans la fin de ce travail.

9. On peut généraliser l'intégration par parties. Partons de l'identité

$$\int_0^\infty f(yx)\, g\left(\frac{1}{x}\right)\frac{dx}{x} = \int_0^\infty f\left(\frac{1}{X}\right) g(yX)\frac{dX}{X}.$$

En effectuant sur les deux membres de cette identité l'opération D_y^α, et faisant $y = 1$, il vient

$$(35)\qquad \int_0^\infty D^\alpha[f(x)]\, g\left(\frac{1}{x}\right) x^{\alpha-1}\, dx = \int_0^\infty f\left(\frac{1}{X}\right) D^\alpha[g(X)]\, X^{\alpha-1}\, dX.$$

Pour $\alpha = 1$, en remplaçant dans la deuxième intégrale X par $\frac{1}{x}$, on retrouve l'intégration par partie ordinaire.

Voici une application de cette méthode, un peu modifiée. Partons de la formule

$$\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{iyx}\, dx = y^{-\alpha}\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{ix}\, dx \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Effectuons sur les deux membres l'opération I_y^α. On vérifie aisément que l'intégration sous le signe somme est légitime, au premier membre, et il vient, en faisant $y = 1$,

$$\int_0^\infty \Omega_\alpha(x)\frac{dx}{x} = \Gamma(1-\alpha)\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{ix}\, dx,$$

ou, en utilisant la formule (34),

$$(36)\qquad \int_0^\infty \Omega_\alpha(x)\frac{dx}{x} = i^\alpha\,\Gamma(\alpha)\,\Gamma(1-\alpha) = \pi\,\frac{\cos\frac{\pi}{2}\alpha + i\sin\frac{\pi}{2}\alpha}{\sin\pi\alpha}.$$

(*A suivre.*)

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

LÉVY (PAUL). — LEÇONS D'ANALYSE FONCTIONNELLE. In-8, VI-442 pages. Paris, Gauthier-Villars, 1922.

Lors de l'apparition de cet Ouvrage, M. Paul Lévy m'avait fait l'honneur de me demander de présenter au public le sujet et l'auteur. Les termes dont je me servis sont ceux mêmes que j'aurais forcément à répéter aujourd'hui; je demande la permission de les reproduire purement et simplement pour commencer.

La tâche de signaler à l'attention du lecteur le Calcul fonctionnel aurait pu sembler importante il y a un quart de siècle: elle est bien simplifiée aujourd'hui.

Logiquement parlant, le Calcul fonctionnel aurait dû se constituer dès la naissance même de la notion d'intégrale définie ou, plus exactement, lorsque, avec cette notion, fut élaborée celle même de fonction au sens de Dirichlet, la fonction étant considérée comme définie non par telle ou telle série d'opérations analytiques, mais par la connaissance de toutes ses valeurs; l'intégrale définie fait précisément intervenir l'ensemble de ces valeurs et par là constituait un premier fait de Calcul fonctionnel. On n'aperçut point cependant qu'il y avait là, et dans le Calcul des Variations qui apparut bientôt après, une branche nouvelle de la Science. Il était réservé à M. Pincherle et surtout à M. Volterra d'en dégager l'individualité et d'en montrer l'importance. Cette importance, il n'est plus permis à un mathématicien de l'ignorer, depuis les Mémoires de M. Volterra sur les fonctions de lignes et les Leçons que l'illustre géomètre a professées à l'Université de Paris sur le même sujet.

Mais un autre fait a tout particulièrement contribué à rendre naturelle et familière à tous les géomètres la discipline d'esprit dont nous parlons : je veux parler de la théorie du problème de

Dirichlet et des vues nouvelles que nous a ouvertes sur ce sujet la découverte de M. Fredholm. Celle-ci nous a appris que même dans l'étude d'une équation aux dérivées partielles, il peut être essentiel de considérer les relations d'une des valeurs de la fonction inconnue non seulement avec les valeurs infiniment voisines, mais encore avec toutes celles que cette inconnue peut prendre dans son domaine entier d'existence. En un mot, il est aujourd'hui impossible de traiter la théorie des équations aux dérivées partielles sans la rattacher au Calcul fonctionnel.

S'il est devenu inutile d'insister sur le sujet du Volume qu'on va lire, est-il nécessaire d'en présenter au public l'auteur? A peine davantage. On sait par quels remarquables débuts M. Paul Lévy s'est signalé au monde scientifique. On sait comment, à côté de la généralisation de la notion de différentielle totale, telle qu'elle résulte des recherches de M. Volterra, il a pareillement étendu au nouveau domaine la notion d'équation aux différentielles totales complètement intégrable et comment cette nouvelle généralisation a jeté sur toutes les théories la plus vive et la plus féconde lumière.

Pendant cinq ans, M. Paul Lévy a donné à la Patrie une activité qui aurait été précieuse pour la Science. A celle-ci, il s'est de nouveau consacré tout entier. En même temps que l'œuvre de M. Volterra et la sienne propre, il en continue une autre qui s'annonce admirable : celle de R. Gateaux, tué à l'ennemi en septembre 1914, et dont l'œuvre si vite et si brutalement interrompue avait ouvert au Calcul fonctionnel la voie nouvelle de l'intégration.

Le lecteur verra à quel degré de clarté et d'harmonie cette théorie élevée a été amenée par les efforts de pareils savants. Nul doute, et c'est l'essentiel, qu'il n'y trouve également l'occasion d'applications importantes et de progrès nouveaux.

Juin 1922.

Ce sujet d'ores et déjà immense, M. P. Lévy n'a pas songé à le traiter entièrement et il n'y pouvait pas songer. Il aurait fallu, tout d'abord, parler de la théorie de Fredholm à laquelle je faisais allusion tout à l'heure, et cela seul aurait demandé un volume plus étendu que celui qui nous occupe : il en faudrait un autre pour les

remarquables théories de permutabilité et de composition de M. Volterra.

Pour la même raison, il ne pouvait être question de reprendre l'exposé du Calcul des Variations, premier Chapitre et, historiquement, première forme du Calcul fonctionnel; et cependant, force est de rappeler les notions fondamentales de celui-là, qui sont indispensables pour l'intelligence de celui-ci : voisinages des divers ordres, champs fonctionnels, variation.

Pour M. Lévy, d'ailleurs, le Calcul des Variations rentre dans ce qu'il appelle l'*Algèbre fonctionnelle*. L'auteur établit, en effet à l'intérieur du Calcul fonctionnel, une distinction intéressante et profonde, toute parallèle à celle qui existe, dans le calcul classique, entre l'Algèbre et l'Analyse. Cette dernière peut être, en somme, définie comme concernant les problèmes qui n'ont pas de sens tant qu'on ne fait pas varier les nombres, tandis que l'Algèbre pose des problèmes relatifs à des nombres fixes, même si, comme il arrive très souvent, il est utile d'introduire des variables pour résoudre ces problèmes. Toutes ces circonstances se retrouvent en Calcul fonctionnel.

Qu'il s'agisse d'Algèbre fonctionnelle ou d'Analyse fonctionnelle, il faut toujours partir d'une fonction arbitraire f considérée dans un intervalle déterminé (s'il s'agit de fonctions d'une variable) et tenir compte des diverses valeurs qu'elle prend dans cet intervalle. La méthode indiquée pour cela est, le plus souvent, celle dont la fécondité a été mise en évidence par M. Volterra et qui consiste à insérer, dans l'intervalle donné, un certain nombre (très grand) de moyens $x_1, x_2, \ldots, x_n$, valeurs de x pour lesquelles on forme les valeurs correspondantes $f_1, f_2, \ldots, f_n$ de f. Si maintenant on a à étudier une *fonctionnelle* de f, c'est-à-dire une quantité U dont la valeur dépend de la forme de la fonction f dans l'intervalle donné, on pourra, à titre de première approximation, au moins dans certains cas, la remplacer par une certaine fonction de $f_1, f_2, \ldots, f_n$, en se réservant de faire croître n indéfiniment.

A cette méthode s'en oppose, il est vrai, une autre d'un caractère très différent, reposant sur tel ou tel développement en série (par exemple, en série trigonométrique) de la fonction f, laquelle est alors considérée comme définie par la connaissance des coeffi-

cients de ce développement. U devient ainsi une fonction d'une infinité dénombrable de variables, les coefficients en question. Je crois bien que la préférence relative à accorder à ces deux méthodes est, dans une assez large mesure, affaire de tempérament : la question n'est peut-être pas sans rapport avec celle qu'avait soulevée certain Mémoire de M. Zermelo, et qui fit couler pas mal d'encre il y a une dizaine d'années sans que la discussion ait sérieusement modifié les mentalités qui, pour le moment, semblent innées. Nul doute cependant, que M. Lévy n'ait entièrement raison d'attribuer le rôle principal à la méthode indiquée par M. Volterra : comme il le fait remarquer fort justement, personne n'aura, malgré tout, l'idée d'introduire la notion d'intégrale définie en disant que la fonction

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

a pour intégrale

$$c + a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{a_n x^{n+1}}{n} + \ldots.$$

A ces premières généralités tient encore de très près le Chapitre II, établissant la notion de continuité dans le domaine fonctionnel. La définition de la continuité uniforme fait intervenir la notion d'ensemble *compact* due, comme on sait, à M. Fréchet. M. Lévy aurait pu se placer, d'une manière systématique, au point de vue particulièrement philosophique de ce géomètre et considérer des « fonctionnelles » d'une nature plus générale, portant non plus seulement sur des fonctions, mais sur des éléments de nature tout à fait quelconque. On comprend qu'il ait voulu ici encore borner sa tâche, si intéressante que fût, une fois de plus, celle qui s'offrait à lui.

Il ne peut d'ailleurs aborder celle qu'il a en vue sans un nouveau Chapitre préliminaire, soubassement aussi indispensable à l'édifice du Calcul fonctionnel que l'est l'étude des irrationnelles à la théorie des fonctions : de même qu'ici, avant de prendre le nombre pour variable, force est d'être fixé sur ce que sont tous les nombres possibles, là, on est bien obligé de porter tout d'abord son attention sur les fonctions les plus générales et plutôt que de supposer au lecteur la connaissance des principes modernes de MM. Borel, Baire, Lebesgue, M. Lévy donne un résumé substantiel relatif aux fonctions sommables et à variation bornée, à l'intégrale

de Stieltjes, etc. A noter qu'ici on se rapproche à nouveau du point de vue de M. Fréchet, avec la notion de fonction d'ensemble, dont tous ceux qui ont entendu M. de la Vallée Poussin au Collège de France connaissent la fécondité.

On entre au contraire, résolument au cœur du sujet, avec la variation première et les fonctionnelles linéaires. C'est la généralisation, au domaine qui nous occupe, de la notion de différentielle, généralisation qui doit également beaucoup à M. Fréchet.

Avec elle s'introduit la notion et l'étude des fonctionnelles linéaires. Une relation tout analogue, que l'auteur expose en se plaçant encore au point de vue de M. Fréchet, unit les variations d'ordres quelconques aux fonctionnelles d'ordre supérieur à propos desquelles apparaissent, en même temps qu'un résultat de M. Fréchet, ceux que, sur ce sujet, l'on doit à Gâteaux. La notion de fonctionnelle polynome est ainsi constituée, et l'on peut considérer les développements des fonctionnelles continues en séries de telles fonctionnelles polynomes ou en séries analogues aux séries de Taylor.

C'est seulement à ce moment que l'auteur (se bornant à cet égard comme nous l'avons dit, aux résultats essentiels, ceux qui lui sont indispensables dans la suite) rappelle les propriétés connues des équations de Fredholm et de Volterra, lesquelles, pour être exposées au point de vue de la théorie actuelle, présupposent les notions qui viennent d'être introduites. Une équation de Fredholm définit, pour l'Analyse fonctionnelle, une transformation ponctuelle dans l'espace fonctionnel, et le problème qui se pose à son égard est celui de l'inversion de cette transformation. Le cas traité par Fredholm est celui de la transformation linéaire ; mais on sait comment, par analogie avec ce qui se passe en Analyse classique, MM. Volterra d'une part, Ehrhardt Schmidt de l'autre, y ont ramené des cas plus généraux en introduisant la variation de la fonctionnelle qui définit la transformation ([1]).

([1]) M. Ehrhardt Schmidt a même traité le cas où le déterminant de l'équation de Fredholm ainsi obtenue s'annule (cas correspondant à celui d'une transformation ponctuelle ordinaire autour d'un point où le jacobien s'annule); sa méthode dépend essentiellement de développements en fonctionnelles polynomes tels que ceux dont il a été question un peu plus haut, et mériterait peut-être d'être reprise en utilisant les précisions obtenues depuis sur ce point.

Enfin, par les notions d'orthogonalité qui s'y rattachent, les théories dont nous venons de parler introduisent les conceptions fondamentales de la *géométrie* de l'espace fonctionnel.

Tout ceci est encore, en somme, de l'Algèbre fonctionnelle. Il n'en est plus de même de la deuxième Partie de l'Ouvrage, consacrée aux *équations aux dérivées fonctionnelles du premier ordre*. Ici l'inconnue est une fonctionnelle U (nous sommes donc bien en Analyse fonctionnelle et non en Algèbre); $x(t)$ étant la fonction (de la variable indépendante t) dont dépend U, la *dérivée fonctionnelle* de U par rapport à x est le coefficient de δx, sous le signe $\int$, dans la variation δU. Cette quantité qui dépend généralement, bien entendu, de la forme de la fonction x (c'est-à-dire qui est elle-même une fonctionnelle) est aussi, d'autre part, une fonction de t, et les équations aux dérivées fonctionnelles qu'on est conduit tout d'abord à considérer font connaître la forme de cette fonction. Comme elle est ainsi définie pour toutes les valeurs de t, on a ainsi l'analogue, non d'une équation aux dérivées partielles, mais d'une équation aux différentielles totales.

Ce point de vue, et toute la théorie qui en découle, appartient entièrement à M. Paul Lévy et, à ce titre, cette deuxième Partie est, pour une grande part, son œuvre propre.

Comme l'équation aux différentielles totales, l'équation aux dérivées fonctionnelles aura sa *condition d'intégrabilité;* c'est cette condition dont la formation est le résultat essentiel de M. Paul Lévy. Pour l'obtenir, supposons d'abord, conformément à la méthode classique du Calcul des Variations, que la fonction x, au lieu d'être complètement arbitraire, dépende seulement d'un paramètre variable λ : alors l'équation donnée [absolument comme il arrive pour une équation aux différentielles totales entre x, y, z si l'on astreignait le point (x, y, z) à décrire une ligne donnée] se réduit à une équation différentielle ordinaire, dans laquelle λ est la variable indépendante. Dans un cas comme dans l'autre il faut, pour définir entièrement la solution, s'en donner la valeur *initiale*, celle, par exemple, qui correspond à $\lambda = 0$; après quoi une méthode d'approximations successives, celle de M. Picard par exemple, en fournira la valeur pour chaque valeur de λ.

En résumé, si nous considérons deux fonctions $x_0(t)$, $x_1(t)$ *et*

une ligne L de l'espace fonctionnel joignant l'une à l'autre [c'est-à-dire une série continue de fonctions $x(t; \lambda)$ telles que $x(t; 0) = x_0(t)$, $x(t; 1) = x_1(t)$], et nous donnons la valeur de U correspondant à $x(t) = x_0(t)$, il en résultera une valeur déterminée de U correspondant à $x(t) = x_1(t)$.

Nous avons à exprimer que ce dernier résultat est indépendant du chemin L suivi pour aller de la fonction initiale à la fonction finale. C'est ce qui se fait par des méthodes inspirées du Calcul des Variations classique; M. Lévy obtient ainsi deux conditions simultanées. Il faut qu'une certaine fonction $\varphi(t, t_1)$ soit symétrique par rapport aux deux variables qu'elle contient et, d'autre part, qu'une certaine expression différentielle linéaire soit identique à son adjointe.

Le cas le plus intéressant est, comme pour les équations aux différentielles totales classiques, celui où l'équation est *complètement intégrable*, c'est-à-dire où les conditions d'intégrabilité sont identiquement vérifiées.

Un exemple simple est donné par le cas où la fonctionnelle cherchée dépend d'une ligne plane C et, en outre, des positions de deux points A, B. Le calcul des conditions d'intégrabilité montre alors que, moyennant des hypothèses complémentaires très générales, l'équation doit se ramener à la forme

$$\delta U_B^A = \int_C U_M^A U_B^M \delta n \, ds.$$

Inversement, cette équation est complètement intégrable; une quelconque de ses solutions est définie et peut être calculée par approximations successives, lorsqu'on en donne la valeur (en fonction des coordonnées de A et de B) pour une position déterminée du contour C, *étant supposé toutefois qu'il s'agisse d'une solution régulière*.

La nécessité de cette dernière restriction apparaît dès le Chapitre suivant, consacré au problème de Dirichlet et à la fonction de Green.

Nul cas où l'importance du Calcul fonctionnel se montre mieux. Les éléments qui figurent dans la solution du problème de Dirichlet et, particulièrement la fonction de Green, ne dépendent

pas seulement d'un ou plusieurs points : ils dépendent aussi, essentiellement, de la forme du contour C à l'intérieur duquel la fonction harmonique cherchée doit être calculée. Lorsqu'on déforme continûment ce contour, les éléments éprouvent des variations infinitésimales qui sont régies par les principes précédents et la fonction de Green, par exemple, admet, par rapport à une telle déformation, une dérivée fonctionnelle dont on peut calculer l'expression.

Fidèle aux principes qu'il a adoptés, l'auteur commence par rappeler les fondements classiques de la théorie du problème de Dirichlet, sous la forme où ils lui seront utiles. On remarquera d'ailleurs les vues personnelles et profondes que ses travaux l'ont conduit à y ajouter et, en particulier, la manière suggestive dont il fait intervenir la quantité $\frac{d^2 g_B^A}{dn_A\,dn_B}$ dérivée seconde de la fonction de Green prise par rapport aux déplacements normaux (à partir du contour) des deux points dont elle dépend.

La formule qui exprime la variation de la fonction de Green g par déformation du contour donne, pour cette quantité, une première équation aux dérivées fonctionnelles, non complètement intégrable celle-là, et dont les conditions d'intégrabilité se comportent de manière assez différente suivant les singularités supposées à la solution. Quant à la dérivée seconde $\frac{d^2 g_B^A}{dn_A\,dn_B}$ (supposée définie même pour les points intérieurs, grâce à l'intervention d'une famille de contours dérivant de C par déformation continue), elle vérifie précisément l'équation aux dérivées fonctionnelles complètement intégrable écrite plus haut. On peut se proposer de tirer de là une méthode de calcul de la fonction de Green considérée comme fonctionnelle dépendant du contour (et, par conséquent, de résolution du problème de Dirichlet); malheureusement les singularités de cette fonction créent, en l'espèce, de graves difficultés.

Que doit-on maintenant entendre par équation aux dérivées fonctionnelles *partielles?*

Supposons que la fonctionnelle inconnue U ait à dépendre de deux fonctions arbitraires $x(t)$, $y(t)$. Si nous nous donnions des expressions auxquelles doivent être égales les deux dérivées fonc-

tionnelles de U par rapport à $x(t)$ et par rapport à $y(t)$, le problème appartiendrait à la catégorie qui vient d'être étudiée. Mais si l'on ne donne qu'une relation entre ces deux dérivées (relation contenant, en général, les fonctions x, y elles-mêmes ainsi que U), on est en face d'un type nouveau encore analogue à l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles à une seule fonction inconnue, mais dans lequel le nombre des équations est inférieur à celui des variables indépendantes (et non égal à ce nombre comme il arrive pour les équations aux différentielles totales). Il y aura donc encore des conditions d'intégrabilité; mais, d'autre part, on trouve des analogies surprenantes avec la théorie de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre. Traçant ce qu'il appelle une *courbe* (et qu'il ne faut pas confondre avec une ligne) dans l'espace fonctionnel, c'est-à-dire un lieu de points dépendant d'une fonction arbitraire (de sorte que l'une des deux fonctions $x(t)$, $y(t)$ restant arbitraire, l'autre est définie pour chaque détermination de la première). M. Lévy est arrivé à choisir une telle courbe de manière qu'elle soit « caractéristique » et jouisse de toutes les propriétés classiques des caractéristiques ordinaires pour le cas du premier ordre. La notion d'intégrale complète se transporte également au problème actuel.

Le cas du Calcul des Variations à deux variables indépendantes, déjà classique par les travaux de MM. Volterra et Fréchet, fournit une illustration remarquable de ces principes. L'étude de l'extremum d'une intégrale simple $\int_a^b f(x, y, y')\,dx$ conduit, comme on le sait depuis Jacobi et Hamilton, à une équation aux dérivées partielles. Tout pareillement M. Volterra puis M. Fréchet ont considéré le minimum de l'intégrale double

$$I = \int\int_S f(x, y, z, p, q)\,dx\,dy \qquad \left(p = \frac{\partial z}{\partial x}, \; q = \frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

la surface $z = z(x, y)$ étant assujettie à passer par un contour fermé donné C et l'aire d'intégration S étant limitée à ce contour. Un tel minimum (la forme de la fonction f étant supposée donnée une fois pour toutes) dépend uniquement du choix du contour C. C'est donc une fonctionnelle où entrent les seconds membres des

équations $y = g(x)$, $z = h(x)$ de ce contour. Comme telle, elle vérifie une équation aux dérivées fonctionnelles dont la formation, particulièrement en ce qui concerne l'intégrale classique de Dirichlet $\int\int\left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy$, figure dans les *Leçons sur les Fonctions de lignes*, professées à la Sorbonne par M. Volterra, et dont on peut déterminer les caractéristiques.

Il semble que l'on doive, ensuite, passer aux équations aux dérivées fonctionnelles du second ordre. Mais, absolument comme il arrive dans l'Analyse classique, ceci n'est possible qu'après l'introduction des notions d'intégrales de diverses espèces, et c'est ce qui fait l'objet de la troisième Partie de l'Ouvrage. Ici, M. Lévy se montre le continuateur de René Gâteaux.

C'est à Gâteaux que l'on doit, en effet, d'avoir abordé pour la première fois la généralisation des notions de volume et d'intégration à l'espace fonctionnel. Elles se présentent, d'ailleurs, sous une forme profondément différente de celle à laquelle nous sommes habitués, et il ne semble pas, quant à présent, que l'analogie puisse être rendue plus complète. Si, en effet, on tient compte de ce que le nombre des dimensions (lequel figure en exposant dans le rapport des étendues de deux figures homothétiques) est infiniment grand, on constate que, dans l'espace fonctionnel, la mesure d'un volume quelconque est en général nulle ou infinie. Par exemple, si avec Gâteaux on commence par réduire la fonction $x(t)$, définie dans l'intervalle (0, 1), à une « fonction simple », c'est-à-dire à une fonction prenant la valeur constante x_1 pour $0 \leq t < \frac{1}{n}$, la valeur constante x_2 de $t = \frac{1}{n}$ à $t = \frac{2}{n}$, ..., la valeur constante x_n de $t = \frac{n-1}{n}$ à $t = 1$, la condition

$$(1) \qquad \int_0^1 x^2(t)\,dt \leq R^2,$$

qui définit un « volume sphérique » de rayon R dans l'espace fonctionnel, donnera entre $x_1, \ldots, x_n$ l'inégalité

$$x_1^2 + \ldots + x_n^2 \leq nR^2,$$

laquelle correspond à une sphère de rayon $R\sqrt{n}$ dans l'espace

à n dimensions (ce qu'on appellera la « $n^{\text{ième}}$ section » V_n du volume considéré); or le volume V_n de cette sphère tend vers 0 ou vers ∞ pour $n = \infty$, suivant que R est au plus égal ou qu'il est supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2\pi e}}$.

C'est pour la même raison que, comme l'avait déjà fait voir M. Borel, tout le volume d'une sphère est dans ces conditions, concentré au voisinage immédiat de la surface et la surface au voisinage immédiat de l'équateur.

Tout au plus peut-on être utilement conduit, dans certains cas, à mesurer un volume sous la forme $\mathcal{F}(\omega)$, où ω est un symbole d'entier infiniment grand et $\mathcal{F}$ une fonction ou type de croissance comme les a souvent considérés M. Borel (dans les cas les plus usuels on trouve, pour $\mathcal{F}$, une valeur de la forme $c\omega^{\beta}a^{\omega}$). C'est cette fonction qui exprime asymptotiquement, en fonction de n, le volume V_n déduit de la $n^{\text{ième}}$ section définie comme nous l'avons dit tout à l'heure.

Dans ces conditions, ce n'est pas la notion d'intégrale qu'il est préférable d'introduire, mais celle de *valeur moyenne* ([1]), dont Gâteaux a formé l'expression pour une fonctionnelle considérée dans le domaine sphérique (1). On conçoit, d'après ce qui précède, comment il peut arriver très généralement que la fonctionnelle soit presque partout sensiblement égale à sa valeur moyenne; de sorte qu'une seule de ses valeurs intervient en fin de compte, du moins pour un mode de continuité convenable de la fonctionnelle considérée.

Les mêmes circonstances apparaissent sous un jour un peu différent, en partant du second des points de vue dont nous avons parlé au commencement ([2]), c'est-à-dire lorsqu'on définit une fonction par une infinité dénombrable de paramètres. Ce sont, à nouveau ici, les théories relatives aux équations intégrales qui

---

([1]) On retrouve des conclusions du même ordre lorsqu'on part du point de vue tout à fait général de M. Fréchet. C'est ainsi que le problème a été abordé, sans la connaissance des travaux de Gâteaux, dans des Notes très intéressantes de MM. Daniel (*Annals of Mathematics*, t. XIX, XX) et Norbert Wiener, *Ibid.*, t. XXI).

([2]) La question avait été abordée ainsi à propos de certaines théories physiques récentes.

interviennent et, en particulier, la théorie des formes quadratiques à une infinité de variables de M. Hilbert. A noter toutefois que, outre les notions classiques de suite de fonctions orthogonales et normales, on a à en considérer deux autres (suite « également dense » et suite « normalement dense ») qui dépendent de l'ordre dans lequel les termes sont rangés.

En opérant ainsi on peut même arriver à des notions correspondant à celle d'intégrale, grâce aux vues que nous avons acquises sur cette dernière par les travaux de M. Lebesgue.

Une dégénérescence tout analogue à celle que nous avons signalée en ce qui concerne le volume et l'intégrale se présente également pour d'autres notions géométriques ou analytiques. Telle est tout d'abord celle de courbure moyenne, où il faut d'ailleurs avoir soin de prendre vraiment une moyenne de courbures (et non comme on le fait en géométrie classique, une somme); ici encore on constate que la courbure d'une section normale est, en réalité, la même dans presque toutes les directions. C'est la courbure moyenne ainsi définie qui intervient lorsqu'on cherche à étudier, pour un volume fonctionnel V de forme quelconque, la concentration près de la surface déjà constatée pour un volume sphérique : on trouve que la valeur moyenne, dans le volume V, d'une fonctionnelle uniformément continue, est égale à sa valeur moyenne sur la surface S qui limite ce volume, mais en attribuant à chaque élément un poids proportionnel, d'une part à son étendue, de l'autre à son rayon de courbure moyenne. Aucune difficulté n'est généralement occasionnée par les points de S où le rayon de courbure est infini, points dont on peut ne pas tenir compte; mais, par contre, la conclusion précédente suppose la continuité du plan tangent (continuité à la Lipschitz, ce qui limite la courbure); s'il y a, par exemple, une ligne de points anguleux, c'est cette ligne qui comptera à peu près exclusivement pour le calcul de la valeur moyenne. Si l'on note encore, par exemple, que le produit de la courbure moyenne d'une surface par la distance du plan tangent à l'origine des coordonnées est presque partout égal à 1, on voit combien les énoncés géométriques changent d'aspect en passant à l'espace fonctionnel.

Le paramètre différentiel du second ordre ΔU doit de même être défini comme une moyenne, et non comme une somme des

dérivées secondes. La fonction $x(t)$ dont dépend notre fonctionnelle U étant toujours considérée dans l'intervalle (o, 1), le paramètre différentiel en question sera $\int_0^1 U''_{x^2}\,dt$, valeur moyenne (au sens de l'Analyse classique) de la dérivée fonctionnelle du second ordre U''_{x^2} dans cet intervalle. On pourrait aussi, en se plaçant au point de vue de la représentation par série $x(t) = \Sigma a_n f_n(t)$, de sorte que U est une fonction des variables $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, prendre comme paramètre différentiel du second ordre la limite vers laquelle tend, pour n infini, la moyenne des dérivées secondes $\frac{\partial^2 U}{\partial a_1^2}, \frac{\partial^2 U}{\partial a_2^2}, \ldots, \frac{\partial^2 U}{\partial a_n^2}$. Il se trouve que les deux définitions concordent pourvu que la suite des fonctions fondamentales f_n soit convenablement choisie, à savoir qu'elle soit ce que l'auteur a précédemment appelé « également dense ».

Les règles de calcul de ce symbole (dans lequel il ne faut pas oublier que la dérivée U''_{x^2} est beaucoup plus profondément différente de la dérivée seconde mixte U''_{xx_1} que cela n'a lieu en Analyse ordinaire) diffèrent notablement des règles classiques et sont d'ailleurs plus simples; elles se rapprochent de celles qui concernent les dérivées premières. L'étude de l'équation de Laplace $\Delta U = 0$ (dont les solutions seront encore appelées fonctionnelles harmoniques) participe de ce même caractère et le problème de Cauchy s'y pose par la donnée de U seul sur une surface, la valeur de la dérivée normale s'en déduisant, si la courbure moyenne n'est pas nulle. Le cas de la courbure moyenne nulle, autrement dit des surfaces minima, joue un rôle tout spécial, et les fonctionnelles U harmoniques ne sont autres que celles pour lesquelles les surfaces $U = \text{const.}$ sont des surfaces minima. Le problème de Dirichlet se résout beaucoup plus simplement qu'en Analyse ordinaire; il arrive en effet que, dans la formule correspondant à la formule classique qui donne la valeur d'une fonction harmonique à l'intérieur d'une surface fermée, le potentiel de simple couche, seul terme où figure la dérivée normale à la surface, disparaît, de sorte que la solution est immédiatement donnée par le terme potentiel de double couche. Le théorème sur la moyenne des valeurs d'une fonction harmonique à la surface d'une sphère reste vrai.

Ajoutons que potentiel de simple couche et potentiel de double couche sont deux notions beaucoup moins distinctes que dans l'espace ordinaire : puisqu'un potentiel de simple couche superficielle de densité μ se ramène à un potentiel de double couche de densité μR, en appelant R le rayon de courbure moyenne.

Bien d'autres relations aussi curieuses s'introduisent par la considération des potentiels de volume, l'étude géométrique des surfaces et des variétés minima, etc. Nous ne pouvons ici y insister davantage et nous n'avons pu donner qu'une idée bien sommaire et très rudimentaire de ce sujet si riche en points de vue nouveaux si fécond aussi en applications et en recherches ultérieures; d'intéressantes indications sont données à cet égard par l'auteur dans un dernier Chapitre. Soyons reconnaissants à M. Paul Lévy d'y avoir initié le public français.

JACQUES HADAMARD.

DICKSON (L. E.), MITCHELL (H. H.), VANDIVER (H. S.), WAHLIN (G. E.). — ALGEBRAIC NUMBERS. *Bulletin of the National Research Council.* Vol. 5, Part. 3, n° 28, 1923. Un volume in-8°, 96 pages. Publié par le National Research Council of the National Academy of Sciences, Washington.

Ce petit pamphlet, écrit avec le plus grand soin, à peu près dans le style de l'Histoire de la Théorie des Nombres de M. Dickson, rendra de grands services à ceux qui s'intéressent aux nombres algébriques. Les auteurs se sont surtout proposé de compléter et de continuer le rapport de M. Hilbert sur le même sujet.

L'Ouvrage comprend quatre Chapitres. Le premier est consacré aux nombres algébriques en général, le second à la cyclotomie (racines de l'unité), le troisième aux nombres p-adiques de Hensel, le dernier aux corps fonctionnels.

On ne saurait trop se féliciter de voir enfin paraître de tels rapports. Tous les jours la littérature scientifique voit naître de

nouvelles ramifications, les écrits nouveaux s'amoncellent à qui mieux mieux. Dans ce labyrinthe, le chercheur s'intéressant à une question bien définie éprouve un besoin aigu d'un guide de toute confiance. Pour la Théorie des Nombres, il y a la magnifique Histoire de M. Dickson, pour les nombres algébriques le Rapport Hilbert et celui des quatre auteurs américains.

S. Lefschetz.

« QUAND LA LUMIÈRE FUT... », par Louis Maillard, professeur d'Astronomie à l'Université de Lausanne. Deux volumes 18 × 26^{cm}, 500 pages avec 83 figures et 42 planches hors-texte.

Les Presses universitaires de France, Paris 1923. Prix : 32^{fr},50.

Le problème des origines du monde est de tous les temps et de tous les peuples, ainsi qu'en témoignent d'innombrables mythes et légendes, dont plusieurs remontent à une antiquité fort reculée. Mais c'est surtout depuis les immortels travaux des précurseurs et créateurs de la Mécanique céleste que les études cosmogoniques ont bénéficié, par contre-coup, d'une faveur marquée, tant sont divers et imprévus les phénomènes qui, dans la suite des âges, sont venus modifier l'aspect du grand problème. De nos jours, des mathématiciens et astronomes, même parmi les plus illustres, n'ont pas dédaigné de consacrer leurs efforts à ce problème, dont les données hypothétiques laissent un cours assez libre à l'imagination. Ainsi, dans ce domaine tangent à celui des questions éternelles, on progresse. Et nulle histoire n'est plus instructive que celle de cette recherche inaugurée par le premier homme qui s'est demandé : Qu'est-ce que le monde et quelle est son origine ? Ce sont ces pages d'histoire que M. Louis Maillard expose dans les deux volumes pittoresquement intitulés : *Quand la lumière fut...*.

Ce bel et important Ouvrage est de ceux qu'il est agréable de connaître et de faire connaître. La personnalité de l'auteur s'y révèle avec une telle continuité, dans l'analyse des légendes antiques comme dans la discussion des théories les plus récentes.

qu'on se sent en présence d'une œuvre longuement méditée, écrite avec clarté, rigueur et impartialité. Ces deux volumes placent leur auteur au rang des plus érudits historiens de la science.

Le Tome Ier est divisé en deux parties : l'une est consacrée à l'étude des cosmogonies mythiques des peuples anciens, non civilisés et civilisés, — l'autre à celle des hypothèses géométriques des Grecs. D'abord, l'auteur raconte, dans un style alerte et imagé, les principales légendes cosmogoniques. Il y a une telle distance entre ces contes naïfs et les théories modernes qu'on a peine à reconnaître leur filiation, pourtant certaine. Et c'est un des grands mérites de M. Louis Maillard d'avoir fait ressortir la continuité, souvent peu apparente, des explications : mythiques, poétiques, religieuses, philosophiques, scientifiques. L'Ouvrage devient ainsi un des plus saisissants tableaux qui se puissent imaginer de la puissance évolutive de l'esprit humain.

Dans les mythes, partout la fantaisie la plus absolue semble régner à l'exclusion de toute idée directrice. Rien de scientifique ne semble pouvoir être extrait de tels récits, qui dévoilent la mentalité enfantine des primitifs. Toutefois, on constate entre eux certains points de contact intéressants. Que faut-il conclure de ces analogies ? Les relations entre peuples expliquent le mélange de leurs idées générales. Au surplus, dit M. Maillard : « *Tout de l'homme est borné..., et dans un champ limité d'hypothèses sur un sujet donné, les rencontres d'idées sont probables* ». Ainsi, les analogies se retrouvent même chez des peuples n'ayant eu vraisemblablement aucun commerce direct ou indirect, comme ceux d'Afrique et d'Amérique, par exemple.... A moins qu'elles ne fournissent la preuve d'une antique liaison intercontinentale, rompue par un effondrement (Atlantide), ou, suivant la théorie récente de Wegener, par un phénomène de dérive.

En fait, le problème des origines consiste en une vaste extrapolation dans le temps et dans l'espace. Il est donc indispensable, pour le résoudre, de connaître d'abord l'état actuel du monde et le sens de son évolution. L'astronomie ne peut avancer qu'en raison des progrès des autres sciences physiques et mathématiques. Ne nous étonnons donc pas des balbutiements primitifs. Avec les découvertes, le problème cosmogonique a pris et prendra toujours plus d'extension. Limité d'abord à la création d'une contrée ou

d'une île, il embrassera par la suite la Terre entière, puis le système solaire, et même, au gré d'hypothèses récentes, l'univers visible tout entier. Mais les théories proposées perdent en précision plus peut-être qu'elles ne gagnent en généralité.

De grands philosophes grecs (logiciens, physiciens, mathématiciens) étudièrent le système du monde; M. Maillard consacre la seconde partie de ce volume aux recherches astronomiques poursuivies dans les Écoles fécondes qui brillèrent du — VIe au — IIe siècle, bien que la cosmologie y tienne souvent plus de place que la cosmogonie : « *Les naturalistes d'Ionie et leurs disciples de la Grande Grèce s'en tiennent aux apparences immédiates d'un monde très borné. Dans leurs essais, la recherche des causes naturelles s'affirme. Leurs cosmogonies empruntent, le sachant ou non, bien des notions et des idées à l'Orient, en particulier à l'Inde, la Chaldée et l'Égypte. — Les observations continues des navigateurs vont suggérer instamment que la Terre n'est pas plane, mais sphérique. Pour Pythagore et son École, pour Platon, Eudoxe, Calippe et Aristote (le prince de la philosophie), la sphère terrestre est immobile au centre de l'univers. Un système rationnel se développe : sur des sphères homocentriques, les astres effectuent des rotations uniformes. — Pour Apollonius de Perge, — puis pour Hipparque et Ptolémée, ces grands maîtres, — autour de la Terre immobile, le Soleil et les planètes décrivent des excentriques, fixes ou mobiles, ou des épicycles variés. — Cependant, Philolaüs, Hicétas et Ecphantus se risquent à doter la Terre d'une rotation diurne. Aristarque de Samos, — peut-être, avant lui, Héraclide du Pont, — émet l'hypothèse hardie et vraie du système héliocentrique : les planètes, — la Terre entre autres — tournent autour du Soleil.* »

Comme on le voit, dans la profusion des idées qui ont jailli sous le ciel de l'Ionie, de l'Attique ou de la Grande Grèce, certaines étaient fort en avance sur les connaissances positives de l'époque. Il ne leur a manqué, pour s'imposer définitivement, que d'être sanctionnées par une longue série d'observations bien faites.

* * *

Plus tard, en plein moyen âge, Baudoin de Courtenay cite cette opinion, déjà ancienne peut-être, que le Soleil est de nature attrac-

tive comme les aimants. « *Cette idée que les corps célestes sont soumis aux mêmes lois que les corps terrestres ne pouvait effleurer les philosophes grecs persuadés que les cieux et les astres sont incorruptibles, divins, éternels. Placer les astres sous la loi commune à toutes choses c'était préparer — de loin — les voies de la Mécanique céleste.* »

Pour y arriver, il n'a pas suffi de la subtile logique de Nicole Oresme, de la dialectique confuse de Nicolas de Cusa, et des élucubrations scolastiques de tant d'autres astronomes en chambre. Seules les observations remises en honneur par Purbach et Regiomontanus, puis réalisées systématiquement par Tycho-Brahé et ses collaborateurs, permirent à la science d'accomplir, au XVIe et au XVIIe siècle, les progrès merveilleux qui nous apparaissent encore aujourd'hui avec un éclat incomparable.

Dans la première partie du Tome II, l'auteur brosse un tableau saisissant et vigoureux de cette période héroïque de l'astronomie : il s'arrête avec une prédilection marquée à l'œuvre grandiose de Copernic, Képler et Galilée, — aux tourbillons de Descartes et de Swedenborg, — enfin aux travaux immortels de Newton, révélant la gravitation universelle.

Dans la deuxième partie, M. Maillard résume d'abord, dans un exposé clair et concis, l'état actuel de nos connaissances les plus précises sur le Cosmos, passant en revue le Soleil, les planètes et leurs satellites, les comètes, les étoiles, les amas stellaires, les nébuleuses, la galaxie, etc. Le lecteur, ainsi initié aux plus belles découvertes de l'Astronomie, peut suivre aisément l'exposé des hypothèses cosmogoniques modernes. Les quelques chapitres qu'il comporte forment naturellement le point culminant de l'Ouvrage. Toutes les qualités qui font la haute valeur de ces deux volumes s'y trouvent réunies. M. Louis Maillard, auteur lui-même d'une hypothèse cosmogonique, apprécie les travaux de ses confrères avec une grande largeur de vues et une impartialité parfaite. Dans un style dont la précision scientifique n'exclut pas l'élégance, l'auteur met en lumière l'idée directrice qui, des timides essais du commencement du XVIIIe siècle, conduira les chercheurs aux vastes synthèses que nous admirons aujourd'hui.

Une connaissance de plus en plus précise de la Terre et de ses roches avait assez généralement répandu l'idée d'un état primitivement fluide des planètes. De là à conclure qu'elles sont peut-être

issues du Soleil lui-même, il n'y avait qu'un pas. Buffon émet l'hypothèse que les planètes ont été séparées simultanément du Soleil par une comète sillonnant la surface de l'astre. L'étroit lambeau de matière (la sept-centième partie de la masse solaire), grâce à l'attraction des particules, se transforme en globes qui gravitent dans un même plan et dans le même sens. Les faibles excentricités sont contraires à la théorie de Buffon, qui, par ailleurs, ne rend pas compte des sens de rotation des planètes et des satellites.

« *Kant, le premier, conçoit la génération du système solaire à partir d'une nébuleuse fictive, où la variété des masses et des mouvements est très grande. Tout finit par s'y organiser grâce à l'attraction et aux actions moléculaires; les particules décrivent alors dans le même sens, autour d'un noyau présolaire, des cercles concentriques situés à peu près sur le même plan. La nébuleuse étant d'abord hétérogène, le noyau primitif d'une planète peut se former accidentellement, en n'importe quel point du sphéroïde nébuleux.* » La théorie, dépouillée de tous calculs, ne peut résister à un examen critique. Il était réservé à Laplace de mettre plus de rigueur dans les déductions.

Sa fameuse hypothèse cosmogonique est bien connue. La nébuleuse solaire est animée d'un mouvement de rotation qui s'accélère par le fait de la contraction. La force centrifuge à l'équateur finit par équilibrer la pesanteur, et des anneaux — qui deviendront les planètes — se détachent de la masse centrale.

L'hypothèse explique bien la coïncidence approchée des plans des orbites planétaires avec celui de l'équateur solaire; les faibles excentricités, le sens direct des révolutions et des rotations sont conformes à la théorie. « *Elle rendait compte avec une simplicité séduisante des harmonies du système alors connu. Elle n'est plus en rapport avec l'Astronomie actuelle, et Laplace s'en fût aperçu avant tous.* » En particulier, les rotations rétrogrades d'Uranus et de Neptune ne peuvent s'expliquer dans la théorie de Laplace sans faire intervenir des phénomènes secondaires, comme les marées, auxquels on a du reste fait jouer un rôle beaucoup trop considérable.

Selon Faye, la nébuleuse primitive est d'abord homogène, puis nucléée. Les planètes prennent naissance au sein même de la masse

nébulaire. L'attraction sur l'une d'elles est à l'origine proportionnelle à la distance, elle ne devient newtonienne qu'après la formation du Soleil. Cette évolution de la loi de force classe les planètes en deux groupes caractérisés par des rotations directes à l'intérieur et rétrogrades à l'extérieur. Comme celle de Laplace, la théorie de Faye a été mise en échec par des observations ultérieures contraires aux prévisions : les révolutions rétrogrades de trois satellites de Jupiter et de Saturne. Quelques variantes ont été proposées afin de mettre l'hypothèse en accord avec les faits nouvellement connus. Il reste difficile, comme à son illustre devancière, de lui faire expliquer la formation d'anneaux séparés.

Le champ des hypothèses nébulaires est loin d'être complètement exploré. Il semble promettre encore de belles moissons, surtout dans le domaine restreint du système solaire. La mise au point proposée par M. Maillard ramène avec raison l'attention sur cette conception un peu délaissée pour des théories plus nouvelles et plus brillantes.

L'auteur considère une nébuleuse analogue à celle de Faye, homogène puis nucléée. Partant d'une hypothèse simple, il a trouvé une loi de force « *générale et généreuse* » contenant deux paramètres variant en sens inverse avec le temps. Nombre de particularités du système solaire s'expliquent simplement par la théorie. La discontinuité de la force rend compte de la discontinuité dans la séparation des anneaux. Les planètes sont nées dans deux périodes entre lesquelles se place l'origine des planétoïdes. Les rotations et révolutions rétrogrades sont une conséquence logique de la loi de force. Une autre originalité des conceptions de l'auteur réside dans le fait qu'elles permettent de donner une raison des « résidus » non expliqués des mouvements planétaires [1]. Les nombres qu'il obtient pour l'avance des périhélies, les inégalités de la Lune, etc., sont des vérifications d'un grand intérêt. « *Il est assez effrayant de penser à ce que néglige et veut négliger notre hypothèse : résistance variable du milieu, chocs, variations thermiques, marées, pression de radiation, actions électromagnétiques, etc. Il est donc sage de s'en tenir aux concordances générales et de renoncer à proposer de nou-*

---

(1) *Cosmogonie et gravitation*, brochure de 40 pages; chez Gauthier-Villars, Paris. Prix : 3 fr.

celles « harmonies de la Nature. » Cette judicieuse remarque s'applique à « toutes » les hypothèses proposées jusqu'à maintenant.

M. Belot, rompant avec les traditions, considère que « *l'architecture des mondes ne dépend pas de la gravitation : sa stabilité seule en dépend* ». Pour lui, le système solaire est le résultat du choc d'un noyau en rotation rencontrant une nébuleuse. Les pulsations du noyau donnent naissance aux planètes. Moyennant quelques hypothèses secondaires, la théorie permet de formuler certaines lois relatives aux distances, aux inclinaisons, au sens des révolutions et des rotations. Elle ne suffit pas à caractériser nettement les deux groupes des planètes intérieures et extérieures, cependant très distincts.

Après M. Belot, d'autres chercheurs ont étudié les conséquences possibles d'un choc : entre deux nébuleuses (M. See) ou entre une nébuleuse et un essaim de météores (M. Moreux). Dans ces essais, le rôle de phénomènes secondaires — capture, pression de radiation — est invoqué avec plus ou moins de bonheur. On ne saurait du reste reprocher aux théories cosmogoniques de tenir compte de toutes les causes possibles.

L'Ouvrage se termine par un Chapitre impartial sur la néo-relativité, dépouillée de ses mystères. La théorie nouvelle trouvera-t-elle une application dans la cosmogonie, où les intervalles de temps et de lieux se mesurent par des nombres prodigieux, où par conséquent les actions les plus infimes ont eu le temps d'accumuler des effets considérables ? En attendant, puisque « *de par la nature même de nos moyens de contrôle, tous les faits nouveaux découverts grâce à la relativité sont et seront interprétables dans l'espace euclidien et le temps terrestre* ». M. Maillard nous conseille, après les randonnées dans l'espace à quatre dimensions, de ne pas oublier le chemin du laboratoire, et de méditer ce jugement *de sereine impartialité* emprunté à M. E. Picard : « L'avenir dira dans quelle mesure les idées nouvelles, si elles reçoivent de nouvelles confirmations expérimentales, pourront s'incorporer dans ce bon sens moyen de l'humanité où Descartes mettait le fondement de la certitude, et qui était pour lui le trait d'union entre notre pensée et le réel. Sans cet accord, il n'y a que scepticisme ; c'est un écueil que n'ont pas toujours évité les théoriciens de la Physique. »

L'auteur, par l'étude approfondie qu'il a dû faire de toutes les théories, de leurs qualités et de leurs défauts, sait qu' « *il ne suffit pas d'orner quelques mots d'une majuscule pour résoudre les problèmes insolubles* »; néanmoins il reste d'un bel optimisme scientifique, qui se manifeste, dans son ouvrage, dès la brillante introduction d'allure philosophique « La Science devant l'Univers », jusqu'à la conclusion pleine de bon sens. Pour lui, la vérité ne jaillira que d'une vaste synthèse de toute les sciences, mais celui qui la tentera n'est pas encore né. Qu'importe ? Ayons de la patience. La Physique précisera de mieux en mieux le constitution — discontinue — de la matière et la Mathématique, suivant le mouvement, développera peut-être un calcul des différences finies, dans lequel le calcul infinitésimal rentrera comme un cas particulier, etc.

Ces deux volumes, admirablement conçus et réalisés par le savant érudit qu'est M. Louis Maillard, sont d'une documentation précise, toujours exacte et abondante. Ils ne s'adressent pas seulement aux initiés, mais bien au grand public cultivé, curieux de l'origine et du développement de nos connaissances astronomiques. L'exécution typographique est très soignée; des figures originales, planches hors texte, reproductions de portraits et de merveilleuses photographies du Ciel, illustrent l'ouvrage. Tout concourt à faire de *Quand la Lumière fut...* une initiation dans le sens le plus noble du mot.

Charles Volet,

Physicien
au Bureau international des Poids et Mesures,
Sèvres.

MÉLANGES.

SUR LA DÉRIVATION ET L'INTÉGRATION GÉNÉRALISÉES;

PAR M. PAUL LÉVY

(*suite et fin*).

10. Nous allons maintenant indiquer une généralisation des opérations I^α et D^α.

Soit une fonction $\lambda(z)$ telle que $\frac{z\lambda'(z)}{\lambda(z)}$ tende vers zéro avec z, et cela par valeurs d'un signe déterminé. Alors $\frac{\log\lambda(z)}{\log z}$ tend vers zéro, et la fonction $\lambda(z)$ peut devenir nulle ou infinie, mais moins rapidement qu'une puissance de z. On remarque aussi que $\frac{\lambda(kz)}{\lambda(z)}$ tend vers l'unité, quand z tend vers zéro, k restant fixe. En effet

$$\left|\log\frac{\lambda(kz)}{\lambda(z)}\right| = \left|\int_z^{kz}\frac{\lambda'(\zeta)}{\lambda(\zeta)}\,d\zeta\right| \leq \varepsilon\left|\int_1^k\frac{dz}{z}\right| = \varepsilon\,|\log k\,|,$$

ε désignant le module maximum de $\frac{\zeta\lambda'(\zeta)}{\lambda(\zeta)}$ entre z et kz, qui tend vers zéro avec z.

Considérons l'opération fonctionnelle

$$(37)\qquad J^\alpha[f(z)] = \int_0^z\frac{(z-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\lambda(z-u)f(u)\,du \qquad (\alpha > 0).$$

On remarque que

$$\frac{d}{dz}J^{\alpha+1}[f(z)] = \int_0^z\frac{(z-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[\lambda(z-u)+\frac{1}{\alpha}\frac{\lambda'(z-u)}{z-u}\right]f(u)\,du.$$

Cette expression diffère de la précédente, mais a évidemment même valeur principale pour z infiniment petit, si $f(z)$ est positif.

Il en résulte que, sans donner lieu à des égalités analogues à l'égalité (4) relative à l'opération I^α, l'opération J^α peut rendre les mêmes services pour l'étude de l'allure des fonctions à l'origine.

Supposons que $f(z)$ soit de la forme $\frac{z^m}{\Gamma(m+1)}\mu(z)$, $\mu(z)$ désignant une fonction soumise aux mêmes restrictions que $\lambda(z)$, et m étant > -1. Il vient, en posant $u = zt$,

$$J^\alpha[f(z)] = z^{m+\alpha}\lambda(z)\mu(z) \times \int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{t^m}{\Gamma(m+1)} \frac{\lambda[(1-t)z]}{\lambda(z)} \frac{\mu(tz)}{\mu(z)}\,dt.$$

On a d'ailleurs

$$\left|\log\frac{\lambda[(1-t)z]}{\lambda(z)}\right| < \varepsilon\,|\log(1-t)|, \qquad \left|\log\frac{\mu(tz)}{\mu(z)}\right| < \eta\,|\log t|,$$

ε et η désignant respectivement les plus grandes valeurs de $\frac{\zeta\lambda'(\zeta)}{\lambda(\zeta)}$ et $\frac{\zeta\mu'(\zeta)}{\mu(\zeta)}$ quand ζ varie de 0 à z, et par suite l'intégrale considérée s'écrit

$$\int_0^1 \frac{(1-t)^{\alpha-1+\theta\varepsilon}}{\Gamma(\alpha)} \frac{t^{m+\theta'\eta}}{\Gamma(m+1)}\,dt.$$

θ et θ' étant inférieurs en module à l'unité; ε et η tendant vers zéro, on peut à la limite négliger $\theta\varepsilon$ et $\theta'\eta$, et il vient

(38) $$J^\alpha[f(z)] \sim \frac{z^{m+\alpha}}{\Gamma(m+\alpha+1)}\lambda(z)\mu(z).$$

Considérons maintenant l'opération $\mathcal{D}^\alpha$ définie par la formule

(39) $$\mathcal{D}^\alpha[f(z)] = J^{-\alpha}[f(z)] = \frac{d^n}{dz^n} J^{n-\alpha}[f(z)],$$

n étant un nombre entier supérieur à α. Elle dépend naturellement du choix de cet entier, et si l'on veut la définir sans ambiguïté on prendra par exemple le plus petit entier supérieur à α. Mais ce choix est sans importance au point de vue de la propriété fondamentale de cette opération, qui est la suivante :

Si l'expression (39) *a pour z infiniment petit une limite non nulle c, les expressions analogues formées avec des valeurs*

plus petites de α restant finies, et si l'on sait que $f(z)$ a une valeur principale de la forme $kz^\beta\mu(z)$, cette valeur principale est $\dfrac{cz^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)\lambda(z)}$.

En effet $J^{n-\alpha}[f(z)]$, obtenu en intégrant n fois l'expression (39), est de la forme

$$\frac{cz^n}{n!}+c_1 z^{n-1}+c_2 z^{n-2}+\ldots+c_n.$$

Si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ n'étaient pas tous nuls, on voit aisément par la formule (38) que, β étant compris entre α et $\alpha-1$, $J^{n-\beta}[f(z)]$ aurait une valeur principale de la forme kz^γ, γ étant un nombre inférieur à n et non entier, et sa dérivée $n^{\text{ième}}$, $\mathcal{D}^\beta[f(z)]$, serait infinie, ce qui est contraire à l'hypothèse. Alors $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sont nuls, et la valeur principale de $J^{n-\alpha}[f(z)]$ est $\dfrac{cz^n}{n!}$. La formule (38) permet alors de définir la valeur principale de $f(z)$, qui est bien celle indiquée.

On remarque que l'hypothèse que l'on sache que $f(z)$ a une valeur principale de la forme $kz^\beta\mu(z)$ simplifie beaucoup le raisonnement. Mais elle ne semble pas essentielle. Si la fonction $f(z)$ tendait vers zéro très lentement ou très rapidement, il est clair que les autres hypothèses ne pourraient pas être réalisées. Si elle tendait vers zéro irrégulièrement, ces irrégularités pourraient être atténuées par l'effet de l'opération $J^{n-\alpha}$, mais réapparaîtraient par l'effet des dérivations : si donc l'on suppose que l'expression (39) a une limite finie et différente de zéro, cette éventualité n'est probablement pas possible.

Nous n'insisterons pas sur cette question, et nous allons terminer ce travail par l'étude d'un cas particulier.

12. Posons

$$z^{\alpha,\beta,\gamma}=z^\alpha(\log z)^\beta(\log\log z)^\gamma,$$

$$z^{\alpha,\beta,\gamma}=\left(\frac{1}{z}\right)^{(-\alpha,-\beta,-\gamma)}.$$

Nous considérerons (α, β, γ) comme un *exposant symbolique* qui définit l'ordre infinitésimal de cette fonction : un exposant (α, β, γ) sera alors supérieur à un autre exposant $(\alpha', \beta', \gamma')$ si

$\alpha > \alpha'$, ou si $\alpha = \alpha'$, $\beta > \beta'$, ou si $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma > \gamma'$. L'ordre de grandeur relatif de deux exposants est ainsi défini par la comparaison des premiers éléments qui n'ont pas la même valeur dans les deux (¹).

Nous nous proposons de définir une opération fonctionnelle qui est un cas particulier de l'opération $\mathcal{D}^\alpha$, permettant de reconnaître qu'une fonction a à l'origine une valeur principale de la forme $kz^{(\alpha,\beta,\gamma)}$. Mais elle présentera cet avantage qu'on peut lui étendre les formules (3) et (4); alors la définition de la dérivée ainsi généralisée sera bien déterminée, et ne dépendra plus d'un entier arbitraire.

Il est nécessaire d'abord d'introduire l'opération J_z^α, analogue à I_z^α, mais dans laquelle on intègre à partir de $-\infty$, au lieu de zéro (²). On a donc

(40) $$J_z^\alpha[f(z)] = \int_{-\infty}^{z} \frac{(z-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(u)\,du \qquad (\alpha > 0).$$

Cette opération ne sera appliquée dans la suite qu'à des fonctions continues de $-\infty$ à la valeur z considérée, et s'annulant pour z infini négatif plus rapidement que n'importe quelle puissance de $\frac{1}{|z|}$. Elle est alors définie sans ambiguïté, et conduit à une valeur réelle si la fonction intégrée est réelle, et positive si cette fonction est positive de $-\infty$ à z. En raisonnant comme pour l'opération I, on obtient les formules

(41) $$J_z^{\alpha'} J_z^\alpha[f(z)] = J_z^{\alpha+\alpha'}[f(z)],$$

(42) $$J_z^\alpha[f(z)] = \frac{d_n}{dz_n} J^{\alpha-n}[f(z)].$$

(¹) Il peut être commode d'introduire le nombre transfini ω et de représenter (α, β, γ) par $\alpha + \frac{\beta}{\omega} + \frac{\gamma}{\omega^2}$. Nous n'avons pas employé cette notation pour la seule raison qu'elle compliquerait l'écriture des formules.

Il est évident qu'on peut introduire des exposants à plus de trois éléments; nous avons pensé que trois suffisent pour montrer la généralité de la méthode.

(²) Indépendamment de la simplification relative à la fonction exponentielle, déjà signalée au n° 6, la substitution de l'opération J à l'opération I présente cet avantage, essentiel pour la suite, que la nouvelle intégrale et la nouvelle dérivée ainsi définies ne changent pas lorsqu'on prend pour variable indépendante $z +$ const. au lieu de z.

Cette dernière formule peut alors être prise pour définition si α est négatif. En mettant en évidence la dérivation au lieu de l'intégration, nous poserons

$$(43)\qquad \Delta_z^\alpha[f(z)] = J_z^{-\alpha}[f(z)] = \frac{d^n}{dz^n} J^{n-\alpha}[f(z)],$$

α étant de signe quelconque, et n un entier >0 et $\geq \alpha$.

En appliquant cette opération à x^z, $(x > 1)$, on trouve aisément

$$(44)\qquad \Delta_z^\alpha[x^z] = x^z(\log x)^\alpha.$$

Ceci posé, la nouvelle opération que nous voulons introduire, que nous désignerons par $D_z^{\alpha,\beta,\gamma}$, ou par $J_z^{-\alpha,-\beta,-\gamma}$, et que nous appellerons *dérivation d'ordre* (α, β, γ) *par rapport à* z, sera définie, si α, β, γ sont négatifs, par la formule

$$(45)\qquad J_z^{-\alpha,-\beta,-\gamma}[f(z)] = D_z^{(\alpha,\beta,\gamma)}[f(z)] = \Delta_\beta^\gamma\,\Delta_\alpha^\beta\, D_z^\alpha[f(z)].$$

D'après la définition des opérations D et Δ, cette expression représente l'intégrale

$$(46)\qquad \begin{aligned} &\int_{-\infty}^{\beta}\frac{(\beta-\beta')^{-\gamma-1}}{\Gamma(-\gamma)}\,d\beta'\int_{-\infty}^{\alpha}\frac{(\alpha-\alpha')^{-\beta'-1}}{\Gamma(-\beta')}\,d\alpha'\int_0^{z}\frac{(z-u)^{-\alpha'-1}}{\Gamma(-\alpha')}f(u)\,du \\ &\quad = \int_0^z \varphi(z-u;\,\alpha,\beta,\gamma)\,f(u)\,du \end{aligned}$$

si l'on pose

$$(47)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(z;\,\alpha) &= \frac{z^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}, \\ \varphi(z;\,\alpha,\beta) &= \Delta_\alpha^\beta[\varphi(z;\,\alpha)] = \int_{-\infty}^{\alpha}\frac{(\alpha-\alpha')^{-\beta-1}}{\Gamma(-\beta)}\,\frac{z^{-\alpha'-1}}{\Gamma(-\alpha')}\,d\alpha', \\ \varphi(z;\,\alpha,\beta,\gamma) &= \Delta_\beta^\gamma[\varphi(z;\,\alpha,\beta)] \\ &= \int_{-\infty}^{\beta}\frac{(\beta-\beta')^{-\gamma-1}}{\Gamma(-\gamma)}\,d\beta'\int_{-\infty}^{\alpha}\frac{(\alpha-\alpha')^{-\beta'-1}}{\Gamma(-\beta')}\,\frac{z^{-\alpha'-1}}{\Gamma(-\alpha')}\,d\alpha'. \end{aligned}\right.$$

On voit d'abord sans peine que, α, β, γ étant négatifs, cette intégrale double est absolument convergente, de sorte que l'opération $D^{\alpha,\beta,\gamma}$ est bien définie par la formule (46) pour toute fonction intégrable de 0 à z, et pour les valeurs négatives de α, β, γ.

Les formules (41) et (42) s'étendent aisément à cette opération. Partons de la formule

$$D_z^{\alpha'} D_z^{\alpha}[f(z)] = D_z^{\alpha+\alpha'}[f(z)],$$

et effectuons successivement sur les deux membres les opérations Δ_{α}^{β} et $\Delta_{\alpha'}^{\beta'}$; il vient, en tenant compte de la formule (41),

$$D_z^{(\alpha',\beta')} D_z^{\alpha,\beta}[f(z)] = \Delta_{\alpha+\alpha'}^{\beta}\Delta_{\alpha+\alpha'}^{\beta'} D_z^{\alpha+\alpha'}[f(z)] = \Delta_{\alpha+\alpha'}^{\beta+\beta'} D_z^{\alpha+\alpha'}[f(z)],$$

ou enfin, d'après la formule de définition (45),

$$D_z^{(\alpha',\beta')} D_z^{\alpha,\beta}[f(z)] = D_z^{\alpha+\alpha',\beta+\beta'}[f(z)].$$

En effectuant ensuite les opérations Δ_{β}^{γ} et $\Delta_{\beta'}^{\gamma'}$, on trouve de même

(48) $$D_z^{(\alpha',\beta',\gamma')} D_z^{\alpha,\beta,\gamma}[f(z)] = D_z^{\alpha+\alpha',\beta+\beta',\gamma+\gamma'}[f(z)].$$

Si maintenant on donne à α', β', γ' des valeurs entières négatives $-l$, $-m$, $-n$, et si l'on dérive l fois par rapport à γ, il vient

(49) $$D_z^{\alpha,\beta,\gamma}[f(z)] = \frac{\partial^{l+m+n}}{\partial z^l\,\partial\alpha^m\,\partial\beta^n} D_z^{\alpha-l,\beta-m,\gamma-n}[f(z)],$$

formule qui peut servir de définition lorsque α, β, γ sont de signes quelconques; cette définition est naturellement indépendante du choix des entiers l, m, n.

Je dis maintenant que la définition de l'opération D par la formule (46) s'applique toutes les fois que l'expression $(\alpha, \beta+1, \gamma+1)$ est négative, c'est-à-dire si le premier des nombres α, $\beta+1$, $\gamma+1$, qui n'est pas nul, est négatif. Il suffit évidemment de montrer que la fonction $\varphi(z; \alpha, \beta, \gamma)$ définie par la formule

(50) $$\varphi(z;\alpha,\beta,\gamma) = \frac{\partial^{l+m+n}}{\partial z^l\,\partial\alpha^m\,\partial\beta^n}\varphi(z;\alpha-l,\beta-m,\gamma-n)$$

conserve un sens dans ces conditions et est intégrable par rapport à z à partir de l'origine; on peut alors, en appliquant la formule (49), dériver sous le signe somme et l'on est ramené à la formule (46).

Or, si α, β, γ sont négatifs, en posant $\alpha' = \alpha x$, $\beta' = \beta y$, l'expres-

sion de $\varphi(z;\alpha,\beta,\gamma)$ devient

$$\frac{(-\beta)^{-\gamma}}{\Gamma(-\gamma)}\int_1^\infty \frac{(y-1)^{-\gamma-1}(-\alpha)^{-\beta y}}{\Gamma(-\beta y)}\,dy\int_1^\infty \frac{(x-1)^{-\beta y-1}z^{-\alpha x-1}}{\Gamma(-\alpha x)}\,dx,$$

et sous cette forme il n'y a aucune difficulté à dériver un nombre quelconque de fois par rapport à z, α, β, ce qui montre que la fonction $\varphi(z;\alpha,\beta,\gamma)$ conserve un sens pour α négatif, β et γ quelconques.

Pour avoir la valeur principale de cette fonction, pour z très petit, remarquons que les formules de définition (47) s'écrivent

$$(51)\quad\left\{\begin{aligned}\varphi(z;\alpha,\beta) &= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha-\alpha';\beta,\gamma)\frac{z^{-\alpha'-1}}{\Gamma(-\alpha')}\,d\alpha',\\ \varphi(z;\alpha,\beta,\gamma) &= \int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\alpha-\alpha';\beta,\gamma)\frac{z^{-\alpha'-1}}{\Gamma(-\alpha')}\,d\alpha'.\end{aligned}\right.$$

Si z est infiniment petit, la valeur principale de cette intégrale provient des valeurs de α' voisines de α, et l'on peut au dénominateur remplacer $\Gamma(-\alpha')$ par $\Gamma(-\alpha)$; les expressions ainsi obtenues sont les mêmes que si, considérant ce dénominateur comme une constante, on appliquait les opérations Δ_α^β et Δ_β^γ à la fonction $z^{-\alpha-1} = \left(\frac{1}{z}\right)^{\alpha+1}$. La formule (44) donne immédiatement le résultat de ces opérations, et il vient

$$(52)\quad\left\{\begin{aligned}\varphi(z;\alpha,\beta) &\sim \frac{z^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\left(\log\frac{1}{z}\right)^\beta = \frac{z^{(-\alpha-1,-\beta)}}{\Gamma(-\alpha)},\\ \varphi(z;\alpha,\beta,\gamma) &\sim \frac{z^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}\left(\log\frac{1}{z}\right)^\beta\left(\log\log\frac{1}{z}\right)^\gamma = \frac{z^{(-\alpha-1,-\beta,-\gamma)}}{\Gamma(-\alpha)}.\end{aligned}\right.$$

Cette fonction peut être intégrée de 0 à z si l'exposant symbolique $(-\alpha-1,-\beta,-\gamma)$ est supérieur à $(-1,-1,+1)$, c'est-à-dire si $(\alpha,\beta+1,\gamma-1)$ est positif. Alors l'opération $D_z^{\alpha,\beta,\gamma}$, définie par la formule (46), sans que l'on ait à effectuer de dérivation proprement dite, s'applique à toute fonction intégrable de 0 à z.

12. Une première application résulte immédiatement de ce que l'intégration et la dérivation d'ordre (α,β,γ) sont des opérations inverses l'une de l'autre.

Si α, β, γ sont positifs, l'équation intégrale

$$(53)\qquad I_z^{\alpha,\beta,\gamma}[f(z)] = g(z)$$

se résout immédiatement si l'on effectue sur les deux membres l'opération $D_z^{\alpha,\beta,\gamma}$. Il vient ainsi, en utilisant la formule (48),

$$(54)\qquad f(z) = D_z^{\alpha,\beta,\gamma}[g(z)].$$

Lorsque α, β, γ sont de signes quelconques, la succession des opérations I et D peut comporter une dérivation suivie d'une intégration, et le résultat de ces opérations peut ne pas conduire à retrouver la fonction intiale, à cause de l'introduction possible de constantes d'intégration.

Mais on peut observer que, quels que soient β, β', γ, γ', on a

$$J_\alpha^{\beta'}[\varphi(z;\alpha,\beta)] = \varphi(z;\alpha,\beta-\beta'),$$
$$J_\beta^{\gamma'}[\varphi(z;\alpha,\beta,\gamma)] = \varphi(z;\alpha,\beta,\gamma-\gamma').$$

Dans ce cas il n'y a pas à introduire de constantes d'intégration, puisque l'on intègre à partir de $-\infty$, et que les fonctions $\varphi(z;\alpha,\beta)$ et $\varphi(z;\alpha,\beta,\gamma)$ sont précisément nulles lorsqu'un des indices est infini négatif.

Or, α étant négatif, mais β et γ quelconques, on a

$$(55)\qquad D_z^{\alpha,\beta,\gamma}[f(z)] = \int_0^z \varphi(z-u;\alpha,\beta,\gamma)f(u)\,du,$$

et effectuer sur cette expression l'opération $D_z^{\alpha',\beta',\gamma'}$ revient à effectuer successivement les opérations $D_z^{\alpha'}$, $\Delta_\alpha^{\beta'}$, $\Delta_\gamma^{\beta'}$. Pour la première la formule (48) est applicable, et les deux autres s'effectuent sous le signe somme, ce qui a pour effet de remplacer β par $\beta+\beta'$ et γ par $\gamma+\gamma'$. Finalement, la formule (48) est applicable quels que soient les signes β et γ. Il suffit que α soit négatif.

Par suite, l'équation intégrale (53) est résoluble par la formule (54) toutes les fois que α est positif. Ainsi, pour $0<\alpha<1$, $\beta=-1$, $\gamma=0$, on voit que l'équation

$$\int_0^z \frac{(z-u)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left[\log(z-u)-\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\right]f(u)\,du = -g(z)$$

se résout par la formule

$$f(z) = \frac{d}{dz}\int_0^z g(u)\,du \int_{-\infty}^{\alpha-1} \frac{(z-u)^{\alpha'-1}}{\Gamma(-\alpha')}\,d\alpha'.$$

Supposons enfin α positif dans l'expression $D_z^{\alpha,\beta,\gamma}$; p étant alors la partie entière de α, on a

$$D_z^{\alpha,\beta,\gamma}[f(z)] = \frac{d^{p+1}}{dz^{p+1}}\int_0^z \varphi(z-u;\, \alpha-p-1,\, \beta,\, \gamma)\, f(u)\,du.$$

Pour effectuer l'opération $D_z^{\alpha',\beta',\gamma'}$, où α' est négatif, nous pouvons toujours effectuer successivement les opérations $D_z^{\alpha'}$, $\Delta_\alpha^{\beta'}$, $\Delta_\beta^{\gamma'}$. La première seule introduira des constantes d'intégration, comme nous l'avons indiqué au n° 4, formule (10). En effectuant les deux autres opérations, et faisant $\alpha' = -\alpha$, $\beta' = -\beta$, $\gamma' = -\gamma$, il vient

$$I_z^{\alpha,\beta,\gamma}\, D_z^{\alpha,\beta,\gamma}[f(z)] = f(z) + J^\gamma{}_\beta J^\beta{}_\alpha\left[c_0\frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \ldots + c_p\frac{z^{\alpha-p-1}}{\Gamma(\alpha-p)}\right].$$

Ainsi l'équation

$$(55)\qquad D_z^{\alpha,\beta,\gamma}[f(z)] = g(z)$$

admet une infinité de solutions, de la forme

$$(56)\quad f(z) = I_z^{\alpha,\beta,\gamma}[g(z)] - I_z^{\alpha,\beta,\gamma}\left[c_0\frac{z^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} + \ldots + c_p\frac{z^{\alpha-p-1}}{\Gamma(\alpha-p)}\right].$$

13. La dérivation généralisée peut servir à obtenir des égalités asymptotiques.

D'après la formule (55), les opérations $I_z^{\alpha,\beta,\gamma}$ et $D_z^{\alpha,\beta,\gamma}$ apparaissent comme un cas particulier des opérations J^α et ω^α étudiées au n° 10. Les résultats obtenus à cet endroit, et les formules (52) qui nous donnent la valeur principale de $\varphi(z;\, \alpha,\, \beta,\, \gamma)$ à l'origine, nous donnent alors le théorème suivant :

Si (α, β, γ) *et* $(l+1, m, n)$ *sont supérieurs à* (0, 1, 1), *et si* $f(z)$ *a pour valeur principale* $\frac{c\, z^{l,m,n}}{\Gamma(l+1)}$, *alors* $I_z^{\alpha,\beta,\gamma}[f(z)]$ *a pour valeur principale* $\frac{c\, z^{l+\alpha,\, m+\beta,\, n+\gamma}}{\Gamma(l+\alpha+1)}$.

On en déduit aisément le théorème suivant :

Si la dérivée d'ordre (α, β, γ) *de* $f(z)$ *tend, pour* $z = 0$, *vers une limite non nulle* c, *les dérivées d'ordres inférieurs restant finies, la fonction* $f(z)$ *a pour valeur principale* $\frac{c z^{(\alpha, \beta, \gamma)}}{\Gamma(\alpha + 1)}$.

Nous n'avons plus besoin ici des mêmes restrictions qu'au n° **10**, car nous pouvons remonter de la dérivée à $f(z)$ par la formule (10). Les constantes $c_0, c_1, \ldots, c_p$ sont nulles (car autrement les dérivées d'ordres compris entre (α, β, γ) et $(\alpha - 1, \beta, \gamma)$ deviendraient infinies, contrairement à l'hypothèse. Alors le théorème énoncé se réduit au précédent.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DICKSON (L.-E.). — HISTORY OF THE THEORY OF NUMBERS. Published by the Carnegie Institution of Washington. Trois volumes in-8°. Vol. I : XII + 486 pages, 1919; sous-titre : *Divisibility and primality.* Vol. II : XXV + 803 pages, 1920; sous-titre : *Diophantine Analysis.* Vol. III : VI + 313 pages, 1923; sous-titre : *Quadratic and higher forms.*

La Carnegie Institution a vraiment accompli œuvre pie en mettant sa puissance au service de M. Dickson. L'ouvrage qu'il vient d'achever après 12 ans d'efforts est sans contredit le plus important en Théorie des Nombres depuis les *Disquisitiones* de Gauss. Comme ouvrage d'histoire mathématique il marque aussi sans nul doute une époque. Il est malheureusement à regretter que la première édition des deux premiers volumes soit presque épuisée. Espérons qu'une seconde édition en verra bientôt le jour.

Auteur de travaux fort importants sur l'algèbre et l'arithmétique supérieures, nul ne saurait être mieux qualifié que le grand savant de Chicago pour mener à bout une telle tâche. Disons de suite que son succès est éclatant. Laissons-le nous dire lui-même ce qu'il s'est proposé d'accomplir et pourquoi : « Les efforts de Cantor et de ses collaborateurs montrent qu'une histoire chronologique des mathématiques jusqu'au XIXe siècle peut être écrite en quatre gros volumes. Pour traiter le siècle dernier avec autant d'ampleur, on a estimé qu'il en faudrait quinze, tant la littérature mathématique de cette période est étendue. Mais à retenir l'ordre chronologique, donc à consacrer un gros volume à une période d'au plus sept ans, on irait à l'encontre des buts principaux d'un ouvrage d'histoire. De plus, il serait très peu commode d'y retrouver tout ce qui se rapporte à tel ou tel sujet. Il y a certes place pour des ouvrages traitant du développement de diverses branches des mathématiques jusqu'à nos jours.

» La Théorie des Nombres a tout particulièrement droit à un

ouvrage d'histoire séparé, à cause du grand intérêt que, depuis Pythagore, elle a toujours suscité à travers les siècles. Cet intérêt est d'ailleurs partagé, à un extrême par presque tous les mathématiciens connus, à l'autre par de nombreux amateurs que n'attire aucune autre partie des mathématiques. Cet ouvrage a pour but de décrire de façon suffisamment complète toute la littérature sur la Théorie des Nombres.... Il est écrit non seulement pour les fastidieux mathématiciens de profession, mais encore pour le grand nombre d'amateurs, qui éprouvent une fascination sans fin pour la « reine des sciences », dont le règne, commencé il y a des siècles, a continué sans interruption jusqu'à notre époque....»

Il n'est pas aisé de rendre justice à une telle œuvre. Il faut s'en servir, considérer ses citations aussi nombreuses qu'exactes, les descriptions rapides et élégantes dans le style caractéristique de l'auteur, pour l'apprécier à sa juste valeur.

Exprimons le vœu que M. Dickson fasse école et que d'autres géomètres, aussi courageux que lui, accomplissent une tâche semblable pour d'autres parties de la Mathématique.

Le sous-titre du premier volume de l'ouvrage de M. Dickson, *Divisibilité et nombres premiers*, en décrit fort bien la portée. Dans une préface étendue l'auteur jette un coup d'œil d'ensemble sur l'histoire des questions qu'il y traite : Nombres parfaits, problèmes de Fermat et de Wallis, fonction φ d'Euler, racines primitives, congruences, tables de facteurs et de nombres premiers, recherche et distribution des nombres premiers, telles sont les principales. A titre d'exemple il y a un court chapitre de six pages intitulé : *Nombres de Fermat* $F_n = 2^{2^n} + 1$ (Chap. XV), avec 64 citations depuis Fermat (1654) jusqu'à nos jours. A lire ces citations on retrouve les noms de la plupart des revues mathématiques généralement connues et accessibles, ainsi que d'un bon nombre qui ne le sont pas. On touche là précisément au mérite essentiel de cette œuvre : elle offre sous forme condensée une vraie bibliothèque de *Théorie des Nombres;* les adeptes peuvent y apprendre facilement et rapidement tout ce que leurs prédécesseurs ont accompli sur tel ou tel sujet.

Examinons encore un chapitre de ce volume, le dernier : *Théorie des nombres premiers;* c'est celui qui intéressera peut-être

le plus le public mathématique. Chaque partie de la théorie en question y a reçu un traitement séparé. Il y a par exemple un paragraphe spécial sur le théorème d'Euclide affirmant l'existence des nombres premiers (l'auteur en décrit 16 démonstrations !), plusieurs sur les nombres premiers contenus dans des progressions arithmétiques, etc. Le dernier paragraphe, sur la distribution des nombres premiers est relativement court, M. Dickson nous renvoyant à juste titre à l'excellent traité de M. Landau sur cette matière, traité qu'il est facile de se procurer.

Le second volume, de beaucoup le plus long des trois, traite de l'analyse indéterminée. Pour les amateurs, c'est certes le plus précieux, puisqu'il rend compte d'une vraie poussière de recherches mathématiques remontant à une haute antiquité. Il y a encore une longue préface, vue à vol d'oiseau comme au début du premier volume. Voici les chapitres qui intéresseront le plus ceux d'entre nous que M. Dickson qualifie de professionnels :

Chapitre II : *Équations linéaires.* — Théorème fondamental de Minkowski sur les formes linéaires. (Nous nous bornons à rappeler les travaux d'auteurs récents.)

Chapitres VI a IX : *Représentation d'entiers par une somme de n carrés.* — Travaux notables de H.-J.-S. Smith et Minkowski (couronnés par l'Académie des Sciences en 1882) ; aussi de Hermite, Stieltjes, Hurwitz et autres. Il convient de rappeler ici le Chapitre XI consacré aux 18 mémoires de Liouville sur un sujet étroitement connexe, ainsi qu'aux démonstrations de maints résultats qu'il ne fit qu'énoncer.

Chapitre XXIII : *Équations diophantines de degré n.* — Travaux notables de Hilbert, Hurwitz, Poincaré, Runge, Maillet.

Chapitre XXV : *Problème de Waring.* — Travaux de Hilbert et autres.

Chapitre XXVI : *Dernier théorème de Fermat.* — Découverte capitale des idéaux par Kummer; travaux très importants de MM. Dickson, Mirimanoff, Wieferich, Vandiver et autres.

Le dernier volume, *Théorie arithmétique des formes*, le plus important des trois, est de caractère quelque peu différent des deux

autres. On y trouve plutôt des méthodes générales que des résultats séparés, méthodes exigeant une terminologie compliquée et un maniement expert de l'analyse. Un résumé historique eût été par trop difficile à écrire cette fois et l'auteur l'a omis. Disons de suite que ce volume constitue le guide le plus sûr et le plus attrayant qu'il soit, pour qui veut approfondir la théorie des formes. Jetons-y un coup d'œil rapide.

Chapitres I a VIII : *Formes quadratiques binaires.* — Cette question occupe à elle seule les deux tiers du volume, et le sixième chapitre, consacré à la question difficile du nombre de classes des formes à coefficients entiers, en occupe le tiers.

Ce chapitre fort difficile est de la main de M. Cresse, élève de M. Dickson, qui y a consacré cinq années. Disons de suite que son travail est digne de son maître.

Glanant çà et là chez M. Dickson, rappelons les points saillants de cette théorie, une des plus attrayantes des mathématiques, très importante aussi bien en théorie des nombres qu'en analyse (fonctions elliptiques et automorphes, groupe modulaire, etc.). D'ailleurs la plupart des doctrines de ce troisième volume sont plus ou moins la généralisation des découvertes qui se sont groupées autour des formes binaires.

Le problème fondamental est de résoudre l'équation indéterminée aux inconnues x, y,

$$\varphi(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = m,$$

ou, comme on dit, de représenter m par φ. La forme est souvent désignée par (a, b, c). Il suffit de supposer, comme nous le ferons,

$$dv(a, b, c) = 1 \text{ (forme primitive)}, \qquad b^2 - ac = D$$

non carré parfait, et de ne considérer que des solutions en entiers α, γ premiers entre eux (représentation propre).

La solution classique est due pour une bonne part à Lagrange (1773), ce que beaucoup ignorent. Elle fut mise sous sa forme définitive par Gauss (1801). La théorie qu'il a bâtie autour de cette solution est si importante et présente tant de traits nouveaux que son nom y est en général attaché. Il faut ajouter que nombre de ses démonstrations, souvent plutôt ardues, ont été simplifiées

par divers géomètres, notamment Dirichlet. Voici un court résumé de cette solution classique : Il existe deux entiers β, δ tels que

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Le changement de variables

$$T : (x, y ; \alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y)$$

remplace φ par une forme dite *équivalente* avec m pour premier coefficient. Cette forme aura même D et si n est son second coefficient, $\frac{n^2 - D}{m}$ est un entier (le troisième coefficient).

Réciproquement, lorsqu'il existe une forme $\left(m, n, \frac{n^2 - D}{m}\right)$ équivalente à (a, b, c), m est représentable par cette dernière forme (donc par toute autre équivalente). Les formes, équivalentes à une donnée, le sont entre elles et constituent une *classe* relative à D. On est donc ramené à reconnaître si *deux classes données coïncident.*

Soit (a, b, c) appartenant à une classe K. Si $2|b| > |a|$, une certaine transformation $(x, y; x + \mu y, y)$ la réduira à (a', b', c') avec $|b'| < |b|$ (Lagrange). On arrive ainsi de proche en proche à (A, B, C) dans K, telle que $2|B| \leqq |A|$ ou $|C|$, dite *forme réduite.* On trouve aisément pour $|A|$, $|B|$, $|C|$, des limites supérieures ne dépendant que de D. Par suite le nombre de formes réduites relatives à D est fini et il en est de même du nombre de classes distinctes. Des procédés arithmétiques simples conduisent à la séparation des réduites en formes inéquivalentes (Gauss), ce qui achève la solution. Pour obtenir toutes les représentations de m par φ, on est ramené à résoudre l'équation de Pell. Tout ceci est étroitement relié, pour D positif, au développement de $\sqrt{D}$ en fraction continue.

Le problème fondamental est en somme celui de la *réduction.* Hermite en a donné, en 1851, une solution aussi élégante que nouvelle. Il démontre d'abord qu'une forme définie (a, b, c), à coefficients réels mais nullement entiers, est équivalente sous les transformations telles que T, à une forme réduite avec $2|B| \leqq |A|$ ou $|C|$. Parmi toutes les formes équivalentes à (a, b, c), il en choisit une à la plus petite valeur possible pour $|a|$. S'il y en a plus d'une

il prend celle avec $|b|$ aussi petit que possible; c'est sa forme réduite. Soit ensuite la forme indéfinie

$$\varphi = a(x-\alpha y)(x-\beta y) \qquad (a,\ \alpha,\ \beta \text{ réelles}).$$

Hermite lui associe le faisceau de formes définies

$$f = (x-\alpha y)^2 + \lambda(x-\beta y)^2 \qquad (\lambda \text{ paramètre positif}).$$

A φ il applique en même temps qu'à f toute T ramenant f à une forme réduite. Les formes que l'on déduit ainsi de φ en sont les réduites par définition. Pour les formes à coefficients entiers, on arrive ainsi aux mêmes résultats que Gauss.

A signaler encore les méthodes géométriques de réduction (Smith, Dedekind, Klein, Hurwitz, Humbert). Elles sont associées, on le sait, au domaine fondamental classique, Ω, de la fonction modulaire. Voici comment les choses se présentent par exemple d'après Klein : Marquons dans le plan complexe z les affixes z_1, z_2 des deux racines de

$$az^2 + 2bz + c = 0.$$

Si elles sont réelles, on trace le cercle C (de centre sur l'axe réel) dont elles sont les extrémités d'un même diamètre. $(a,\ b,\ c)$ est réduite lorsque C a un point commun avec Ω. Si z_1, z_2 sont imaginaires, la forme est réduite lorsque l'une d'elles appartient à Ω. D'après M. Bianchi, cette méthode peut être étendue aux formes à coefficients de type $\alpha + t\beta$ avec $t = i$ ou $e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Il faut alors avoir recours à une certaine représentation géométrique par un espace à trois dimensions due à Poincaré (Dickson, Chap. VII).

Mentionnons enfin les méthodes géométriques par réseaux de points (Gauss, Poincaré, Klein et autres). On retrouvera ces méthodes et bien d'autres chez M. Dickson, décrites avec e minimum de détails compatible avec la plus grande clarté.

La *composition des classes de formes binaires* (Dickson, Chap. III), étudiée pour la première fois dans toute sa généralité par Gauss, a reçu une importance nouvelle depuis les rapprochements avec les produits d'idéaux d'un corps quadratique (Dedekind). Soient (a, b, c), (a', b', c') appartenant aux classes K, K' du discriminant D. Il y a deux entiers B, C, tels que $(a,\ \mathrm{B},\ a'\mathrm{C})$, $(a',\ \mathrm{B},\ a\mathrm{C})$ appar-

tiennent respectivement aux mêmes classes. La forme (aa', B, C) définie par les identités

$$(ax^2 + 2Bxy + a'Cy^2)(a'x'^2 + 2B'x'y' + aCy'^2)$$
$$= (aa'X^2 + 2BXY + CY^2);$$
$$X \equiv xx' - Cyy', \qquad Y \equiv y'(ax + by) + y(a'x + b'y)$$

appartient à une classe bien déterminée K'', toujours relative à D, dite *composée* avec les deux autres. Symboliquement, on écrit $K'' = KK'$ et il est clair que $KK' = K'K$. Cette composition des classes donne ainsi lieu à un groupe abélien fini. Son ordre est égal au nombre $h(D)$ de classes distinctes. La détermination de $h(D)$ est un problème des plus ardus (Chap. VI écrit par M. Cresse). Les travaux principaux dans cette direction sont de Gauss, Dirichlet et Kronecker. Toutefois la liste d'auteurs que donne M. Cresse, comprend les noms de la plupart des grands analystes modernes.

Mentionnons ici les questions assez techniques d'*ordre* et de *genre* sur lesquelles il y a d'importantes recherches d'Eisenstein, mathématicien dont on retrouve souvent le nom chez M. Dickson.

Chapitres IX a XI : *Formes quadratiques à plus de deux variables.* — Travaux notables de Hermite et Minkowski du côté arithmétique surtout, aussi ceux de G. Humbert établissant des rapports avec les fonctions abéliennes singulières.

Chapitres XII a XIV : *Formes de degré* < 2. — Travaux fort importants de Hermite et de M. Julia sur les formes binaires. Rappelons rapidement leur méthode. Soient $\varphi(x, y)$ une forme réelle, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$, les racines réelles de $\varphi(z, 1) = 0$, β_i, $\overline{\beta}_i$ ses paires de racines imaginaires conjuguées. A φ on rattache la forme définie

$$f = \Sigma t_k(x - \alpha_k y)^2 + \Sigma u_i^2 (x - \beta_i y)(x - \overline{\beta}_i y)$$
$$\equiv ax^2 + 2b\, xy + cy^2,$$

que l'on réduit à la manière d'Hermite. On applique à φ les mêmes transformations qu'à f et on la considère comme réduite lorsque l'une des racines de

$$az^2 + 2bz + c = 0$$

a son affixe dans Ω. Quand les t, u prennent toutes les valeurs

positives possibles, les substitutions réduisant φ ont cette propriété : elles transforment en un domaine recouvrant en partie Ω, un certain domaine convexe en relation simple avec les affixes des α, β (Julia). Il y a de belles généralisations, dues à M. Julia, où il se sert de formes hermitiennes au lieu de formes quadratiques.

Chapitres XV et XVI : *Formes hermitiennes.* — Ici se rattachent de belles recherches sur les fonctions automorphes dues à M. Picard (groupe de Picard et son polyèdre fondamental), et G. Humbert (fonctions abéliennes singulières), ainsi qu'à leurs élèves (MM. Alezais, Cotty et autres).

Chapitre XVII : *Formes bilinéaires, matrices* (H.-J.-S. Smith Frobenius, Dickson et autres).

Chapitre XVIII : *Représentation d'un nombre par des polynomes* mod p (M. Dickson et autres).

Chapitre XIX : *Théorie congruentielle des formes.* — Il s'agit de la théorie des invariants et covariants des formes quand les coefficients des formes et des substitutions sont des entiers pris *modulo m* entier donné.

Cette théorie a été étudiée surtout par M. Dickson et ses élèves. Il y a là une jolie doctrine où l'on n'a guère fait l'étude que du cas où m est premier ou puissance d'un nombre premier. Ceci est dû aux difficultés spéciales que l'on rencontre : elles ne permettent guère l'application des méthodes qui ont cours en général dans les recherches sur les invariants et covariants algébriques. A titre d'exemple

$$ax^2 + 2bxy + cy^2,$$

prise *modulo p*, entier premier impair, possède les trois invariants

$$D = b^2 - ac, \qquad I = (1 - a^{p-1})(1 - b^{p-1})(1 - c^{p-1}),$$
$$A = \left| a^{\frac{p-1}{2}} + c^{\frac{p-1}{2}} (1 - a^{p-1}) \right| (1 - D^{p-1}).$$

dont les valeurs suffisent pour caractériser les *classes* de formes. Enfin

$$I, \; A, \; D, \; D^2, \; \ldots, \; D^{p-1}$$

constituent un système d'invariants linéairement indépendants en nombre maximum.

S. Lefschetz.

QUELQUES LIVRES RÉCENTS SUR LA RELATIVITÉ.

EINSTEIN (ALBERT). — THE MEANING OF RELATIVITY. *Four lectures delivered at Princeton University*, May 1921. Published in 1923 by the Princeton University Press, Princeton (New Jersey), U. S. A. Un petit volume de 123 pages avec 4 diagrammes.

STEINMETZ (C. P.). — FOUR LECTURES ON RELATIVITY AND SPACE. *Mc Graw-Hill and Co.* New-York, 1923. Un volume de x-126 pages.

BIRKHOFF (G. D.). — RELATIVITY AND MODERN PHYSICS, *with the cooperation of R.E. Langer. Published in* 1923 by *the Harvard University Press, Cambridge* (Mass.) U. S. A. Un volume de XII-283 pages.

POOR (C. L.). — GRAVITATION VERSUS RELATIVITY. *G. P. Putnam's sons. New-York and London.* Un vol. de XXXIV-277 pages.

Quatre Ouvrages sur la relativité, parus en peu de mois aux États-Unis, voilà qui donne en quelque sorte la mesure du grand intérêt qu'elle y suscite, tout comme ailleurs du reste. Il faudrait d'ailleurs y ajouter les Livres de M. Edington, la traduction de l'excellent Ouvrage populaire de M. Nordmann, celle du Livre de M. Weyl et d'autres ! Parmi tous, seul l'Ouvrage de M. Poor, est netttement, voire violemment, hostile.

Commençons par l'ouvrage de M. Einstein lui même; sous un volume très restreint il nous y présente un excellent résumé des deux relativités. Avec raison il évite d'entrer dans trop de précisions, sauf dans le dernier chapitre où il traite de la gravifique. M. Einstein montre nettement que, pour lui, la relativité est un Chapitre de la Physique, que son succès est à mesurer par sa capacité de prédire les phénomènes. Il convient de rappeler ici que les observations récentes faites lors de l'éclipse totale de septembre 1922 semblent confirmer à nouveau les prédictions du grand savant sur la déflection des rayons lumineux au voisinage du Soleil.

M. Steinmetz, l'ingénieur-conseil de la Général Electric C°, qui vient de mourir, a toujours fait montre d'un intérêt considérable pour la science pure. Cet intérêt, il a constamment éprouvé le désir de le voir partagé par le public instruit, notamment par

les ingénieurs ses collègues. Aussi est-ce pour eux surtout que son Livre est écrit. Autant que possible il s'est efforcé d'avoir recours à des analogies géométriques, plutôt qu'à des combinaisons de formules et sans cesse se sert-il d'exemples numériques concrets. Cela ne l'empêche pas de s'enfoncer peu à peu dans des considérations théoriques assez avancées, notamment dans son dernier Chapitre, *Sur les caractéristiques de l'espace*. Souhaitons-lui le succès auquel il a droit.

L'Ouvrage de M. Birkhoff est de caractère nettement différent des autres. Le savant de Harvard, dont les travaux fort importants sur les systèmes dynamiques sont bien connus, ne pouvait laisser passer la Relativité sans y prendre un intérêt vivace. A lire son Livre, le mathématicien sera tout à fait à l'aise, car c'est pour lui que M. Birkhoff a écrit, il le sentira de suite, et écrit avec grand succès. Par exemple l'espoir qu'il exprime dans sa préface, « *that the book will prove serviceable as a text for an undergraduate course* », disons un cours de première année dans une université d'Europe, cet espoir, dis-je, est certes illusoire. Ne le regrettons pas, et félicitons même l'auteur d'avoir donné là un Ouvrage que, même les géomètres rompus aux questions einsteiniennes, ne voudraient lire rapidement.

Dans un chapitre préliminaire M. Birkhoff passe en revue les théories principales de la physique classique, en indiquant leurs contradictions avec certains faits expérimentaux notoires. Les transformations de variables propres à la dynamique classique, et celles convenant le mieux à l'électromagnétisme, ne sont compatibles qu'avec un éther fixe, dont, toutefois l'expérience de Michelson-Morley, entre autres, rend l'existence improbable. L'auteur aborde ensuite de front l'étude de l'espace-temps d'un observateur ne pouvant se mouvoir que dans une seule direction. On perçoit là une des heureuses caractéristiques de cet Ouvrage au point de vue didactique : des théories parfois fort difficiles y sont poussées aussi loin que possible avec un nombre minimum de variables. C'est ainsi que M. Birkhoff fait une étude géométrique fort complète des types d'espaces possibles dans le cas mentionné plus haut. Lorsqu'on les suppose homogènes, il y en a essentiellement *deux*, suivant la manière de se correspondre des lignes d'univers

passant par deux points arbitraires. Le premier, ou espace-temps *aélotropique*, à correspondance unique et bien déterminée, est à la base de la dynamique classique; le second, ou espace-temps *isotropique* est à la base de la relativité restreinte. C'est l'expérience seule qui permet de décider celui à choisir. M. Birkhoff pousse assez loin l'étude du second type. C'est ainsi qu'il y a dans son Ouvrage un chapitre sur la dynamique des systèmes linéaires de particules matérielles, un autre sur l'hydrodynamique à une dimension. Son traitement, toujours et partout, est par postulats clairs et précis, méthode décidément à recommander.

Après une discussion, assez complète, de la théorie des tenseurs, M. Birkhoff nous introduit à la gravifique einsteinienne de l'espace-temps à deux dimensions. Ce cas n'est pas suffisamment caractéristique, aussi entame-t-il finalement l'étude du cas général. A signaler tout particulièrement un très bon chapitre sur l'électromagnétisme, et dans la discussion de la gravifique la dérivation de l'équation de Schwarzschild *en se basant uniquement sur la symétrie sphérique du champ.*

On retrouvera dans ce beau Livre la clarté, l'élégance, l'originalité de vues, qui caractérisent tous les écrits de notre collègue de Harvard.

M. Poor, professeur de mécanique céleste à Columbia University, ne cache guère son manque d'enthousiasme pour M. Einstein et ses œuvres. Malgré le ton de polémique ardente qui anime son Ouvrage, il est intéressant à plusieurs points de vue. Et d'abord il contient un résumé assez clair des recherches monumentales de Le Verrier, Hill et Newcomb, sur les irrégularités des mouvements des planètes, et notamment de Mercure. Ces travaux très importants ne sont peut-être pas assez connus des savants qu'intéresse la relativité. Les calculs de Le Verrier l'ont conduit à admettre une déviation séculaire inexpliquée de 38 et quelques secondes pour le périhélie de Mercure. Ces calculs ont été vérifiés par une méthode différente par Hill. Presque un demi-siècle plus tard, Newcomb, avec des observations ultérieures en sa possession, a trouvé environ $40''$. La concordance avec les $43''$ que fournit la formule de Schwarzschild nous paraît fort satisfaisante à nous, mais non à M. Poor qui semble plutôt difficile !

Il faut dire que le savant de New-York a imaginé de rendre compte des irrégularités en question et tout aussi bien de la déviation des rayons lumineux, en faisant entrer en jeu une enveloppe de matière fort ténue entourant le Soleil et s'étendant bien au delà de l'orbite terrestre. Ses calculs, il nous l'affirme dans son Livre, rendent bien mieux compte des faits que n'y arrive la relativité, et cela sans sortir des théories classiques. Nous laisserons à d'autres de décider, mais certes une telle explication mérite d'arrêter l'attention des savants.

S. Lefschetz.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, par Gaspard Monge.
2 vol. Paris, Gauthier-Villars, 1922.

Cet opuscule célèbre reparaît dans la Collection *Les maîtres de la Pensée scientifique*. Une intéressante préface de M. Maurice Solovine, directeur de cette Collection, résume la biographie de Monge, grand savant et grand citoyen. On y voit que la géométrie descriptive, conçue vers 1775, dut longtemps être tenue secrète comme invention intéressant la défense nationale, et ne put être divulguée qu'en l'an VII. Un pareil fait semble isolé dans l'histoire des mathématiques.

Beaucoup de personnes apprendront avec surprise, dès les premières pages de ce livre, que Monge n'est pas l'inventeur de la représentation par projections orthogonales et qu'il ne s'est jamais donné pour tel : « Mais dans la géométrie descriptive », dit-il (t. I, p. 10), « qui a été pratiquée depuis beaucoup plus longtemps... au lieu de la considération de trois plans, on est parvenu, au moyen des projections, à n'avoir plus besoin explicitement que de celle de deux ». Il tombe d'ailleurs sous le sens que maint chef-d'œuvre de stéréotomie, antérieur à Monge, n'a pu être exécuté sans épures comportant des projections, des rabattements, des intersections de surfaces, etc. Rien n'était plus familier à Albert Dürer que la représentation par projections orthogonales con-

juguées. Le mérite de Monge est d'avoir dégagé une méthode simple et générale de procédés nombreux inventés chacun en vue de problèmes très particuliers et sans lien entre eux. Appeler cette méthode *géométrie descriptive*, c'était peu de chose en soi; mais c'est beaucoup d'avoir compris qu'il y avait une science en attente d'un nom pour se connaître.

Le petit livre de Monge pourrait encore servir aujourd'hui, pour une étude assez complète de la géométrie descriptive. On y trouve les méthodes fondamentales : rabattements, emploi des plans auxiliaires pour trouver les intersections, etc., auxquelles on n'a pas ajouté grand'chose depuis (sauf peut-être les changements de plan, que l'on peut d'ailleurs interpréter comme des rabattements).

Et ce que l'on y trouve plus que dans la plupart des traités modernes, ce sont des idées générales. Monge n'était pas lié par un programme d'enseignement ou d'examens lui traçant un cadre strict. Il ne se demande pas ce qui ressortit aux *Elémentaires* et aux *Spéciales*, et ce qui dépasse le niveau de celle-ci. Il traite des problèmes de topographie. Il expose la théorie des courbes gauches, des développables, des lignes de courbure des surfaces générales (ses méthodes dénuées de rigueur sont quand même bien instructives par l'appel qu'elles font à l'intuition), en vue d'applications à la coupe des pierres. Les dernières pages, consacrées à des questions de *teintes*, appartiennent autant à la physique et à l'optique physiologique qu'à la géométrie.

« Où comment un grand esprit traite un sujet de second ordre », ce sous-titre conviendrait assez bien à la *Géométrie descriptive* de Monge.

Raoul Bricard.

MÉLANGES.

H. G. ZEUTHEN;

PAR M. ÉMILE PICARD (¹).

Depuis la publication du tome IV des *Mémoires scientifiques de Paul Tannery*, la mort a frappé un de ceux qui collaboraient à la publication des travaux du grand historien. Mme Paul Tannery vient de dire la douleur que lui a causée la disparition de H. G. Zeuthen, que tant de liens rattachaient à son mari et au dévouement duquel elle devait d'avoir pu rassembler ses œuvres. Elle a tenu en outre à ce que quelques pages fussent consacrées au début de ce tome V à la mémoire de l'illustre géomètre danois, que l'Académie des Sciences de Paris comptait depuis longtemps parmi ses correspondants.

Zeuthen était venu dans sa jeunesse compléter son instruction scientifique à Paris, où il suivit les cours du Collège de France et de la Sorbonne. Accueilli avec une cordialité dont il aimait à rappeler le souvenir, il reçut de Chasles des conseils et des encouragements, qui l'ont porté à se diriger dans les voies de la géométrie moderne. Ses premiers travaux, dont plusieurs ont été publiés dans les *Comptes rendus* de notre Académie, n'ont pas tardé à le mettre hors de pair, et à le faire regarder par tous comme le meilleur et le plus fidèle élève de celui qui était alors le prince de la géométrie. Zeuthen n'ignorait rien d'ailleurs des relations étroites qui lient la géométrie à l'analyse, et il eut toujours un sens

(¹) Préface du tome V : *Sciences exactes au moyen âge*, des *Mémoires scientifiques* de PAUL TANNERY, publiés par Heiberg (Toulouse, Privat, et Paris, Gauthier-Villars, 1923), ouvrage qui sera prochainement analysé dans ce *Bulletin*, dont M. Zeuthen a été longtemps un dévoué collaborateur.

très net des directions dans lesquelles doivent s'engager les recherches des géomètres.

Les premières publications de Zeuthen remontent à l'époque où Chasles énonçait le célèbre principe de correspondance et jetait les fondements de cette théorie des caractéristiques des systèmes de coniques, qui a provoqué tant de recherches importantes et fécondes. A la suite des publications de Chasles, d'éminents mathématiciens, comme Cayley, Clebsch, Cremona, revenaient sur les principes fondamentaux de la théorie pour les appliquer ou les étendre. Zeuthen prit une part importante à ce travail difficile, que Halphen devait pousser jusqu'à son dernier terme; il étendit aussi les idées de Chasles aux courbes du quatrième degré. En même temps, il appliquait le principe de correspondance à la démonstration des relations célèbres que Plücker a fait connaître entre les singularités d'une courbe plane, puis il reprenait et complétait les théories de Cayley relatives aux singularités des courbes gauches et des surfaces algébriques, se préparant ainsi à l'étude géométrique des propriétés des courbes et des surfaces dont les points se correspondent un à un. Dans ces questions difficiles, des nombres invariants jouent un rôle capital; tel le genre riemannien dans la théorie des courbes algébriques. Un invariant relatif, rencontré pour la première fois par Zeuthen dans l'étude des courbes situées sur une surface, porte justement son nom; il a été rencontré depuis dans des questions d'un tout autre ordre, relatives aux périodes des intégrales doubles. Ces recherches délicates, comme le savent tous ceux qui se sont occupés de la théorie des surfaces algébriques, ont été exposées par Zeuthen dans plusieurs notes et mémoires publiés de 1864 à 1873.

D'autres recherches du géomètre danois se rapportent à des sujets tout différents. On sait que Newton, dans son énumération des lignes du troisième ordre, s'est attaché à la détermination complète des formes de celles-ci, et a démontré que toutes ces formes s'obtiennent en faisant la perspective de cinq types fondamentaux. Depuis Newton, ce genre d'études, connu sous le nom de topologie, n'a jamais été abandonné par les géomètres. Zeuthen lui a apporté une contribution importante, en déterminant d'une manière approfondie les différentes formes des courbes du qua-

trième ordre et faisant connaître de nombreuses propriétés de situation relatives aux surfaces cubiques. Ces belles recherches ont été l'origine de nombreux travaux.

Pendant longtemps Zeuthen n'avait pas paru suivre son maître Chasles dans la voie des recherches historiques. Mais vers 1880, il tourne principalement son activité de ce côté, et en 1884 paraît son grand ouvrage *Sur l'histoire des coniques dans l'antiquité*, où il fait preuve d'une connaissance profonde de la géométrie antique. C'est une œuvre à laquelle tous les géomètres ont rendu pleine justice, et qui mérite de prendre place à côté de l'*Aperçu historique* de Chasles. Nous avons plaisir à rappeler ici le jugement que portait sur elle Paul Tannery, quand il écrivait : « Le travail de M. Zeuthen fera époque; jusqu'à lui l'histoire des coniques dans l'antiquité était incomprise. M. Zeuthen non seulement en donne la clef, mais nous guide de façon à ne plus nous laisser égarer. » On peut dire que nul ne s'assimila mieux que l'éminent géomètre danois la façon de penser et de raisonner des Anciens en mathématiques.

A partir de 1885, les publications historiques de Zeuthen se succèdent avec une admirable régularité. Dans ses notes *sur l'histoire des mathématiques*, il aborde les questions les plus variées, en particulier l'étude des premiers progrès du calcul infinitésimal et les origines de la théorie de ces nombres irrationnels qui avaient été un grand scandale dans les écoles pythagoriciennes. Sans doute l'histoire est une science parfois conjecturale, et l'absence de documents peut autoriser des opinions variées; c'est ainsi que des historiens des sciences mathématiques ont pu être d'avis différents sur l'aptitude aux recherches arithmétiques des Grecs, que tous s'accordent à regarder comme merveilleusement doués pour la géométrie. Il est souvent difficile de soulever le voile, sous lequel les Anciens cachaient leurs méthodes de recherches, et l'on reste saisi d'admiration devant la subtilité d'esprit d'historiens habiles, comme Zeuthen, à suggérer des hypothèses vraisemblables.

L'histoire des sciences peut être envisagée sous des points de vue divers. Les uns s'intéressent aux savants eux-mêmes, et se préoccupent de rendre à chacun la justice qui lui est due, s'efforçant de rattacher à un nom les découvertes ou les doctrines

importantes. C'est une manière assurément très légitime d'entendre l'histoire, et nous serions heureux d'avoir quelques précisions sur la vie de Thalès et celle de Pythagore, et de connaître exactement leur œuvre. D'autres s'attachent davantage à l'histoire des méthodes et des résultats, se souciant moins des hommes. C'est à ces derniers que se rattache Zeuthen. Quoiqu'on lui doive d'avoir mis en pleine lumière le rôle joué par Apollonius de Perge dans l'étude des sections coniques, il se préoccupa surtout de tracer un tableau fidèle de l'évolution historique de la science mathématique.

Zeuthen eut l'heureuse fortune d'avoir pour collègue à l'Université de Copenhage l'illustre philologue Heiberg, avec lequel il collabora dans plusieurs circonstances. On se rappelle notamment avec quel intérêt fut accueillie la découverte faite par M. Heiberg à Constantinople dans le *Metochion* du cloître du Saint-Tombeau de Jérusalem, d'un manuscrit dont l'écriture, qui date du *treizième* siècle, recouvrait plusieurs manuscrits d'Archimède en belles minuscules du *dixième* siècle. La traduction de M. Heiberg fut suivie d'un remarquable commentaire, dans lequel Zeuthen fait une analyse pénétrante de la façon de travailler du grand géomètre de Syracuse, avec ses méthodes essentiellement distinctes, d'invention et de démonstration. Et comment ne rappellerions-nous pas ici avec reconnaissance la collaboration entre Zeuthen et M. Heiberg, d'où est sortie la magistrale édition des Œuvres de Paul Tannery, sur laquelle veille une pieuse solicitude.

H. G. Zeuthen était né à Grimstrup (Jütland) le 15 février 1839; il s'est éteint doucement à Copenhague le 5 janvier 1920. Chez lui le caractère fut à la hauteur de l'intelligence, et tous ceux qui l'ont approché garderont le souvenir de l'homme bon et simple, dont la longue vie fut consacrée à la science et à sa nombreuse famille. La France perd en lui un ami fidèle, dont les chaudes sympathies pour notre pays remontaient aux temps lointains de sa studieuse jeunesse.

SUR UNE DÉMONSTRATION DE LA FORMULE DE STOKES;

PAR M. J. HAAG.

Il me paraît intéressant de signaler la démonstration suivante, qui diffère légèrement de la démonstration classique.

Soient la courbe fermée C et la surface S limitée à cette courbe.

Choisissons sur C un sens positif quelconque. Soient MX la demi-tangente positive en un de ses points, MY la demi-normale située dans le plan tangent à S et du côté de S et enfin MZ la demi-droite qui forme avec MX et MY un trièdre trirectangle de même orientation que le trièdre des axes de coordonnées. Nous appelons *côté positif* de S celui qui est situé du côté de MZ.

Cela posé, nous allons démontrer la formule

$$(1) \qquad \int_{(C)} P\,dx = \int\int_{(S)} \left(\beta \frac{\partial P}{\partial z} - \gamma \frac{\partial P}{\partial y}\right) d\sigma,$$

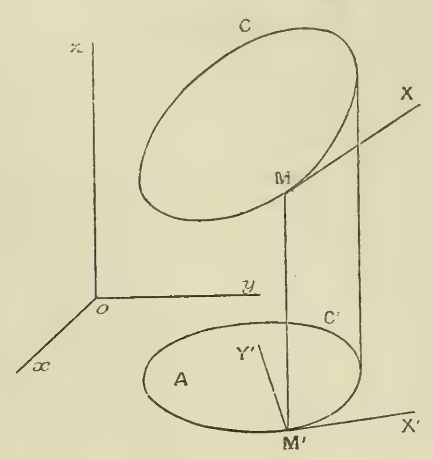
où α, β, γ désignent les cosinus directeurs de la normale positive à S. La formule générale de Stokes se déduit de (1) par permutations circulaires et addition.

L'intégrale double est indépendante de la forme de S, car si on l'étend à une surface fermée, elle est nulle, en vertu de la formule de Green. Nous pouvons donc, pour la calculer, choisir S comme il nous plaira.

Considérons la surface cylindrique Σ obtenue en menant par chaque point de C une demi-droite de direction opposée à Oz. Limitons cette surface par un plan Q parallèle à xOy et assez éloigné pour ne pas rencontrer C. Prenons comme surface S la surface Σ ainsi limitée et la portion A de Q qui lui est intérieure.

Le sens positif de rotation dans le plan tangent en M à Σ est le sens de MX vers MM′ ou de M′ M vers M′ X′, projection de MX sur Q. Il s'ensuit que la demi-normale positive M′ Y′ en M′ se déduit de M′ X′ par une rotation de $+\frac{\pi}{2}$ dans le plan orienté Q, puisque M′ M a le sens de Oz. Nous pouvons toujours supposer que le sens positif de C est tel que le sens positif qui en résulte

pour C′ coïncide avec le sens positif de rotation du plan Q, quitte à changer le signe des deux intégrales [1]. Dès lors, M′ Y′ est dirigé vers l'aire A et le côté positif de cette aire est tourné vers les z positifs.



Cela posé, l'intégrale double s'écrit

$$I = \int\int_{(\Sigma)} \beta \frac{\partial P}{\partial z} d\sigma - \int\int_{(A)} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma.$$

Or,

$$\int\int_{(\Sigma)} \beta \frac{\partial P}{\partial z} d\sigma = \int_{(C')} \beta \, ds' \left(\int_{M'}^{M} \frac{\partial P}{\partial z} dz \right)$$
$$= \int_{(C')} (P_M - P_{M'}) \, dx = \int_{(C)} P \, dx - \int_{(C')} P \, dx.$$

Puis, d'après la formule de Riemann,

$$-\int\int_{(A)} \frac{\partial P}{\partial y} d\sigma = \int_{(C')} P \, dx.$$

Donc,

$$I = \int_{(C)} P \, dx. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

---

[1] Ceci suppose que C′ n'a pas de point double, cas auquel on peut toujours se ramener par un cloisonnement convenable de la surface S. On pourrait aussi appliquer la formule de Riemann, généralisée au moyen de la convention de signes de M. Goursat (*Cours d'Analyse mathématique*, t. I, nº 96).

SUR DES APPLICATIONS DES PROPRIÉTÉS DE LA SYMÉTRIE ;

Par M. Jean MASCART.

Il y a un peu plus de trente ans, on a fait diverses tentatives pour grouper les questions de Géométrie et l'on a proposé différentes *méthodes* pour résoudre les problèmes. Il faut reconnaître que le rendement de tous ces efforts fut assez médiocre : ces soi-disant *méthodes* ne sont presque toujours *que des procédés*, permettant sans doute de trouver la solution de problèmes parfois difficiles, mais qui ont le tort d'avoir été inventés de toutes pièces afin de mettre en évidence, précisément, les ressources et la fécondité du procédé.

Malheureusement, quelques applications de cette nature ont filtré dans les Ouvrages mis entre les mains des élèves, ce qui peut être très dangereux, car je voudrais montrer par un exemple qu'on leur indique ainsi :

1° Une solution fausse;

2° Un raisonnement assez spécieux et peu à leur portée qui, partant de prémisses dont l'inexactitude est très cachée, ne conduit pas immédiatement à une contradiction apparente.

Soient MN un segment; M_1N_1 son symétrique par rapport à une droite I; M_2N_2 le symétrique de M_1N_1 par rapport à une droite II; et ainsi de suite.... M_nN_n sera toujours égal à MN.

Pour exploiter cette remarque, Petersen pose le problème suivant :

Construire un polygone connaissant en position les perpendiculaires élevées au milieu de ses côtés.

Et les livres classiques indiquent, à sa suite, la solution immédiate :

« Soient I, II, ..., N ces perpendiculaires. Soit A un point du plan :

» son symétrique par rapport à I est A_1; le symétrique de A_1 » par rapport à II est A_2,... celui de A_{n-1} par rapport à N, est A_n. » Un autre point B clôt le même circuit en B_n. Et $AB = A_n B_n$.

» **Soit** ω le premier sommet du polygone cherché : Ses symé» triques successifs, par définition des droites I, II, ..., N, sont les » sommets successifs du polygone et ω_n coïncide avec ω. Mais, » alors aussi ωA_n est égal à ωA; ωB_n est égal à ωB. ω *est donc* » le point de rencontre des perpendiculaires élevées aux milieux » de AA_n et de BB_n, **ce qui résout le problème.** »

Or, précisément, ceci ne résout rien du tout et *la solution est fausse*. Il est étrange que l'on n'ait pas envisagé le cas le plus simple, celui du triangle, puisque, dans la solution, aucune restriction n'est imposée aux droites I, II, ..., N. A vient en A_3, B en B_3, les segments AA_3 et BB_3 ne sont pas parallèles; et le point ω permettrait d'obtenir un triangle admettant trois droites I, II, III non concordantes, c'est-à-dire trois centres de cercles circonscrits. De plus, pour le triangle, il est clair que, *quand il y a une solution*, il en existe une infinité : tous les triangles homothétiques par rapport à ω.

L'erreur, assez cachée, consiste à supposer que le polygone existe en disant **soit** ω, ce qui comporte le retour de ω_n en ω, alors que les exigences de la symétrie sont beaucoup plus simples : $\omega_n A_n$ doit être égal à ωA; $\omega_n B_n$ égal à ωB. De sorte que, si le polygone n'existe pas, le point ω ainsi déterminé ne revient pas du tout en ω : il revient en ω_n, second point d'intersection des cercles de centres A_n et B_n et de rayons $A\omega$ et $B\omega$.

Enfin, à un autre point de vue, la solution est trompeuse. Le lecteur croit posséder *la* solution sans savoir si elle est unique, ou combien il en existe : or, pour le savoir, il faudrait déterminer comment le point ω dépend du segment choisi AB, ce qui dépasse le cadre de l'enseignement élémentaire.

Le mécanisme du problème devient beaucoup plus apparent si, au lieu d'un segment AB, on prend tout le plan, orienté par un triangle ABC : on voit alors immédiatement que, si n est pair, $A_n B_n C_n$ est égal à ABC *sans retournement*; si n est impair, $A_n B_n C_n$ est symétrique de ABC. Ainsi donc :

n pair. — Il existe une solution unique : ω est le centre de la

rotation qui, dans son plan, permet d'amener $A_nB_nC_n$ à coïncider avec ABC, et est indépendant des points choisis.

n impair. — $A_n B_n C_n$ résulte de ABC par deux opérations : une symétrie par rapport à une droite Δ et une rotation R et, dans le cas général, le problème est impossible.

Il existe une infinité de combinaisons entre Δ et R qu'il n'y a pas lieu de développer ici. Maïs un cas particulier remarquable est celui où R est identiquement nulle, identiquement excluant la translation avec un angle de rotation nul et le centre à l'infini : $A_n B_n C_n$ est alors symétrique de ABC par rapport à Δ, et chaque point ω de la droite Δ satisfait à l'exigence du problème qui veut $\omega A = \omega A_n$. Il y a alors une infinité de solutions et les lieux des sommets sont des droites — dans le cas du triangle les solutions sont homothétiques : les polygones en question présentent un nouveau genre d'homothétie généralisée et offrent d'intéressantes particularités ; on peut envisager de curieux chaînons de polygones, les côtés de l'un étant les perpendiculaires aux milieux des côtés du suivant.

Donc, n impair, problème impossible : mais il suffit d'imposer *une* condition à *une* des droites I, II, ..., N pour qu'il devienne indéterminé. Exemple : si les $n - 1$ premières droites sont données, $A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}$ coïncide avec ABC par une rotation de Δ autour d'un centre R. Le problème devient indéterminé si la droite N passe par R, la droite Δ passe alors aussi par R et fait un angle θ avec N.

On peut aussi bien se donner n droites remarquables du polygone cherché, telles que hauteurs, médianes (qu'il suffit de définir, ce qui est presque sans ambiguïté si n est impair) : les changements à apporter à la solution sont infimes.

Cas des bissectrices. — Il est plus intéressant d'envisager le cas où les droites données sont les bissectrices des angles du polygone car, dès le triangle [1], on ne rencontre pas l'obligation de droites

---

[1] Il ne faut pas s'attarder au triangle car on serait tenté de ramener le problème à celui des hauteurs, en utilisant le fait que celles-ci sont bissectrices du triangle formé par les pieds des hauteurs : ce n'est qu'un très petit côté de la question, qui la déforme et la borne.

concourantes [1] : ce problème présente, par rapport au premier, une correspondance *analogue* — mais non identique — à celle qui relie les questions ponctuelles aux questions tangentielles. D'une part, on ne peut affirmer à l'avance si une bissectrice est intérieure ou extérieure; d'autre part, la symétrie n'est pas tout à fait du même genre car la symétrique d'une droite par rapport à un axe l'est en même temps par rapport à un second axe perpendiculaire au premier.

Le problème se ramène alors à la question suivante : Soit MN le premier côté du polygone cherché, $M_n N_n$ devra coïncider avec MN — sans correspondance ponctuelle. Et, alors, c'est l'inverse :

n pair. — Les symétries successives aboutissent à une rotation 2θ autour d'un centre R : aucune droite ne coïncide avec sa position après rotation et le problème est *impossible*. Remarques analogues pour le cas où il devient indéterminé.

n impair. — Le problème admet *une* solution : il existe une droite MN qui revient sur elle-même (avec glissement) après une symétrie par rapport à Δ puis rotation 2θ autour de R; MN passe par le pied de la perpendiculaire abaissée de R sur Δ et fait un angle θ avec Δ.

Il y a là une mine à problèmes assez délicats qui paraissent inutiles, ou dangereux, dans l'enseignement : jusqu'à présent, pour apprendre la géométrie, on ne saurait encore trop recommander de résoudre de *nombreux* exercices bien choisis.

---

[1] C'est au contraire pour le quadrilatère que saute aux yeux une condition, les bissectrices devant former un quadrilatère inscriptible.

SUR LA MÉTHODE D'INTÉGRATION DE RITZ;

Par M. Michel PLANCHEREL (Zurich).

INTRODUCTION.

1. Dans un travail remarquable ([1]), W. Ritz a donné une méthode de calcul des solutions d'une classe étendue de problèmes aux frontières de la théorie des équations linéaires aux dérivées partielles. Son importance pratique considérable réside dans le fait qu'elle est une des rares méthodes qui permettent de calculer numériquement les solutions de ces problèmes. Nous possédons, dans la théorie des équations intégrales linéaires, un instrument puissant pour établir l'existence et les propriétés générales de ces solutions, mais il est en général impossible d'utiliser les formules de Fredholm pour des calculs numériques.

La méthode de Ritz s'applique à tous les problèmes aux frontières des équations aux dérivées partielles linéaires du type elliptique, qui découlent d'un problème du calcul des variations. Elle substitue à l'intégration de ces équations la résolution, par une méthode particulière d'approximations successives, d'un problème équivalent du calcul des variations. Pour en faire saisir le principe, esquissons-la sur un exemple simple.

2. Soit D un domaine plan dont la frontière C est une courbe fermée simple à courbure continue. La recherche d'une fonction u, continue dans D + C ainsi que ses dérivées du premier ordre, vérifiant dans D l'équation

$$\Delta u + \lambda u = f, \tag{1}$$

et sur C la condition

$$u = 0 \tag{2}$$

([1]) W. Ritz : (*a*) *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, t. 135, 1908, p. 1-61 ; (*b*) *Annalen der Physik*, 4e série, t. 28, 1909, p. 737-786; (*c*) *Œuvres de* W. Ritz, publiées par la Société suisse de Physique (Paris, Gauthier-Villars, 1911), p. 192-316.

est équivalente, comme on le sait, à la résolution du problème suivant :

Soit U_0 le champ des fonctions nulles sur C, continues dans D + C ainsi que leurs dérivées premières. Trouver la fonction u de ce champ qui annule (dans ce champ) la variation première de l'intégrale

$$(3)\quad \mathfrak{I}(u, \lambda) = \mathfrak{I}(u) = \iint_D \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 - \lambda u^2 + 2 f u\right] dx\, dy.$$

Dans ces formules, λ est un paramètre et f une fonction donnée, continue dans D + C ainsi que ses dérivées premières.

Ritz cherche à résoudre, non pas l'équation (1) sous la condition (2), mais le problème équivalent $\delta\mathfrak{I}(u) = 0$. Pour cela, il approche le champ U_0 par des champs $U_0^{(n)}$ plus simples, pour lesquels la solution est immédiate. A cet effet, il part d'un système de fonctions $\psi_p(x, y)$ de U_0 tel que toute fonction u de U_0 puisse être, en même temps que ses dérivées premières, approchée uniformément par une combinaison linéaire des ψ_p. Il admet donc, $\varepsilon > 0$ étant pris arbitrairement petit, la possibilité de déterminer un entier n et des coefficients $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que, dans D + C,

$$\left| u - \sum_{p=1}^{n} a_p \psi_p \right| < \varepsilon, \qquad \left| \frac{\partial u}{\partial x} - \sum_{p=1}^{n} a_p \frac{\partial \psi_p}{\partial x} \right| < \varepsilon, \qquad \left| \frac{\partial u}{\partial y} - \sum_{p=1}^{n} a_p \frac{\partial \psi_p}{\partial y} \right| < \varepsilon.$$

L'existence de systèmes de fonctions ψ_p ayant ces propriétés découle d'un théorème connu de Weierstrass, et Ritz indique plusieurs procédés pour les former.

Ritz prend alors comme champ $U_0^{(n)}$ l'ensemble des fonctions

$$u_n = x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + \ldots + x_n\psi_n \qquad (-\infty < x_p < +\infty,\ p = 1, 2, \ldots, n),$$

et il se pose le problème approché : Déterminer la fonction u_n du champ $U_0^{(n)}$ pour laquelle la variation première de $\mathfrak{I}$ — dans ce champ — est nulle. Or, $\mathfrak{I}(u_n)$ est ici une fonction quadratique de $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$\mathfrak{I}(u_n) \equiv \mathfrak{I}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{p=1}^{n} \sum_{q=1}^{n} (k_{pq} - \lambda h_{pq}) x_p x_q + 2 \sum_{p=1}^{n} f_p x_p.$$

Les quantités k_{pq}, h_{pq}, f_p sont définies par

$$k_{pq} = k_{qp} = \int\int_D \left[\frac{\partial\psi_p}{\partial x}\frac{\partial\psi_q}{\partial x} + \frac{\partial\psi_p}{\partial y}\frac{\partial\psi_q}{\partial y}\right] dx\, dy,$$

$$h_{pq} = h_{qp} = \int\int_D \psi_p\, \psi_q\, dx\, dy, \qquad f_p = \int\int_D f\psi_p\, dx\, dy.$$

k_{pq} et h_{pq} sont donc des constantes qui ne dépendent que de la forme du domaine et du choix du système ψ_p. f_p dépend encore de f.

La condition $\delta\mathfrak{I}(u_n) = 0$ dans le champ $U_0^{(n)}$ se réduit aux n conditions

$$\frac{\partial\mathfrak{I}}{\partial x_1} = \frac{\partial\mathfrak{I}}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial\mathfrak{I}}{\partial x_n} = 0,$$

c'est-à-dire aux n équations linéaires

$$\sum_{q=1}^{n}(k_{pq} - \lambda h_{pq})\, x_q = -f_p \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

Lorsque leur déterminant n'est pas nul, ces équations ont une solution unique

$$x_1 = a_1^{(n)}, \qquad x_2 = a_2^{(n)}, \qquad \ldots, \qquad x_n = a_n^{(n)}.$$

La fonction

$$u^{(n)} = a_1^{(n)}\psi_1 + a_2^{(n)}\psi_2 + \ldots + a_n^{(n)}\psi_n$$

est la solution du problème approché relatif au champ $U_0^{(n)}$. Peut-on s'attendre à ce que $u^{(n)}$ converge vers la solution u du problème relatif au champ U_0?

Ritz a effectivement démontré qu'à condition de remplacer la convergence ordinaire par la convergence *en moyenne* $u^{(n)}$ tend vers u dans le cas où $\lambda \leqq 0$. Le succès de son raisonnement repose essentiellement sur le fait que, pour $\lambda \leqq 0$, la forme quadratique formée par les termes quadratiques de $\mathfrak{I}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est définie positive.

On sait qu'il existe une infinité dénombrable de nombres λ_p positifs tels que l'équation homogène $\Delta u + \lambda_p u = 0$ possède un nombre fini ($\geqq 1$) de solutions non identiquement nulles, s'annulant sur C. Ces solutions, convenablement normées et orthogonalisées, sont les fonctions fondamentales du problème homogène et

les λ_p sont les valeurs fondamentales. Valeurs et fonctions fondamentales ont une signification physique importante. Si, par exemple, D représente une membrane élastique homogène encastrée, les valeurs fondamentales sont proportionnelles aux carrés des fréquences des oscillations libres harmoniques de la membrane et les fonctions fondamentales fixent la forme de ces oscillations [1].

La méthode de Ritz est-elle encore applicable à l'équation (1) lorsque λ est positif, sans être une valeur fondamentale? Permet-elle de calculer les valeurs fondamentales λ_p comme limites des zéros du déterminant du système homogène

$$(4)\qquad \sum_{q=1}^{n} (k_{pq} - \lambda h_{pq}) x_q = 0 \qquad (p = 1, 2, \ldots, n).$$

et peut-on approcher en moyenne les fonctions fondamentales à l'aide des solutions de (4)?

Nous donnerons au cours de ce Mémoire une réponse affirmative à ces questions. Ritz a rendu plausible cette réponse en calculant par sa méthode les vibrations harmoniques d'une corde et celles d'une plaque rectangulaire à bords libres (figures de Chladni) et en constatant l'accord parfait entre les valeurs expérimentales et les valeurs calculées. Bien avant Ritz, lord Rayleigh avait déjà, dans sa *Theory of sound* et dans quelques autres travaux, utilisé l'équivalence du problème différentiel et du problème de variation et montré comment on peut en déduire des valeurs approchées de la plus petite valeur fondamentale [2]. Mais, c'est à Ritz que revient le mérite d'avoir dégagé la méthode générale, d'en avoir montré sur quelques exemples toute l'importance et d'avoir démontré rigoureusement, dans quelques cas particuliers, qu'elle donne un procédé convergent de calcul.

3. Le but de ce Mémoire est de démontrer dans toute sa géné-

---

(1) Pour tout ce qui concerne la signification physique des problèmes traités dans ce Mémoire, je renvoie à l'Ouvrage de F. Pockels : *Ueber die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, und deren Auftreten in der mathematischen Physik* (Leipzig, Teubner, 1891).

(2) Rayleigh, *Philosophical Magazine*, 5e série, t. 47, 1899, p. 566-572, et 6e série, t. 22, 1911, p. 225-229.

ralité la légitimité de la méthode de Ritz. Je pars de l'existence, démontrée par d'autres méthodes, des valeurs et des fonctions fondamentales, et j'utilise la théorie des formes quadratiques à une infinité de variables.

J'expose dans le Chapitre I les hypothèses qui servent de base aux recherches des Chapitres II et IV et les résultats à obtenir dans ces Chapitres.

Un second Chapitre est consacré au cas où λ est inférieur à la valeur fondamentale minimale.

Puis, dans le Chapitre III, je donne la démonstration des propriétés de la théorie des formes quadratiques à une infinité de variables dont j'aurai à faire l'emploi.

Le Chapitre IV étendra à toutes les valeurs de λ la légitimité de la méthode et le Chapitre V traitera de quelques généralisations, en particulier des équations d'ordre supérieur à 2 et des équations du type $\Delta u + \lambda g u = f$, où g n'a pas un signe constant [1].

CHAPITRE I.

HYPOTHÈSES DE DÉPART ET RÉSULTATS.

4. Hypothèses. — 1° Soit D un domaine plan, borné, de frontière C, composée d'un nombre fini de courbes fermées simples, chacune de ces courbes étant elle-même formée d'un nombre fini d'arcs à courbure continue, se raccordant sans rebroussement. Soit

$$(5)\qquad t(u) \equiv a_{11}(x, y)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + 2a_{12}(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y} + a_{22}(x, y)\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + a_{33}(x, y)\,u^2$$

une expression différentielle où $a_{11} > 0$, $a_{22} > 0$, $a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$

---

[1] J'ai communiqué les résultats de ce Mémoire dans une Note des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (Paris), t. 169, 2e semestre 1919, p. 1152-1155. Depuis lors a paru un travail de R. Courant : *Ueber die Lösungen der Differentialgleichungen der Physik* (*Mathematische Annalen*, t. 85, 1922, p. 280-325, Chap. IV), dans lequel, par une méthode différente, l'auteur retrouve incidemment certains résultats de mon Mémoire.

dans D + C. La forme quadratique $a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2$ est *définie positive* en tout point (x, y) de D + C. a_{11}, a_{12}, a_{22} et leurs dérivées premières sont supposées continues dans D + C; a_{33} est continue dans D + C.

$g'(x, y)$ et $f'(x, y)$ désigneront dans ce qui suit deux fonctions continues dans D + C ainsi que leurs dérivées premières; a'', g'', f'' désigneront trois fonctions définies et continues sur C. λ représentera un paramètre, $d\sigma$ l'élément d'aire de D et ds l'élément d'arc de C.

Nous supposerons, de plus, dans les Chapitres I, II et IV, que $g' > 0$ dans D + C et que g'', si elle n'est pas identiquement nulle, est essentiellement positive sur C. Nous lèverons ces restrictions dans le Chapitre V.

2° Soit $\mathfrak{F}$ le champ des fonctions u continues dans D + C ainsi que leurs dérivées premières et possédant dans D des dérivées secondes finies. Le problème de variation

Problème A. — *Déterminer la fonction u du champ $\mathfrak{F}$, pour laquelle la variation première de l'intégrale*

$$(6)\quad \mathfrak{J}(u) = \int_D t(u)\,d\sigma + \int_C a'' u^2\,ds - \lambda\left[\int_D g' u^2\,d\sigma + \int_C g'' u^2\,ds\right] + 2\int_D g' f' u\,d\sigma + 2\int_C g'' f'' u\,ds$$

est nulle,

est équivalent au problème différentiel

Problème A'. — *Déterminer la fonction u du champ $\mathfrak{F}$ vérifiant dans le domaine* D *l'équation*

$$(7)\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - a_{33}u + \lambda g' u = g' f'$$

et sur C *la relation*

$$(8)\quad \left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n, x) + \left(a_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n, y) - (a'' - \lambda g'')u = g'' f''.$$

(n, x), (n, y) sont les angles que fait la normale intérieure avec les axes rectangulaires x, y [1].

3° On sait qu'il existe une suite dénombrable de valeurs réelles du paramètre λ, dites les *valeurs fondamentales* du problème homogène A ou A' (c'est-à-dire du problème où $f' = 0$, $f'' = 0$) :

$$(9) \qquad \lambda_1 < \lambda_2 \leqq \lambda_3 \leqq \ldots \leqq \lambda_p \leqq \ldots,$$

ayant $+\infty$ comme limite,

$$(10) \qquad \lim_{p=\infty} \lambda_p = \infty;$$

caractérisées par la propriété suivante : Si λ est une valeur fondamentale, et seulement dans ce cas, l'équation homogène

$$(11) \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right) - a_{33}u + \lambda g' u = 0$$

possède un nombre fini $r \geqq 1$ de solutions linéairement indépendantes, vérifiant sur C la condition homogène

$$(12) \quad \left(a_{11}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{12}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n, x) + \left(a_{12}\frac{\partial u}{\partial x} + a_{22}\frac{\partial u}{\partial y}\right)\cos(n, y) - (a'' - \lambda g'')u = 0.$$

r définit la multiplicité de la valeur fondamentale. Répétant dans la suite (9) chaque valeur fondamentale autant de fois que l'indique sa multiplicité, on peut attacher à chaque terme λ_p de cette suite une solution φ_p du problème homogène relatif à la valeur $\lambda = \lambda_p$ et l'on peut toujours faire en sorte que ces fonctions φ_p vérifient les relations d'*orthogonalité*

$$(13) \qquad \mathbf{S}\varphi_p\varphi_q = \delta_{pq} \qquad (p, q = 1, 2, 3, \ldots).$$

Le symbole $\mathbf{S}$ est une abréviation pour l'opération

$$(14) \qquad \mathbf{S} = \mathbf{S}_{xy} = \int_D g' \ldots d\sigma + \int_C g'' \ldots ds.$$

---

[1] L'adjonction à $L(u)$ de termes $2a_{13}u\frac{\partial u}{\partial y} + 2a_{23}u\frac{\partial u}{\partial y}$ n'apporte rien de nouveau; elle équivaut à modifier les valeurs de a_{33} et de a'', comme le montre une intégration par parties

Donc

$$\mathbf{S}\varphi_p\varphi_q = \mathbf{S}_{xy}\varphi_p(x, y)\varphi_q(x, y) = \int_D g'\varphi_p\varphi_q\, d\sigma + \int_C g''\varphi_p\varphi_q\, ds.$$

Quant à δ_{pq}, ce symbole signifiera toujours dans la suite l'unité lorsque $p = q$ et zéro lorsque $p \neq q$. Les fonctions φ_p ainsi normées sont les *fonctions fondamentales* du problème homogène A ou A'. Elles forment un système orthogonal fermé pour le champ $\mathfrak{F}$. Elles vérifient les relations

$$(15)\qquad \int_D t(\varphi_p, \varphi_q)\, d\sigma + \int_C a''\varphi_p\varphi_q\, ds = \delta_{pq}\lambda_p \qquad (p, q = 1, 2, 3, \ldots).$$

$t(\varphi_p, \varphi_q)$ est ici une abréviation pour la forme différentielle polaire définie par

$$(16)\quad \begin{cases} t(u, v) = a_{11}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial x} + a_{12}\dfrac{\partial u}{\partial x}\dfrac{\partial v}{\partial y} + a_{21}\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial x} + a_{22}\dfrac{\partial u}{\partial y}\dfrac{\partial v}{\partial y} + a_{33}uv \\ \qquad\qquad (a_{21} = a_{12}). \end{cases}$$

4° Si λ_p est de multiplicité r, par exemple si

$$(17)\qquad \lambda_{p-1} < \lambda_p = \lambda_{p+1} = \ldots = \lambda_{p+r-1} < \lambda_{p+r},$$

les fonctions $\varphi_p, \varphi_{p+1}, \ldots, \varphi_{p+r-1}$ y relatives ne sont déterminées par les conditions (13) qu'à une substitution orthogonale de rang r près. Par contre, la fonction

$$\varphi_p(x, y; x', y') = \sum_{s=p}^{p+r-1} \varphi_s(x, y)\varphi_s(x', y')$$

est indépendante du choix particulier des fonctions fondamentales et elle est caractéristique de la valeur fondamentale λ_p de multiplicité r.

(*A suivre.*)

ERRATUM

(numéro de juin 1923).

—

Note de M. Michel Plancherel (Démonstration du théorème de Riesz-Fischer et du théorème de Weyl sur les suites convergentes en moyenne) :

Page 203, ligne 11, *au lieu de*

$$\int_{x_0}^{x_1} |f|^\beta \, dx \leq |x_1 - x_0|^{\frac{\alpha-\beta-1}{\alpha-\beta}} \left[\int_{x_0}^{x_1} |f|^\alpha \, dx \right]^{\frac{1}{\alpha-\beta}},$$

lire

$$\int_{x_0}^{x_1} |f|^\beta \, dx \leqq |x_1 - x_0|^{1-\frac{\beta}{\alpha}} \left[\int_{x_0}^{x_1} |f|^\alpha \, dx \right]^{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

DICKSON (L. E.). — Algebras and their arithmetics. Un volume (18 × 16) de XII + 242 pages. Published by the University of Chicago Press. Prix 2,25 dollars.

Pour ceux d'entre nous qui ne les fréquentons pas en spécialistes, les algèbres à plusieurs unités présentent des difficultés assez considérables. Tout d'abord nous avons l'habitude acquise d'un mécanisme algébrique fort simple, qui s'élargit vraiment pour de bon quand on étudie ces algèbres. De là notations et termes nouveaux assez nombreux (*voir* l'index de l'Ouvrage de M. Dickson) auxquels on ne se fait que lentement. Ensuite, et surtout, les contacts entre les parties un peu avancées de la théorie et le reste des mathématiques sont peu nombreux. Il n'en est pas moins vrai que cette théorie est fort jolie et mérite d'être étudiée davantage.

M. Dickson, dont les contributions datent de loin, a déjà écrit sur les algèbres à plusieurs unités un opuscule qui fait autorité (*Linear Algebras* Cambridge University Press, 1914). Dans le Volume que nous examinons, il s'est surtout proposé de présenter les résultats fort intéressants qu'il vient d'obtenir sur le côté arithmétique de la question. Néanmoins plus de la moitié de l'Ouvrage est consacrée à une présentation nouvelle de la théorie générale, avec, cette fois, pour point de départ, un champ fondamental tout à fait général. On se rappellera que dans le *Cambridge Tract* le champ était simplement celui des nombres complexes ordinaires. Il y a là d'importants contacts avec certains travaux de MM. Wedderburn et Scorza, comme l'auteur se plaît à le reconnaître dans sa Préface.

La partie la plus intéressante de l'Ouvrage, on s'y attendra, en est la seconde moitié, se rapportant aux arithmétiques. Dès le début ce problème difficile : Comment définir les *éléments entiers* d'une algèbre rationnelle A (algèbre dont le champ fondamental

est celui des nombres rationnels) ? La question a été traitée par Lipschitz et Hurwitz pour les quaternions, par M. du Pasquier pour le cas général. Voici la définition de M. Dickson. Elle semble bien dépasser comme puissance et richesse celles de ses prédécesseurs : On suppose A associative et à *module* (élément unité pour les deux types de multiplication) : Chaque élément d'un ensemble E est un entier de A lorsque : 1° les coefficients de l'équation minima (*rank equation*) que satisfait un élément quelconque sont entiers (le premier toujours égal à un); 2° E est clos sous les opérations d'addition, de soustraction et de multiplication; 3° E contient le module; 4° E n'est sous-ensemble d'aucun ensemble aux trois propriétés précédentes. En poussant la question, M. Dickson a démontré, chose fort importante, qu'au point de vue arithmétique on peut se borner aux algèbres dites *semi-simples*.

L'Ouvrage se termine par trois appendices dont le dernier est particulièrement suggestif : il contient les énoncés de problèmes importants non résolus, et de théorèmes pour les démonstrations desquels on est renvoyé aux écrits originaux (presque tous récents).

SALOMON LEFSCHETZ.

MÉLANGES.

SUR LA DÉFINITION ET LE MODE DE CONTINUITÉ DE LA FONCTION DE GREEN HARMONIQUE ET DE LA SOLUTION DU PROBLÈME DE DIRICHLET;

PAR GEORGES BOULIGAND.

1. Après avoir montré, dans un précédent Mémoire (1), la nécessité d'envisager dans sa plénitude le champ où une fonctionnelle

(1) *Bulletin des Sciences mathématiques.*

est susceptible d'être définie (en restant soumise à des conditions de continuité), nous allons faire voir que la délimitation artificielle du champ, préjudiciable à la validité de certains théorèmes, ne provient pas toujours du bon plaisir d'un géomètre, en quête d'énoncés paradoxaux.

Dans ce but, nous aurons recours à la fonction de Green harmonique. Cette étude nous amènera en même temps à préciser quelques particularités intéressantes relatives à son mode de continuité. Les résultats que nous donnerons dans cette voie sont en connexion avec certaines propositions, rencontrées par M. Lebesgue dans l'étude des singularités des fonctions harmoniques, et que j'avais obtenu moi-même indépendamment par les considérations qui vont être exposées dans la suite de ce Mémoire [1]. Nous conclurons en montrant l'opportunité qu'il y aurait peut-être à élargir l'énoncé du problème de Dirichlet [2].

2. Plaçons-nous, pour fixer les idées, dans l'espace euclidien à trois dimensions. Si nous parlons de fonction de Green au sens classique de la théorie du problème de Dirichlet, l'existence n'en sera certaine que pour les domaines répondant aux conditions de possibilité de ce problème. Or M. Lebesgue a donné l'exemple d'un domaine échappant à ces conditions [3]. Nous établirons d'abord explicitement qu'il existe des domaines n'ayant pas de fonction de Green au sens classique : il suffira pour cela de modifier très légèrement l'exemple de M. Lebesgue.

Sur un axe $x'x$, prenons une origine O, et considérons le point A d'abscisse $+1$, le point B d'abscisse -1. Considérons le champ électrostatique créé par une masse $+1$ fixée en A et par une distribution continue de masses négatives sur OB, dont le potentiel propre ait, en O, la valeur $-\lambda$; c'est ce qu'on réalise en faisant, en chaque point μ de OB, la densité égale à $\lambda\, O\mu$. Les surfaces équipotentielles sont de révolution autour de $x'x$. Soit xOy un plan

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 23 avril et 7 mai 1923.

(2) M. H. Lebesgue a bien voulu s'intéresser à mes recherches et me signaler dans cet ordre d'idées certains travaux de MM. B. Levi, Fubini (*Circ. Pal.* 1906, 1907) et Zaremba (*Bull. Ac. Sc. Cracovie*, 1909).

(3) *Comptes rendus des Séances de la Société mathématique de France*, 1913, page 17.

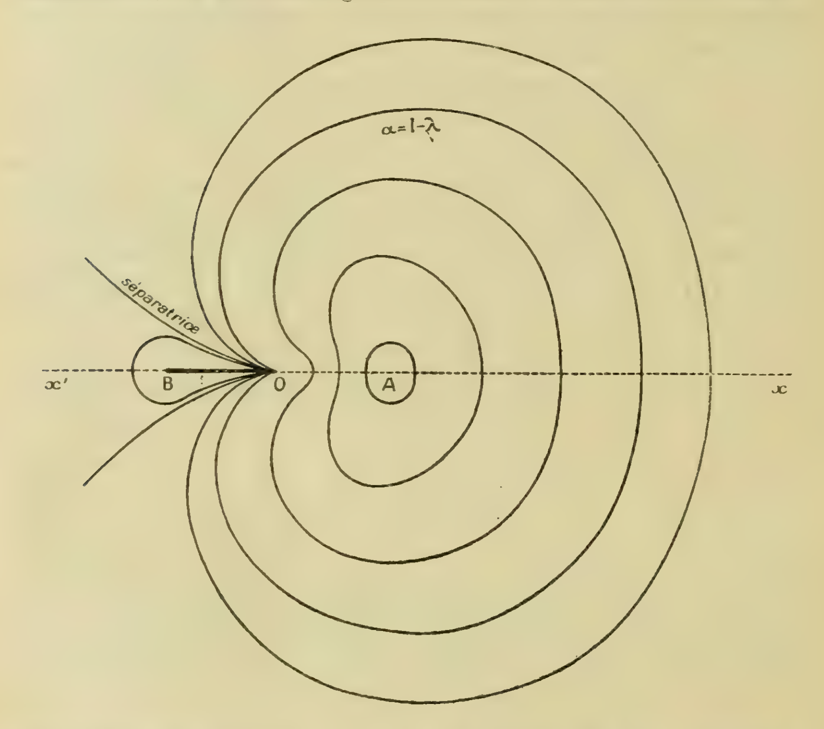
méridien quelconque. En un point M (x, y) de ce plan, le potentiel a pour valeur

$$(1) \qquad V(x, y) = \frac{1}{AM} + \lambda \int_{-1}^{0} \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2 + y^2}},$$

μ désignant l'abscisse de ξ. Étudions la forme des lignes

$$V(x, y) = \alpha.$$

Pour des valeurs positives très grandes de α, ce sont des lignes fermées, d'aspect circulaire, entourant le point A. Lorsqu'on fait décroître α, on voit ces lignes s'infléchir comme si elles étaient



repoussées par le point O. Pour les valeurs de α qui satisfont à l'inégalité

$$\alpha \leqq 1 - \lambda,$$

la courbe offre en O un rebroussement. Pour faire la figure, nous avons supposé que λ reçoive une valeur positive suffisamment

élevée, de manière que la *séparatrice*, qui délimite la région balayée par les courbes entourant le point A et la région balayée par les courbes entourant le segment OB, corresponde à une valeur α_1 moindre que $1 - \lambda$. S'il en est ainsi, les courbes qui correspondent aux valeurs α soumises aux inégalités.

$$(2) \qquad \alpha_1 \leq \alpha < 1 - \lambda$$

rappellent, par leur aspect, des cardioïdes.

Considérons l'une de ces dernières courbes, et supposons que la valeur α dont elle provient satisfasse *au sens strict* aux inégalités (2). En tournant autour de $x'x$, cette courbe engendre une surface de révolution, qui délimite un domaine Ω englobant le point A à son intérieur. Nous allons montrer que, pour un tel domaine, il n'existe pas de fonctions de Green ayant pour pôle le point A.

Une telle fonction serait la somme de $\frac{1}{AM}$ et d'une fonction harmonique dans tout le domaine. Elle devrait s'annuler sur la frontière du domaine. Admettons un instant son existence et désignons-la par G (A, M). La différence

$$G(A, M) + \alpha - V(M)$$

serait une fonction de M, harmonique dans tout le domaine. De plus, elle s'annulerait en tout point de sa frontière autre que O. Mais au point O, G s'annulant, l'expression précédente serait indéterminée, et comprise entre les limites o et $\alpha + \lambda - 1$ [1]. Cette dernière limite devrait être effectivement atteinte lorsqu'on tendrait vers le point O par un chemin tout entier intérieur au domaine ω délimité par la surface

$$V = 1 - \lambda.$$

Il n'existe pas, dans le domaine Ω, de fonction harmonique satisfaisant simultanément aux conditions précédentes. Ce fait est une conséquence du théorème suivant :

Si une fonction est harmonique dans le domaine Ω *et sur sa frontière, sauf peut-être au point* O *de cette frontière, si elle s'annule sur*

---

[1] Ceci est une conséquence immédiate de la disposition des courbes $\alpha = \text{const}$.

la frontière, et si enfin, aux environs de O *elle reste comprise entre* o *et un nombre fixe* K, *elle est identiquement nulle dans le domaine* Ω.

En effet, traçons une sphère de centre O et de rayon ε. En un point M du domaine Ω, situé à l'extérieur de cette sphère, la fonction considérée est en valeur absolue moindre que la fonction, harmonique dans tout l'espace extérieur à cette sphère, et qui prend sur celle-ci la valeur constante (K). En désignant par U_M la valeur de cette fonction au point M, on a donc

$$|U_M| < \frac{\varepsilon |K|}{OM}$$

et puisque ε est arbitrairement petit, U_M est nulle en tout point du domaine Ω (¹).

Il est donc établi qu'il existe des domaines, dépourvus de fonction de Green au sens classique.

3. Par contre, lorsqu'on se place au point de vue de l'Analyse fonctionnelle, la fonction de Green peut être définie dans des conditions beaucoup plus larges. L'extension dont il s'agit s'opère tout naturellement au moyen de la formule de M. Hadamard

$$(3) \qquad \delta G_P^Q = \frac{1}{4\pi}\iint \frac{dG_P^M}{dn}\frac{dG_M^Q}{dn}\,\delta n\, dS_M,$$

qui définit l'accroissement infinitésimal pris par G_P^Q, lorsque laissant fixes les deux points P et Q intérieurs au domaine proposé, on fait subir à la frontière de celui-ci une variation infinitésimale; on représente le petit déplacement du point M de la frontière, compté positivement dans le sens de la normale extérieure. La formule (3) n'est jusqu'à présent établie que pour des domaines dont la frontière est une surface, admettant en chaque point un plan tangent et deux rayons de courbure principaux assujettis à ne pas s'annuler : en énonçant ces conditions, on exclut la présence de points singuliers, et l'on est assuré que le problème de Dirichlet admet une solution unique.

(¹) La même conclusion subsisterait si l'on supposait que l'on a, aux environs du point O,

$$|U_M| < \frac{OM^\alpha}{|K|},$$

en désignant par α un exposant positif et moindre que l'unité.

Mais la formule (3) montre que la fonction de Green va en croissant lorsque, P et Q restant fixes, le domaine proposé se dilate de toutes parts. Cette circonstance permet d'étendre la définition de la fonction de Green à des domaines dont la frontière ne répond plus aux conditions ci-dessus énoncées (nous dirons en abrégé : les conditions K), mais qui peuvent être envisagés comme la limite commune de deux suites de domaines, les uns intérieurs, les autres extérieurs au domaine proposé, et qui remplissent tous les conditions K.

Reprenons, pour fixer les idées, l'exemple du n° 2, et le domaine Ω que nous y avons choisi, et qui correspond à une valeur du paramètre α intermédiaire entre les valeurs α_1 et $1-\lambda$. Pour obtenir ce domaine Ω, nous sommes partis du potentiel défini par l'équation (1), que nous récrirons sous la forme

$$V(x,y) = \frac{1}{AM} = \lambda \int_{BO} \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}}.$$

Désignons par O_1 un point intérieur au segment BO, et posons

$$V_1(x,y) = \frac{1}{AM} + \lambda \int_{BO_1} \frac{\xi\, d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}}.$$

Le potentiel V est la limite du potentiel V_1 lorsque le point O_1 tend vers le point O. En désignant toujours par α la valeur du paramètre qui fournit le domaine Ω, il est immédiat que la courbe $V_1 = \alpha$ est extérieure à la courbe $V = \alpha$, et que le domaine qu'elle engendre par sa révolution autour de $x'x$ satisfait aux conditions K.

Pareillement, si nous désignons par η une quantité négative, supposée constante, et si nous posons

$$V_2(x,y) = \frac{1}{AM} + \lambda \int_{BO} \frac{(\xi+\eta)\, d\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+y^2}},$$

le potentiel V sera la limite du potentiel V_2 lorsqu'on fera tendre η vers zéro. On remarque cette fois que la courbe $V_2 = \alpha$ est intérieure à la courbe $V = \alpha$, et le domaine qu'elle engendre satisfait encore aux conditions K.

Il résulte de là, qu'au sens de l'Analyse fonctionnelle, le domaine Ω admet une fonction de Green, limite commune des fonctions de Green des domaines Ω_1 et Ω_2 (engendrés respectivement par les

lignes $V_1 = \alpha$ et $V_2 = \alpha$). Or ces fonctions de Green sont respectivement $V_1(M) - \alpha$ et $V_2(M) - \alpha$. Donc, la fonction de Green, au sens étendu, du domaine Ω, est égale à $V(M) - \alpha$. Seulement, cette fonction de Green ne s'annule pas au point O : si un point M tend vers le point O suivant un chemin intérieur au domaine précédemment désigné par ω, la quantité G_A^M a pour limite $1 - \lambda - \alpha$. Si l'on fait tendre M vers O par un chemin intérieur à Ω, bien qu'extérieur à ω, la quantité G_A^M peut tendre vers toute valeur comprise entre zéro et la limite précédente [1].

4. En vertu des considérations précédentes, il est clair que la fonction de Green est continue pour un voisinage uniforme d'ordre zéro. Nous allons montrer qu'en réalité, le mode de continuité de la fonction de Green est soumis à des conditions beaucoup moins restrictives.

Considérons un domaine Ω, et soit G_A^B la fonction de Green pour deux points A et B intérieurs à ce domaine. Soit C une ligne rectifiable qui pénètre à l'intérieur du domaine Ω. Enlevons de Ω la portion de l'espace balayée par des sphères centrées sur C et de rayon infiniment petit ε. Il reste un domaine Ω', dont la fonction de Green $G_A'^B$ est infiniment voisine de la fonction de Green G_A^B du domaine Ω.

La démonstration résulte simultanément de la propriété d'accroissement par dilatation et de la remarque suivante : en distribuant continûment sur C des masses positives et de potentiel φ l'équation

$$G_A^M - \varphi_M = 0 \tag{4}$$

représente une surface Σ, intérieure au domaine Ω. Si l'on fait tendre vers zéro la densité linéaire de la répartition des masses sur C, cette surface Σ tend vers la surface S (avec un voisinage

[1] Pour donner un autre exemple d'extension de la fonction de Green, imaginons qu'on prenne sur chaque demi-droite, issue d'un point fixe O, un point P tel que OP soit une fonction continue et positive du point p, intersection de cette demi-droite avec la sphère de centre O et de rayon un. L'ensemble des points situés sur ces demi-droites entre O et P constitue un domaine dont la frontière peut ne pas admettre de plan tangent. Ce domaine admet cependant, pour chaque couple de points intérieurs, une fonction de Green, qui peut parfaitement échapper à certains caractères, exigés de la solution du problème de Dirichlet au sens classique.

d'ordre qu'on peut rendre aussi élevé qu'on veut, moyennant des hypothèses convenables faites sur S; en particulier ce voisinage est d'ordre infini, si S est analytique); toutefois, il y a exception aux alentours des divers points de pénétration de C; la surface Σ quitte en chacun d'eux le voisinage de la surface S pour venir englober C à l'intérieur d'une sorte de canal qui se resserre indéfiniment autour de C lorsqu'on atténue indéfiniment la densité des masses sur cette courbe. La fonction de Green du domaine Ω_1, limité par Σ, fonction calculée par le pôle A, a pour valeur

$$G_1 = G_A^M - v_M.$$

Elle est donc infiniment voisine de G_A^M, ce qui démontre le théorème annoncé.

5. Non seulement v^M, mais encore ses dérivées partielles, peuvent être arbitrairement affaiblies dans chaque portion de l'espace extérieure à un domaine fini englobant C. Donc, si nous prenons sur la frontière S de Ω un point différent d'un point de pénétration de C, et si nous prenons sur Σ un point infiniment voisin du premier, en ces points, les dérivées normales $\frac{dG}{dn}$ et $\frac{dG_1}{dn_1}$ de G et de G_1 seront elles-mêmes infiniment voisines. Pour être assurés de la légitimité de cette conclusion, nous prendrons simplement soin de supposer que S est pourvue, en tous ses points, d'un plan tangent variant continûment, et de deux rayons de courbure principaux non nuls.

Cela posé, écrivons les relations

$$\int\int_S \frac{dG}{dn}\, dS = 4\pi, \qquad \int\int_\Sigma \frac{dG_1}{dn_1}\, d\Sigma = 4\pi.$$

Faisons tendre vers zéro la densité des masses distribuées sur C. Considérons les portions de Σ qui avoisinent infiniment S, au premier ordre et à ε près. Leur aire totale est infiniment voisine de l'aire totale de S. Donc la contribution apportée à la seconde des intégrales ci-dessus par ces portions est infiniment voisine de 4π. Par suite celle qu'apportent les parties restantes de Σ (c'est-à-dire les parois du tube qui épouse la forme de C) est infiniment petite.

6. De là, on tire tout naturellement une conséquence impor-

tante relative au mode de continuité de la solution du problème de Dirichlet. Le voisinage exigé des deux surfaces portant les données n'a pas besoin d'être uniforme pour entraîner celui des valeurs des solutions en un point intérieur. On pourra supposer que l'une des surfaces s'écarte de l'autre en formant des tubes infiniment étroits épousant certaines courbes C. On s'astreindra à un voisinage du premier ordre entre les deux surfaces aux points situés à distance finie des points de pénétration de C, et en deux points infiniment voisins de ces surfaces, on imposera aux données des valeurs infiniment voisines (¹).

En particulier, supposons que C soit un arc strictement intérieur au domaine Ω. Considérons le domaine Ω_1, obtenu en enlevant de Ω l'intérieur d'un canal de section infiniment petite, épousant C, chaque point de la surface de ce canal étant infiniment voisin d'un point de C. Considérons une certaine distribution de valeur sur la surface S qui délimite le domaine Ω. Considérons le problème de Dirichlet pour ce domaine et cette distribution; d'autre part, posons aussi le problème de Dirichlet pour le domaine Ω_1, avec la même distribution sur S, et avec une distribution sur la surface extérieure du canal, simplement soumise à cette condition : ses valeurs restent comprises entre deux nombres fixes. D'après ce qui précède, nous aurons deux problèmes de Dirichlet à solutions infiniment voisines.

De cette remarque, résulte immédiatement le théorème suivant, établi directement par M. Lebesgue :

Si une fonction bornée est harmonique dans Ω, *sauf peut-être sur* C, *elle est harmonique, même sur cette courbe.*

En effet, d'après ce qui précède, cette fonction est aussi voisine qu'on veut, dans Ω, de la fonction harmonique dans tout ce domaine, qui prend sur sa frontière les mêmes valeurs que la fonction proposée. Ces deux fonctions sont donc rigoureusement égales.

Cette démonstration est moins simple que celle de M. Lebesgue. Il y a cependant quelque intérêt à la signaler pour montrer com-

(¹) En réalité on peut réduire l'ordre du voisinage à zéro. L'expression classique de la solution du problème de Dirichlet est factice à certains égards et masque ce fait. J'aurai l'occasion d'y revenir.

ment des recherches relatives à la continuité de certaines fonctionnelles peuvent conduire à des propositions d'analyse ordinaire.

7. Les raisonnements précédents cessent d'être valables si l'on substitue à la courbe C une portion de surface qui pénètre à l'intérieur du domaine Ω. et si comme précédemment on forme un nouveau domaine Ω' en enlevant du premier la région balayée par des sphères infiniment petites centrées sur la portion de surface proposée.

L'énoncé même auquel on serait conduit, si l'on tentait une généralisation dans cette voie, ne s'appliquerait plus sous la forme qui lui a été primitivement donnée. Il y a un écart sensible entre les fonctions de Green des deux domaines Ω et Ω', évaluées pour un couple déterminé de points.

Soient plus généralement deux domaines Ω et Ω_1, astreints aux hypothèses suivantes : leurs frontières sont infiniment voisines du premier ordre, sauf que celle du domaine Ω_1 vient former une gaine infiniment resserrée autour d'une portion finie de surface σ, qui pénètre à l'intérieur de Ω. Le voisinage des frontières cesse seulement à proximité arbitrairement petite de la surface σ. Posons le problème de Dirichlet pour Ω et pour Ω_1, avec des données infiniment voisines aux points infiniment voisins des deux frontières. Si l'on se borne à soumettre les données sur la gaine à la condition (précédemment mise en jeu) de rester comprises entre deux limites fixes, il n'est plus permis de dire que les deux fonctions harmoniques obtenues dans les deux problèmes envisagés sont infiniment voisines. C'est ce que montre l'exemple suivant.

Donnons-nous arbitrairement une aire σ, et envisageons le potentiel de simple couche

$$V_P = \int\int_\sigma \frac{dS_M}{MP}.$$

Cette fonction est harmonique en tout point P non situé sur la surface σ. Traçons une sphère sécante à σ. Si l'on résout le problème de Dirichlet en prenant comme domaine la sphère et comme distribution de valeurs, l'ensemble de celles qui sont prises par V_P sur cette sphère, on obtient une fonction différente de V_P. C'est là une simple conséquence du théorème classique sur la discontinuité de la composante normale du gradient d'un potentiel de simple

couche. La sphère jouant ici le rôle de domaine Ω, si nous construisons un domaine Ω_1 répondant aux conditions précédentes, en ayant soin d'en supprimer, par une sorte de gaine, les abords de σ, et si nous prenons pour distribution de données sur la frontière de Ω_1 les valeurs prises par V_p, nous aurons bien un exemple de la circonstance signalée plus haut.

En outre, la théorie du potentiel de simple couche montre immédiatement l'impossibilité de généraliser la proposition de M. Lebesgue, en y remplaçant la courbe C par la portion de surface σ.

8. Si, au lieu de raisonner dans l'espace ordinaire, on envisageait un espace à un nombre quelconque de dimensions, il serait facile de généraliser les résultats précédents. On pourra alors substituer à la courbe C une multiplicité d'ordre p, pourvu que des masses positives, réparties continûment sur cette multiplicité, engendrent un potentiel devenant infini au voisinage de cette multiplicité. Il en sera bien ainsi pour les valeurs de l'entier p au plus égales à $n - 2$. Mais si l'on prend $p = n - 1$, on s'aperçoit comme précédemment que ces résultats ne subsistent pas.

9. En résumé, il est donc établi que des considérations d'ordre analytique peuvent entraîner, malgré leur caractère de profonde objectivité, la délimitation artificielle du champ de définition d'une fonctionnelle. Cette conclusion paraît du moins fort séduisante, lorsqu'on admet d'emblée l'opportunité de respecter les définitions traditionnelles de la théorie des fonctions harmoniques. Mais on peut encore conclure dans un autre sens, et se demander s'il n'y aurait pas intérêt à modifier les définitions et les énoncés des problèmes de cette théorie, de manière à faire disparaître des paradoxes de la nature de celui que nous avons rencontré. Il n'est pas douteux qu'on puisse (plus ou moins commodément) prolonger le problème de Dirichlet comme MM. Lebesgue et Denjoy ont prolongé l'intégrale [1]. Sans préjuger l'intérêt de cette généralisation, on peut remarquer cependant qu'elle apparaît, au point de vue physique, comme une nécessité. Le problème

---

[1] Ce prolongement a été fait à un tout autre point de vue, dans le but d'assurer la permanence du caractère de réciprocité de l'intégration et de la dérivation.

de l'équilibre thermique d'un domaine homogène a nécessairement une solution, même si la surface qui limite ce domaine présente des plages pour lesquelles le plan tangent n'existe en aucun point. Donnons-nous une distribution continue de valeurs, sur une telle frontière. Il sera en général impossible de trouver une fonction harmonique dans le domaine ainsi délimité, et tendant vers la valeur donnée en un point de la frontière, lorsque le point d'évaluation s'en approche indéfiniment, par un chemin quelconque intérieur au domaine. Pour généraliser le problème de Dirichlet, il faudrait apprendre à distinguer, sur la frontière, un certain ensemble de points exceptionnels, où la condition aux limites pourrait ne pas être vérifiée. Si cette recherche semble offrir, *a priori*, un intérêt relatif, tout au moins serait-elle nécessaire pour donner aux études sur la dépendance entre une fonction harmonique et les données de Dirichlet dont elle provient, une forme plus synthétique et plus facilement maniable [1].

SUR LA MÉTHODE D'INTÉGRATION DE RITZ;

PAR M. MICHEL PLANCHEREL (Zurich)

(*suite*).

5° λ_1 est toujours une valeur fondamentale simple, c'est-à-dire de multiplicité 1.

6° La série $\sum_1^\infty \frac{1}{\lambda_p^2}$ converge. (Si zéro est une valeur fondamentale, les termes correspondants de la série sont à négliger.)

---

(1) *Voir* à ce sujet le renvoi n° 1 du paragraphe 1. — Depuis l'élaboration de cet article, j'ai songé à écrire la solution du problème de Dirichlet sous la forme

$$\lim_{\lambda=\infty} \frac{\lambda^2}{4\pi} \int\int\int f(M) e^{-\lambda\delta_M} G(M.P)\, dV_M,$$

δ_M désignant la plus courte distance de M à la frontière du domaine, et $f(M)$ une fonction continue quelconque prenant les valeurs données à la frontière. Cette expression offre l'avantage de mettre directement en évidence le mode de continuité de la solution, masqué dans la formule classique.

7° Pour toute fonction u de $\mathcal{F}$, on a

$$(18)\quad \mathbf{S}\,u^2 = \mathbf{S}\,uu = \sum_{p=1}^{\infty} (\mathbf{S}\,u\varphi_p)^2, \qquad \int_D t(u)\,d\sigma + \int_C a''u^2\,ds = \sum_{p=1}^{\infty} \lambda_p (\mathbf{S}\,u\,\varphi_p)^2.$$

8° Lorsque $\lambda < \lambda_1$, le minimum de $\mathfrak{z}(u)$ dans le champ $\mathcal{F}$ est donné par la fonction u qui résout le problème A ou A′. Ceci n'a plus lieu pour $\lambda > \lambda_1$.

9° Si λ_p est une valeur fondamentale de multiplicité r et si l'on a les relations (17), l'intégrale

$$\int_D t(u)\,d\sigma + \int_C a''\,u^2\,ds$$

est minimum pour $u = \varphi_{p+\rho}$ lorsque u varie dans le champ des fonctions de $\mathcal{F}$ qui satisfont aux $p+r-1$ conditions

$$(19)\quad \mathbf{S}\,u^2 = 1, \quad \mathbf{S}\,u\varphi_q = 0 \qquad (q < p+r,\ q \neq p+\rho;\ \rho = 0, 1, 2, \ldots, r-1).$$

Ce minimum est égal à $\lambda_{p+\rho} = \lambda_p$.

10° La solution u du problème A ou A′ est une fonction méromorphe du paramètre λ. Elle est donnée par le développement convergent

$$(20)\qquad u = \sum_{p=1}^{\infty} \frac{f_p^{\star}\varphi_p}{\lambda - \lambda_p}, \qquad f_p^{\star} = \mathbf{S}\,f\varphi_p;$$

f désignant la fonction — en général discontinue — égale à f' dans D et à f'' sur C.

5. Remarque. — Si le champ $\mathcal{F}$ était restreint au champ $\mathcal{F}_0$ des fonctions de $\mathcal{F}$ qui s'annulent sur C, les conditions (8) et (12) seraient remplacées par la condition $u = 0$. Les intégrales étendues au contour disparaîtraient dans toutes les formules. Les fonctions φ_p s'annuleraient sur C. Comme tous nos raisonnements ultérieurs se transposent sans difficulté aux problèmes relatifs au champ $\mathcal{F}_0$, nous les laisserons de côté.

Tout ce que nous venons de rappeler est, en gros, une conséquence connue de la théorie des équations aux dérivées partielles [1].

---

[1] On formule et l'on démontre d'habitude les théorèmes rappelés dans le paragraphe 4 dans le cas de l'équation plus simple

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(p\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(p\frac{\partial u}{\partial y}\right) + qu + \lambda hu = f$$

6. Les résultats de la méthode de Ritz. — 1° Soit

$$\psi_p(x, y) \qquad (p = 1, 2, 3, \ldots)$$

un système de fonctions du champ $\mathcal{F}$ permettant d'approcher en *moyenne* toute fonction de ce champ. Pour la brièveté de l'expression, nous donnons à cette notion un *sens un peu différent* de celui qu'elle a habituellement. Nous supposons qu'étant donné un nombre positif ε arbitrairement petit, il est possible de déterminer pour toute fonction u du champ une approximation

$$u_n = x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + \ldots + x_n\psi_n \tag{21}$$

telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\int_D (u-u_n)^2 d\sigma < \varepsilon, \quad \int_D \left[\frac{\partial(u-u_n)}{\partial x}\right]^2 d\sigma < \varepsilon, \quad \int_D \left[\frac{\partial(u-u_n)}{\partial y}\right]^2 d\sigma < \varepsilon, \\ \displaystyle\left|\int_C a''(u-u_n)^2 ds\right| < \varepsilon, \quad \int_C g''(u-u_n)^2 ds < \varepsilon. \end{array} \right. \tag{22}$$

Il y aura, pour la suite, intérêt à supposer que le système ψ_p est orthogonalisé et normé conformément aux formules

$$\mathbf{S}\psi_p\psi_q = \delta_{pq} \qquad (p, q = 1, 2, 3, \ldots). \tag{23}$$

Cette supposition ne restreint en rien la généralité. Dans la pratique des calculs numériques elle est superflue, mais elle rend des services dans l'étude théorique et permet la formulation plus précise de certains théorèmes. C'est pourquoi nous la supposerons réalisée (1).

---

et de la condition aux limites $p\dfrac{\partial u}{\partial n} + \lambda hu = 0$. En plus du Livre de Pockels, du Tome III du *Traité d'Analyse* de M. Picard et du Tome III du *Cours d'Analyse* de M. Goursat, on pourra consulter les Mémoires de M. Picard : *Sur quelques applications de l'équation fonctionnelle de M. Fredholm* (*Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, t. 22, 1906, p. 241-259, et *Sur la solution du problème généralisé de Dirichlet relatif à une équation linéaire du type elliptique au moyen de l'équation de M. Fredholm* (*Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. 23, 1906, p. 509-516) et aussi le travail de L. Lichtenstein : *Zur Analysis der unendlich vielen Variablen*. Zweite Abhandlung : *Reihenentwicklungen nach Eigenfunktionen linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus* (*Mathematische Zeitschrift*, t. 3, 1919, p. 127-160).

(1) Il résulte des propriétés d'approximation imposées aux fonctions ψ_p que le système orthogonal qu'elles forment *est fermé* dans le champ $\mathcal{F}$, c'est-

2° Formons les quantités

$$(24)\qquad k_{pq} = k_{qp} = \int_D t(\psi_p, \psi_q)\, d\sigma + \int_C a'' \psi_p \psi_q \, ds,$$

$$(25)\qquad f_p = \mathbf{S} f \psi_p = \int_D g' f' \psi_p \, d\sigma + \int_C g'' f'' \psi_p \, ds,$$

et considérons les deux systèmes d'équations algébriques linéaires

$$(26)\qquad \sum_{q=1}^{n} k_{pq} x_q - \lambda x_p = -f_p$$

$$(p = 1, 2, \ldots, n).$$

$$(27)\qquad \sum_{q=1}^{n} k_{pq} x_q - \lambda x_p = 0$$

Soient

$$(28)\qquad \lambda_1^{(n)} \leqq \lambda_2^{(n)} \leqq \ldots \leqq \lambda_n^{(n)}$$

à-dire, qu'il n'existe pas dans ce champ de fonction u telle que $\mathbf{S}\, u^2 > 0$ et que $\mathbf{S}\, u \psi_p = 0$ ($p = 1, 2, 3, \ldots$). Si f, F sont deux fonctions quelconques de $\mathcal{F}$ et si l'on note $f_p = \mathbf{S}\, f \psi_p$, $F_p = \mathbf{S} F \psi_p$, on a les formules de Parseval :

$$(a)\qquad \sum_1^{\infty} f_p^2 = \mathbf{S} f^2, \quad \sum_1^{\infty} f_p F_p = \mathbf{S} f F.$$

Plus généralement, si l'on se donne deux suites arbitraires de nombres f_p, F_p, telles que $\sum_1^{\infty} f_p^2$ et $\sum_1^{\infty} F_p^2$ convergent, et si l'on forme les suites correspondantes de fonctions

$$f^{(n)} = \sum_1^{n} f_p \psi_p, \qquad F^{(n)} = \sum_1^{n} F_p \psi_p,$$

on peut démontrer (théorème de Riesz-Fischer-Weyl) qu'il existe deux fonctions f, F non nécessairement du champ $\mathcal{F}$ — telles que

$$\mathbf{S} f \psi_p = f_p, \qquad \mathbf{S}\, F \psi_p = F_p, \qquad \lim_{n=\infty} \mathbf{S}(f - f^{(n)})^2 = \lim_{n=\infty} \mathbf{S}(F - F^{(n)})^2 = 0,$$

f et F sont univoquement déterminées dans D à un ensemble de points près de mesure superficielle nulle et sur C à un ensemble de points près de mesure linéaire nulle. Nous représenterons symboliquement ces fonctions par

$$(b)\qquad f \sim \sum f_p \psi_p, \qquad F \sim \sum F_p \psi_p.$$

Les formules (a) de Parseval sont encore vraies pour elles.

les zéros en λ du déterminant d'ordre n

(29) $$|k_{pq} - \lambda\,\delta_{pq}|_n \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n),$$

chaque zéro étant répété dans (28) autant de fois que l'indique sa multiplicité.

3° Le premier théorème concerne la résolution des problèmes non homogènes A et A'.

Théorème I. — *Si λ n'est pas une valeur fondamentale, pour n suffisamment grand, le système (26) a toujours une et une seule solution $x_1 = x_1^{(n)}$, $x_2 = x_2^{(n)}$, ..., $x_n = x_n^{(n)}$. La fonction*

$$u^{(n)} = x_1^{(n)}\psi_1 + x_2^{(n)}\psi_2 + \ldots + x_n^{(n)}\psi_n$$

converge en moyenne vers la solution u des problèmes A et A'.

Conformément à ce que nous avons défini plus haut comme approche en moyenne, nous entendrons au cours des Chapitres I, II et IV, par *convergence en moyenne* de $u^{(n)}$ vers u, l'existence des relations

(30) $$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{n=\infty}\displaystyle\int_D (u - u^{(n)})^2\, d\sigma = 0, \qquad \lim\limits_{n=\infty}\displaystyle\int_D \left[\frac{\partial(u - u^{(n)})}{\partial x}\right]^2 d\sigma = 0, \\ \qquad\qquad \lim\limits_{n=\infty}\displaystyle\int_D \left[\frac{\partial(u - u^{(n)})}{\partial y}\right]^2 d\sigma = 0, \\ \lim\limits_{n=\infty}\displaystyle\int_C a''(u - u^{(n)})^2\, ds = 0, \qquad \lim\limits_{n=\infty}\displaystyle\int_C g''(u - u^{(n)})^2\, ds = 0. \end{array}\right.$$

Le second théorème concerne le calcul des valeurs fondamentales. On y suppose les λ_p et $\lambda_p^{(n)}$ ordonnés selon les inégalités (9) et (28).

Théorème II. — *Chaque zéro $\lambda_p^{(n)}$ de (29) converge vers la valeur fondamentale de même indice*

(31) $$\lim_{n=\infty} \lambda_p^{(n)} = \lambda_p.$$

4° Soit λ_p une valeur fondamentale de multiplicité r [*voir* (17)] et soit φ_s $(s = p, p+1, \ldots, p+r-1)$ un système de r fonctions fondamentales y relatif. Soit

(32) $$x_q = l_{sq}^{(n)} \qquad (q = 1, 2, \ldots, n;\ s = p, p+1, \ldots, p+r-1)$$

un système de solutions linéairement indépendantes du système

homogène (27) pour les valeurs

$$\lambda = \lambda_s^{(n)} \qquad (s = p, p+1, \ldots, p+r-1).$$

On peut toujours normer et orthogonaliser les solutions (32) de manière que

$$(33) \qquad \sum_{q=1}^{n} l_{sq}^{(n)} l_{tq}^{(n)} = \delta_{st} \qquad (s, t = p, p+1, \ldots, p+r-1).$$

Le système (32) est alors univoquement déterminé si n est suffisamment grand et si les nombres $\lambda_p^{(n)}, \lambda_{p+1}^{(n)}, \ldots, \lambda_{p+r-1}^{(n)}$ sont tous différents (car pour n suffisamment grand, d'après le théorème II, $\lambda_{p-1}^{(n)} < \lambda_p^{(n)}$ et $\lambda_{p+r-1}^{(n)} < \lambda_{p+r}^{(n)}$). Si, par contre, plusieurs de ces nombres sont égaux, il n'est pas univoquement déterminé. Construisons les fonctions

$$(34) \quad \varphi_s^{(n)} = l_{s1}^{(n)} \psi_1 + l_{s2}^{(n)} \psi_2 + \ldots + l_{sn}^{(n)} \psi_n \qquad (s = p, p+1, \ldots, p+r-1)$$

Ces fonctions sont orthogonales entre elles et normées. Alors que les $\varphi_s^{(n)}$ peuvent ne pas être univoquement déterminées, la fonction

$$\varphi_p^{(n)}(x, y; x', y') = \sum_{s=p}^{p+r-1} \varphi_s^{(n)}(x, y)\, \varphi_s^{(n)}(x', y')$$

est univoquement déterminée dès que n est suffisamment grand. Nous démontrerons à son sujet que

$$(35) \quad \lim_{n=\infty} \int_D \int_D [\varphi_p(x, y; x', y') - \varphi_p^{(n)}(x, y; x', y')]^2\, d\sigma\, d\sigma' = 0.$$

5° Pour pouvoir énoncer sous sa forme la plus précise le troisième théorème qui concerne le calcul des fonctions fondamentales, nous introduirons la notion de suite *régularisée* par rapport à une suite ψ_q. Nous dirons d'une suite de fonctions $g_1, g_2, \ldots, g_r$ qu'elle est régularisée par rapport à la suite ψ_q $(q = 1, 2, 3, \ldots)$ lorsque

$$(36) \quad \begin{cases} \mathbf{S} g_\nu \psi_q = 0 & \text{pour} \quad q = 1, 2, \ldots, m_\nu - 1 \\ \mathbf{S} g_\nu \psi_q > 0 & \text{pour} \quad q = m_\nu \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, r),$$

les entiers m_ν formant une suite croissante

$$0 < m_1 < m_2 < \ldots < m_r.$$

Si λ_p est une valeur fondamentale de multiplicité $r > 1$, on peut

profiter du fait que les fonctions $\varphi_s(s=p,\ p+1,\ \ldots,\ p+r-1)$ ne sont déterminées qu'à une substitution orthogonale de rang r près pour supposer leur suite régularisée par rapport à la suite $\psi_q(q=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$. La suite $\varphi_p,\ \varphi_{p+1},\ \ldots,\ \varphi_{p+r-1}$ est alors *univoquement* déterminée par la double condition d'être régularisée et de vérifier les relations (13). Faisant maintenant $g_\nu=\varphi_{p+\nu-1}$ dans (36), considérons non plus la suite $\psi_q(q=1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$, mais une suite quelconque ψ'_q formée des mêmes fonctions (dans un ordre différent) et telle que

$$\psi'_1=\psi_{m_1},\qquad \psi'_2=\psi_{m_2},\qquad \ldots.\qquad \psi'_r=\psi_{m_r}.$$

La suite $\varphi_s(s=p,\ p+1,\ \ldots,\ p+r-1)$ est encore régularisée par rapport à la suite ψ'_q (les nombres m_ν correspondants sont ici $m_\nu=\nu$). Si la suite $\varphi_s^{(n)}$ correspondante n'est pas déjà régularisée par rapport à la suite ψ'_q, on pourra former, par combinaison linéaire des r fonctions $\varphi_s^{(n)}$, une suite univoquement déterminée de r fonctions $\varphi_s'^{(n)}$ normées et orthogonales entre elles qui, elle, sera régularisée par rapport à la suite ψ'_q. On a alors le

Théorème III. — *Soient λ_p une valeur fondamentale de multiplicité $r\,(\lambda_{p-1}<\lambda_p=\lambda_{p+1}=\ldots=\lambda_{p+r-1}<\lambda_{p+r})$ et*

$$\varphi_s\ (s=p,\ p+1,\ \ldots,\ p+r-1)$$

la suite corrélative de fonctions fondamentales supposée régularisée par rapport à la suite ψ_q. Si $\varphi_s^{(n)}$ est la suite (34) relative aux valeurs $\lambda_s^{(n)}$ et si $\varphi_s'^{(n)}$ est la suite équivalente régularisée par rapport à la suite ψ'_q, chaque fonction $\varphi_s'^{(n)}$ converge en moyenne vers la fonction correspondante φ_s [1].

---

[1] Dans ma Note des *Comptes rendus*, en voulant l'énoncer sous une forme trop concise, j'ai énoncé ce théorème sous une forme inexacte, entachée de plus de fautes typographiques. Il faut, en effet, remarquer que si l'on exprime les $\varphi_s'^{(n)}$ à l'aide des ψ_p

$$\varphi_s'^{(n)}=\sum_{q=1}^{n}x_{sq}'^{(n)}\psi_q,$$

les coefficients $x_{sq}'^{(n)}$ ne sont pas en général des solutions des équations (27) pour $\lambda=\lambda_{sq}^{n}$, mais des combinaisons linéaires des solutions relatives à $\lambda_p^{(n)}$, $\lambda_{p+1}^{(n)},\ \ldots,\ \lambda_{p+r-}^{(n)}$.

On remarquera que l'intérêt de ce théorème pour le calcul pratique est nul. Il suppose en effet que l'on connaît non seulement la multiplicité de λ_p, mais que l'on connaît les fonctions φ_s. Car c'est seulement dans ce cas que

COROLLAIRE I. — *Si λ_p est une valeur fondamentale simple, $\varphi_p^{(n)}$ converge en moyenne vers φ_p.*

COROLLAIRE II. — *$\varphi_1^{(n)}$ converge en moyenne vers φ_1.*

CHAPITRE II.

LE PARAMÈTRE λ EST INFÉRIEUR A LA PLUS PETITE VALEUR FONDAMENTALE λ_1.

7. LA VARIATION PREMIÈRE DE $\mathfrak{J}(u)$. — u et ξ désignant deux fonctions quelconques du champ $\mathcal{F}$ et ε un paramètre, considérons des variations δu du type simple

$$\delta u = \varepsilon\xi.$$

On vérifie aisément que

$$\mathfrak{J}(u+\varepsilon\xi)$$
$$= \mathfrak{J}(u) + 2\varepsilon\left[\int_D t(u,\xi)\,d\sigma + \int_C a''u\xi\,ds - \lambda\,\mathbf{S}\,u\xi + \mathbf{S}f\xi\right] + \varepsilon^2[\mathfrak{J}(\xi) - 2\,\mathbf{S}f\xi].$$

Par définition, dans le cas des variations δu considérées,

$$\delta\mathfrak{J}(u) = \varepsilon.\lim_{\varepsilon=0} \frac{\mathfrak{J}(u+\varepsilon\xi) - \mathfrak{J}(u)}{\varepsilon}$$

et la condition $\delta\mathfrak{J}(u) = 0$ signifie que $\delta\mathfrak{J}(u)$ doit être nul quelle que soit la fonction arbitraire ξ. Par conséquent, ici, $\delta\mathfrak{J}(u) = 0$ est équivalent à la condition que, pour toute fonction ξ du champ $\mathcal{F}$,

$$(37) \qquad \int_D t(u,\xi)\,d\sigma + \int_C a''u\xi\,ds - \lambda\,\mathbf{S}\,u\xi + \mathbf{S}f\xi = 0.$$

Si donc u est une solution du problème A ou A′, la formule (37) lui est applicable. Si nous prenons en particulier $\xi = u$, elle montre que, lorsque u est solution des problèmes A, A′,

$$(38) \qquad \int_D t(u)\,d\sigma + \int_C a''u^2\,ds - \lambda\,\mathbf{S}\,u^2 + \mathbf{S}fu = 0,$$

---

l'on peut déterminer la suite des indices m_1, m_2, ..., m_r, nécessaire pour ordonner la suite ψ'_q. Le caractère un peu artificiel de ce théorème pouvait être prévu. En réalité, en effet, les fonctions fondamentales relatives à une valeur λ_p multiple, ont elles-mêmes un caractère artificiel. Ce qui est univoquement déterminé, c'est uniquement $\varphi_p\,(x, y; x', y')$. Au point de vue des calculs pratiques, on peut donc dire que c'est la formule (35) qui donne ce qui est essentiel dans le théorème III.

et que, par suite,

(39) $$\mathfrak{J}(u) = \mathbf{S}fu.$$

Remarquons encore, en prenant $\varepsilon = 1$, que, si u est solution du problème A,

(40) $$\mathfrak{J}(u+\xi) = \mathfrak{J}(u) + \mathfrak{J}(\xi) - 2\mathbf{S}f\xi.$$

Les relations (37) à (40) subsistent lorsque $f = 0$, c'est-à-dire $f' = 0$, $f'' = 0$, et qu'on y prend pour λ une valeur fondamentale et pour u une fonction fondamentale correspondante. Cela tient au fait que les problèmes A et A′ sont encore équivalents lorsque $f' = 0$, $f'' = 0$.

8. Les solutions du problème approché. — Soit $\psi_p(x, y)$ un système de fonctions vérifiant les conditions indiquées au paragraphe 6, 1°, et en particulier les formules (23). Considérons le champ $\mathfrak{F}^{(n)}$ des fonctions de la forme

(41) $$u_n = x_1\psi_1 + x_2\psi_2 + \ldots + x_n\psi_n.$$

Le problème approché que considère Ritz est celui de la détermination de la fonction u_n telle que $\delta\mathfrak{J}(u_n) = 0$ dans le champ $\mathfrak{F}^{(n)}$. En vertu des relations (6), (23), (24), (25),

(42) $$\mathfrak{J}(u_n) = \sum_{p,q}^{1\ldots n} k_{pq}\, x_p\, x_q - \lambda \sum_{p=1}^{n} x_p^2 + 2\sum_{p=1}^{n} f_p\, x_p.$$

$\mathfrak{J}(u_n)$ est donc une fonction quadratique de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La condition $\delta\mathfrak{J}(u_n) = 0$ exprime ici que pour toute fonction ξ_n de $\mathfrak{F}^{(n)}$, la limite de

$$\frac{1}{\varepsilon}[\mathfrak{J}(u_n + \varepsilon\xi_n) - \mathfrak{J}(u_n)]$$

pour $\varepsilon = 0$ doit être nulle; elle se traduit par les n équations

$$\frac{\partial\mathfrak{J}(u_n)}{\partial x_1} = \frac{\partial\mathfrak{J}(u_n)}{\partial x_2} = \ldots = \frac{\partial\mathfrak{J}(u_n)}{\partial x_n} = 0,$$

c'est-à-dire par le système des équations algébriques linéaires (26). Si le déterminant (29) est différent de zéro, ces équations ont une solution unique

(43) $$x_1 = x_1^{(n)}, \qquad x_2 = x_2^{(n)}, \qquad \ldots, \qquad x_n = x_n^{(n)},$$

et le problème approché une solution unique

(44) $$u^{(n)} = x_1^{(n)}\psi_1 + x_2^{(n)}\psi_2 + \ldots + x_n^{(n)}\psi_n.$$

Nous appellerons $u^{(n)}$ la fonction *optimum* du champ $\mathfrak{F}^{(n)}$. De (26) et (43) résulte que

$$\sum_{p,q}^{1\ldots n} k_{pq}\, x_p^{(n)}\, x_q^{(n)} - \lambda \sum_{p=1}^{n} x_p^{(n)2} = -\sum_{p=1}^{n} f_p\, x_p^{(n)},$$

d'où

(45) $$\mathfrak{Z}(u^{(n)}) = \sum_{p=1}^{n} f_p\, x_p^{(n)},$$

ou encore, d'après (25) et (44),

(46) $$\mathfrak{Z}(u^{(n)}) = \mathbf{S} f u^{(n)}.$$

9. Jusqu'ici, nous avons fait sur λ l'hypothèse que le déterminant (29) n'est pas nul. Supposons dorénavant que $\lambda < \lambda_1$. Les propriétés de minimum des fonctions fondamentales rappelées au paragraphe 4, 9°, montrent que le quotient

$$\int_D t(u)\, d\sigma + \int_C a'' u^2\, ds : \mathbf{S} u^2$$

a une valeur supérieure à λ_1 pour toute fonction du champ $\mathfrak{F}$ qui n'est pas proportionnelle à φ_1. Par suite,

$$\int_D t(u_n)\, d\sigma + \int_C a'' u_n^2\, ds - \lambda \mathbf{S} u_n^2 = \sum_{p,q}^{1\ldots n} k_{pq}\, x_p\, x_q - \lambda \sum_1^n x_p^2$$

a une valeur positive pour toute fonction $u_n \not\equiv 0$ de $\mathfrak{F}^{(n)}$, lorsque $\lambda < \lambda_1$. Le second membre est donc une forme définie positive de $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Son discriminant (29) est donc différent de zéro pour $\lambda < \lambda_1$. Les équations (26) ont alors une solution unique. De plus, on se rend compte aisément que le minimum de $\mathfrak{Z}(u_n)$ est atteint pour $u_n = u^{(n)}$. Si donc $m > n$ et si $u^{(m)}$ est la fonction optimum du champ $\mathfrak{F}^{(m)}$, il est clair, puisque $\mathfrak{F}^{(m)}$ contient $\mathfrak{F}^{(n)}$, que $\mathfrak{Z}(u^{(m)}) \leqq \mathfrak{Z}(u^{(n)})$. Les nombres $\mathfrak{Z}(u^{(n)})$ forment donc une suite décroissante. Cette suite est bornée inférieurement, car si u est la solution du problème A, d'après le paragraphe 4, 8°, $\mathfrak{Z}(u^{(n)}) \geqq \mathfrak{Z}(u)$. On a

(47) $$\lim_{n=\infty} \mathfrak{Z}(u^{(n)}) = \mathfrak{Z}(u).$$

Car, par hypothèse, on peut approcher la solution u par une suite de fonctions

$$v_n = \sum_{p=1}^{n} a_p^{(n)} \psi_p$$

qui converge en moyenne vers u. Il viendra, en prenant $\xi = v_n - u$ dans la formule (40),

$$(48) \qquad \mathfrak{J}(v_n) = \mathfrak{J}(u) + \mathfrak{J}(v_n - u) - 2\,\mathbf{S}f(v_n - u).$$

La convergence en moyenne de v_n vers u a pour conséquence que les deux derniers termes du second membre tendent vers zéro avec $\frac{1}{n}$. Donc,

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{J}(v_n) = \mathfrak{J}(u).$$

Or, puisque $u^{(n)}$ est optimum,

$$\mathfrak{J}(v_n) \geq \mathfrak{J}(u^{(n)}).$$

Mais $\mathfrak{J}(u^{(n)}) \geqq \mathfrak{J}(u)$; de là la relation (47).

Prenons $\xi = u^{(n)} - u$ dans (40) et tenons compte de (47) :

$$\int_D t(u^{(n)} - u)\, d\sigma + \int_C a''(u^{(n)} - u)^2\, ds - \lambda\,\mathbf{S}(u^{(n)} - u)^2$$

converge vers zéro avec $\frac{1}{n}$. En écrivant cette expression sous la forme

$$\int_D t(u^{(n)} - u)\, d\sigma + \int_C a''(u^{(n)} - u)^2\, ds - \lambda_1\mathbf{S}(u^{(n)} - u)^2$$
$$+ (\lambda_1 - \lambda)\,\mathbf{S}(u^{(n)} - u)^2,$$

la propriété de minimum de λ_1 (§ 4, 9°) et le fait que $\lambda < \lambda_1$ montrent que chacune des deux lignes précédentes est $\geqq 0$ et que, en conséquence, chacune doit séparément tendre vers zéro. De $\lim_{n=\infty} \mathbf{S}(u^{(n)} - u)^2 = 0$ découle d'abord que

$$\lim_{n=\infty} \int_D (u^{(n)} - u)^2\, d\sigma = 0, \qquad \lim_{n=\infty} \int_C g''(u^{(n)} - u)^2\, ds = 0.$$

La première ligne montre ensuite que

$$\lim_{n=\infty} \left[\int_D t(u^{(n)} - u)\, d\sigma + \int_C a''(u^{(n)} - u)^2\, ds \right] = 0,$$

et par conséquent; puisque $\lim_{n=\infty}\int_D a_{33}(u^{(n)}-u)^2\,d\sigma = 0$, que [1]

$$\lim_{n=\infty}\int_D [t(u^{(n)}-u)-a_{33}(u^{(n)}-u)^2]\,d\sigma = 0,$$

$$\lim_{n=\infty}\int_C a''(u^{(n)}-u)^2\,ds = 0.$$

Le caractère défini de $a_{11}\xi_1^2+2a_{12}\xi_1\xi_2+a_{22}\xi_2^2$ appliqué à l'avant-

---

[1] C'est immédiat lorsque $a''\geqq 0$. Dans le cas général, il suffit de montrer que $\int_C a''(u^{(n)}-u)^2\,ds$ tend vers zéro pour conclure que $\int_D t(u^{(n)}-u)^2 d\sigma$ tend aussi vers zéro. Posons pour abréger $v_n = u^{(n)}-u$. On peut démontrer qu'il existe une constante positive m telle que

$$(a)\quad \left|\int_C a'' v_n^2\,ds\right|^2 < m^2\int_D v_n^2\,d\sigma\left\{\int_D v_n^2\,d\sigma + \int_D\left[\left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_n}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma\right\}$$

Le premier facteur intégral du second membre tendant vers zéro, tout revient à montrer que l'accolade reste bornée lorsque $n\to\infty$. Dans le cas contraire, il existerait une suite d'indices n_p tels que

$$\lim_{p=\infty}\int_D\left[\left(\frac{\partial v_{n_p}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_{n_p}}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma = \infty.$$

Mais comme il existe une constante $c>0$ telle que la forme

$$a_{11}\xi_1^2+2a_{12}\xi_1\xi_2+a_{22}\xi_2^2-c(\xi_1^2+\xi_2^2)$$

est encore définie positive, on voit que

$$\int_D [t(v_n)-a_{33}v_n^2]\,d\sigma > c\int_D\left[\left(\frac{\partial v_n}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_n}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma$$

et que, par conséquent

$$\lim_{p=\infty}\int_D t(v_{n_p})\,d\sigma = \infty.$$

Par suite,

$$\int_D t(v_{n_p})\,d\sigma + \int_C a'' v_{n_p}^2\,ds$$
$$> c\int_D\left[\left(\frac{\partial v_{n_p}}{\partial x}\right)^2-\left(\frac{\partial v_{n_p}}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma$$
$$-m\left\{\int_D v_{n_p}^2\,d\sigma\int_D\left[\left(\frac{\partial v_{n_p}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial v_{n_p}}{\partial y}\right)^2\right]d\sigma\right\}^{\frac{1}{2}}+\int_D a_{33}v_{n_p}^2\,d\sigma\to\infty,$$

ce qui conduit à une contradiction. Pour une démonstration de l'inégalité (a) voir R. Courant, *Ueber die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik* (*Mathematische Zeitschrift*, t. 7, 1920, p. 17).

dernière relation montre que [1]

$$\lim_{n=\infty}\int_D \left[\frac{\partial(u^{(n)}-u)}{\partial x}\right]^2 d\sigma = 0, \qquad \lim_{n=\infty}\int_D \left[\frac{\partial(u^{(n)}-u)}{\partial y}\right]^2 d\sigma = 0.$$

Par conséquent, $u^{(n)}$ converge en moyenne vers la solution u des problèmes A et A'. Le premier théorème est donc établi lorsque $\lambda < \lambda_1$.

10. De quelques conséquences de la convergence en moyenne. — La convergence en moyenne de $u^{(n)}$ vers u ne nous permet pas

---

[1] La forme définie positive $a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2$ peut être mise sous la forme d'une somme de deux carrés linéairement indépendants

$$\eta_1^2 + \eta_2^2 \ (\eta_i = \alpha_{i1}\xi_1 + \alpha_{i2}\xi_2).$$

Les α_{ik} sont des fonctions continues de (x, y) dans D + C et le déterminant $|\alpha_{ik}|$ est $\neq 0$. On peut donc exprimer les ξ_i par des formules

$$\xi_i = A_{i1}\eta_1 + A_{i2}\eta_2$$

dans lesquelles les A_{ik} sont encore des fonctions continues dans D + C. Prenons

$$\xi_1 = \frac{\partial(u^{(n)}-u)}{\partial x}, \qquad \xi_2 = \frac{\partial(u^{(n)}-u)}{\partial y}.$$

La relation

$$\int_D [t(u^{(n)}-u) - a_{33}(u^{(n)}-u)^2]\, d\sigma$$

$$= \int_D \sum_{i,k}^{1,2} a_{ik}\xi_i\xi_k\, d\sigma = \int_D (\eta_1^2 + \eta_2^2)\, d\sigma \to 0$$

entraîne donc

$$\int_D \eta_i^2\, d\sigma \to 0 \qquad (i = 1, 2).$$

On déduit de là, à l'aide des relations

$$\xi_i = \sum A_{ik}\eta_k,$$

et en s'aidant de l'inégalité de Schwarz

$$\left(\int_D \eta_i\eta_k\, d\sigma\right)^2 \leq \int_D \eta_i^2\, d\sigma \int_D \eta_k^2\, d\sigma,$$

que

$$\int_D \xi_i^2\, d\sigma \to 0.$$

de conclure que $u^{(n)}$ converge vers u au sens ordinaire du mot (¹). Nous pouvons cependant conclure des relations (30) que, *si* Γ *est une courbe à courbure continue située dans* D + C, *on a* (uniformément en Γ)

$$(49)\qquad \lim_{n=\infty} \int_\Gamma u^{(n)}\, ds = \int_\Gamma u\, ds,$$

ds désignant l'élément d'arc de la courbe Γ. Nous ne démontrerons

---

(¹) Ceci constitue une lacune de la méthode. Il est probable que cette lacune tient à la trop grande généralité des conditions imposées au système ψ_p et que pour certains systèmes ψ_p, $u^{(n)}$ converge vers u. Mais nous ne possédons aucun résultat positif sur ce point.

Nous verrons plus loin (§ 41) que dans le cas des équations aux dérivées partielles d'ordre supérieur à 2, nous pourrons démontrer que $u^{(n)}$ converge uniformément vers u. Il en est de même lorsque le problème A ne comporte qu'une seule variable indépendante x. L'équation du problème est alors une équation différentielle ordinaire qu'il faut intégrer sous des conditions aux limites relatives aux extrémités de l'intervalle (a, b); $u^{(n)}$ et u sont alors telles que

$$\lim_{n=\infty}\int_a^b (u^{(n)} - u)^2\, dx = 0, \qquad \lim_{n=\infty}\int_a^b \left(\frac{du^{(n)}}{dx} - \frac{du}{dx}\right)^2 dx = 0.$$

Par suite, si x_0, x sont des valeurs quelconques de (a, b), uniformément en x_0, x,

$$\lim \int_{x_0}^x u^{(n)}\, dx = \int_{x_0}^x u\, dx,$$

$$\lim \int_{x_0}^x \left(\frac{du^{(n)}}{dx} - \frac{du}{dx}\right) dx = \lim \left\{ u^{(n)}(x) - u^{(n)}(x_0) - [u(x) - u(x_0)] \right\} = 0.$$

S'il existe une valeur particulière x_0 pour laquelle $\lim u^{(n)}(x_0) = u(x_0)$, la dernière relation montre que, uniformément en x, $\lim u^{(n)}(x) = u(x)$. Or, si τ est un point d'accumulation de la suite $u^{(n)}(x_0)$, on pourrait, en se basant sur un théorème de Weyl relatif à la relation limite

$$\lim \int_a^b (u^{(n)} - u)^2\, dx = 0,$$

déterminer une suite partielle n' de la suite n' telle que $\lim u^{(n')}(x_0) = \tau$ et que *lim* $u^{(n')}(x) = u(x)$ presque partout dans (a, b). D'autre part,

$$\lim u^{(n')}(x) = \tau + u(x) - u(x_0).$$

Par conséquent, $\tau = u(x_0)$, d'où $\lim u^{(n)}(x_0) = u(x_0)$. On a donc

$$\lim u_n(x) = u(x),$$

uniformément dans (a, b).

cette propriété que dans le cas où Γ est un segment de droite parallèle à un des axes de coordonnées, par exemple l'axe des y. Le cas général se démontrerait d'une manière analogue en introduisant un système de coordonnées curvilignes ayant Γ comme courbe du système.

Nous partirons du lemme suivant :

Lemme. — Si $\lim_{n=\infty}\int_D (u^{(n)}-u)^2\,d\sigma = 0$ et si Ω est un domaine partiel quelconque, on a, uniformément en Ω,

$$\lim_{n=\infty}\int_\Omega u^{(n)}\,d\sigma = \int_\Omega u\,d\sigma. \tag{50}$$

La convergence est uniforme dans le sens qu'à tout $\varepsilon > 0$ on peut faire correspondre un indice N tel que

$$\left|\int_\Omega (u^{(n)}-u)\,d\sigma\right| < \varepsilon$$

pour tout domaine Ω et tout $n > N$.

Le lemme est une conséquence de l'inégalité

$$\left[\int_\Omega (u^{(n)}-u)\,d\sigma\right]^2 \leqq \int_\Omega d\sigma \int_\Omega (u^{(n)}-u)^2\,d\sigma,$$

cas particulier de l'inégalité connue de Schwarz :

$$\left(\int_\Omega \varphi\psi\,d\sigma\right)^2 \leqq \int_\Omega \varphi^2\,d\sigma \int_\Omega \psi^2\,ds.$$

Appliquons le lemme aux fonctions $\frac{\partial u^{(n)}}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et prenons pour Ω un rectangle de sommets (x_1, y_1), (x_1, y), (x, y_1), (x, y). Nous aurons, uniformément en x_1, y_1, x, y,

$$\lim_{n=\infty}\int_{x_1}^{x}\int_{y_1}^{y}\frac{\partial u^{(n)}(\xi,\eta)}{\partial\xi}\,d\xi\,d\eta = \int_{x_1}^{x}\int_{y_1}^{y}\frac{\partial u(\xi,\eta)}{\partial\xi}\,d\xi\,d\eta,$$

c'est-à-dire

$$\lim_{n=\infty}\int_{y_1}^{y}[u^{(n)}(x,\eta)-u^{(n)}(x_1,\eta)]\,d\eta = \int_{y_1}^{y}[u(x,\eta)-u(x_1,\eta)]\,d\eta.$$

Intégrons par rapport à x entre x_1 et X. A cause de la conver-

gence uniforme, nous pourrons permuter lim et $\int$, et nous aurons encore, uniformément en X, x_1, y_1, y,

$$\int_{x_1}^{X} dx \int_{y_1}^{y} u^{(n)}(x, \eta)\, d\eta - (X - x_1) \int_{y_1}^{y} u^{(n)}(x_1, \eta)\, d\eta$$

$$\to \int_{x_1}^{X} dx \int_{y_1}^{y} u\quad (x, \eta)\, d\eta - (X - x_1) \int_{y_1}^{y} u\quad (x_1, \eta)\, d\eta.$$

Mais, d'après le lemme, le premier terme du premier membre converge uniformément vers le premier terme du second membre ; donc, uniformément en x_1, y, y_1,

$$\lim_{n=\infty} \int_{y_1}^{y} u^{(n)}(x_1, \eta)\, d\eta = \int_{y_1}^{y} u(x_1, \eta)\, d\eta.$$

On remarquera que la démonstration utilise essentiellement le fait que u et $u^{(n)}$ sont des fonctions de *deux* variables. L'énoncé du théorème est à modifier dans le cas de plus de deux variables.

11. Si la fonction u est telle que, dans le champ $\mathcal{F}$, $\delta\mathfrak{J}(u) = 0$, si la fonction u_n du champ $\mathcal{F}^{(n)}$ est telle que $\lim\limits_{n=\infty} \mathfrak{J}(u_n) = \mathfrak{J}(u)$, et si de plus $\lim\limits_{n=\infty} \mathbf{S}(u - u^{(n)})^2 = 0$, alors $u^{(n)}$ converge en moyenne vers u.

Car de $\delta\mathfrak{J}(u) = 0$ on déduit encore, en prenant dans (40) $\xi = u_n - u$, une formule qui ne diffère de (48) que par la substitution de u_n à v_n. De $\mathbf{S}(u_n - u)^2 \to 0$ et de $\mathfrak{J}(u_n) \to \mathfrak{J}(u)$ découle alors

$$\lim_{n=\infty} \left[\int_{D} t(u_n - u)\, d\sigma + \int_{C} a''(u_n - u)^2\, ds \right] = 0,$$

d'où, par un raisonnement déjà fait, la convergence en moyenne de u_n vers u. Ceci est vrai pour toute valeur de λ.

FIN DU CHAPITRE II.

(La suite de ce Mémoire paraîtra en 1924.)

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XLVII.

TABLES ALPHABÉTIQUES

DU

TOME XLVII, 2e SÉRIE, LVIIIe DE LA COLLECTION : 1923

PREMIÈRE PARTIE.

1° TABLE DES OUVRAGES ANALYSÉS, PAR NOMS DES AUTEURS.

(Le nom du rédacteur de l'analyse est indiqué en italique.)

2° TABLE DES AUTEURS D'ANALYSES.

3° TABLE DES MÉLANGES, PAR NOMS D'AUTEURS.

FIN DES TABLES DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XLVII.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
69300 Quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

(SECONDE PARTIE.)

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Émile Picard*, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, quai Conti, n° 25, Paris, VIe.

69300-23 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars et Cie, quai des Grands-Augustins, 55.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. É. PICARD ET P. APPELL,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. BRILLOUIN, E. CARTAN, J. DRACH, E. GOURSAT, C. GUICHARD, J. HADAMARD,
G. KŒNIGS, S. LEFSCHETZ, G. LORIA, S. RINDI, H. VILLAT, V. VOLTERRA, ETC.,
PIERRE GAUJA, *secrétaire de la rédaction.*

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR M. G. DARBOUX,

CONTINUÉE DE 1871 A 1875 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL,
DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOUEL ET J. TANNERY,
DE 1886 A 1905 PAR MM. G. DARBOUX ET J. TANNERY,
DE 1905 A 1910 PAR MM. G. DARBOUX, É. PICARD ET J. TANNERY,
ET DE 1910 A 1917 PAR MM. G. DARBOUX ET É. PICARD.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XLVII. — ANNÉE 1923.

(LVIIIe VOLUME DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.



PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET Cie, ÉDITEURS,
LIBRAIRES DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.
Quai des Grands-Augustins, 55.

1923

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

AMERICAN JOURNAL OF MATHEMATICS.

Vol. 42, 1920.

Miller (G.-A.). — [J4*d*] Groups of order $2^{m'}$ which contain a relatively large number of operators of order two [Groupes d'ordre $2^{m'}$ contenant un nombre relativement grand d'opérateurs binaires] (1-10).

Continuation de l'étude des propriétés de ces groupes entamée dans le *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 25, 1919.

Frary (H.-D.). — [$\overline{\text{D}}$4*c*α] The Green's function for a plane contour [La fonction de Green pour un contour plan] (11-26).

Méthode nouvelle pour obtenir la fonction qui la fournit sous la forme $-\log r +$ un développement en $r^n \cos n\theta$, $r^n \sin n\theta$.

Simon (W.-G.). — [H1*j*α] On the solution of certain types of linear differential equations in infinitely many variables [Sur la solution d'un certain type d'équations différentielles à une infinité de variables] (27-46).

Le point de départ est le théorème d'existence de von Koch (*Kongliger-Vetensk.*

Ak. Förhand. vol. 56, 1899, p. 395-411), et une extension du théorème de Poincaré sur le développement des solutions des équations différentielles en séries de puissances de μ quand leurs coefficients sont eux-mêmes de ce type. Existence des solutions de certaines équations linéaires à coefficients périodiques en une infinité de variables.

Buchanan (*Daniel*). — [R 7 *g*] Periodic orbits on a surface of revolution [Orbites périodiques sur une surface de révolution] (47-75).

Soit OZ l'axe supposé vertical. Pour $|Z|$ assez petit l'équation de la surface est de la forme

$$(1) \qquad x^2 + y^2 - 2pZ + 2\varepsilon f(Z) = 0$$

(f série de puissances positives).

On recherche les orbites périodiques du paraboloïde auquel (1) se réduit pour $\varepsilon = 0$ et l'on en fait le prolongement analytique par rapport à ε. Le cas $\varepsilon = 0$ se rapproche du pendule sphérique. La forme de (1) est suggérée par un article de Poincaré (*Transactions Am. Math. Soc.*, vol. 6, 1905).

Carmichael (*R.-D*). — [$\overline{\mathrm{D}}$3*m*] On the convergence of certain classes of series of functions [Sur la convergence de certaines classes de séries de fonctions] (77-90).

Étude de la convergence de séries

$$\sum c_n e^{v_n(x)}$$

et d'autres qui s'y rattachent. On suppose

$$v_n(x) = \sum_0^{\mu_1}{}_i \sum_0^{\nu_1}{}_j\, a^{(n)}_{\mu-i,\,\nu-j}\, x^{\mu-i}(\log x)^{\nu-j} + \frac{M_n(x)}{x^{\mu_1-\mu+1}(\log x)^{\nu_1-\nu+1}}$$

$$(\mu_1 \geq \mu,\ \nu_1 \geq \nu).$$

$|M_n(x)| < M_n$ pour tout x extérieur à un certain cercle et intérieur à un certain secteur qui comprend le demi-axe réel positif. De plus :

1° Il existe une constante σ telle que

$$a^{(n)}_{kl} = \sigma[\alpha^{(n)} + i\beta^{(n)}],$$

où $\alpha^{(n)}$ est monotone croissante quand n dépasse une certaine valeur et

$$\frac{\beta^{(n)}}{\alpha^{(n)}} \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty.$$

2° Pour tout x pour lequel $M_n(x)$ est analytique, $a^{(n)}_{kl}$ a une propriété de dominance telle que

$$\frac{M_n(x)}{a^{(n)}_{kl}} \to 0 \quad \text{quand} \quad n \to \infty,$$

et que de plus à moins que $i = k$, $j = l$, alors aussi

$$\frac{a_{ij}^{(n)}}{a_{kl}^{(n)}} \to 0.$$

3° Si v_n ne se réduit pas au seul terme

$$a_{kl}^{(n)} x^k (\log x)^l \quad \text{avec} \quad x_{kl}^{(n)} \quad \text{réel},$$

nous supposerons qu'il y a un ε tel que pour n au delà d'une certaine valeur $\alpha^{(n+1)} - \alpha^{(n)} \geq \varepsilon$.

Walsh (*J.-L.*). — [B1*e*] On the solution of linear equations in infinitely many variables by successive approximations [Sur la solution des équations linéaires à une infinité de variables par les approximations successives] (91-96).

Nouvelles conditions où il y a une solution, en particulier lorsque le déterminant normal $\neq 0$.

Wear (*L.-E.*). — [M'6] Self dual plane-curves of the fourth order [Courbes autopolaires d'ordre 4] (97-118).

La C_4 est soit un limaçon, soit deux coniques. Étude des deux cas.

Mathewson (*L.-C.*). — [J4*d*3] On the groups of isomorphisms of a system of abelian groups of order p^m and type $(m, 1, \ldots, 1)$ [Sur les groupes d'isomorphismes d'un système de groupes abéliens d'ordre p^m et de type $(m, 1, \ldots, 1)$] (119-128).

L'auteur montre qu'ils peuvent être construits sur le groupe des isomorphismes d'un groupe abélien dont nulle opération n'est d'ordre $> p$.

Winger (*R.-M.*). — [M'5*h*] On the satellite line of the cubic [Sur la ligne satellite d'une cubique] (129-135).

Équations explicites pour les deux genres 0 et 1. Certains lieux associés.

Carver (*W.-C.*). — [K'9*a*] The failure of the Clifford chain [Insuccès de la chaîne de Clifford] (137-167).

Examen des cas où la chaîne donne lieu à des droites au lieu de cercles (*voir* CLIFFORD, *Messenger of Math.*, vol. 5, 1870, p. 124; — KANTOR, *Wiener Sitzungsb.*, vol. 78, 1878, p. 204; — MORLEY, *Transactions Am. Math. Soc.*, vol. 1, 1900, p. 97).

Bell (*E.-T.*). — [I17] On the representation of numbers as sums of 3, 5, 7, 9, 11 and 13 squares [Sur la représentation des nombres par une somme de 3, 5, 7, 9, 11 et 13 carrés] (168-188).

Détermination sous forme finie (*voir* GLAISHER, *Quaterly Journal*, vol. 38, 1906-1907, p. 1-68; *London Math. Soc. Proceedings*, 2ᵉ série, vol. 5, 1907, p. 479-490).

Emch (*Arnold*). — [$M^2 7 b\delta$] On a certain class of rational ruled surfaces [Sur une certaine classe de surfaces réglées rationnelles] (189-210).

Soient C_2 un cercle, C_1 une droite par son centre et perpendiculaire à son plan. Un plan variable *e* par C_1 coupe C_2 en M. Dans *e* on considère une droite *g*. *g* tourne uniformément autour de M tandis que *e* en fait autant autour de C_1. Le lieu de *g* est la surface en question.

Wilczynski (*E.-J.*). — [O'3] Geometrical significance of isothermal conjugacy of a net of curves [Signification géométrique de la condition pour un réseau de courbes d'être isothermiquement conjugné] (211-221).

Un tel système a été défini analytiquement par Bianchi (*Lezioni di Geom. diff.*, 2ᵉ édition, vol. 1, p. 168). L'auteur en fournit une interprétation géométrique complétant un résultat de Green (*American Journal*, vol. 38, 1916, p. 323).

Daniell (*P.-J.*). — [J2eα] Observations weighted according to order [Attribution d'un poids aux observations d'après l'ordre] (222-236).

Formule donnant la moyenne du carré de la déviation avec applications.

Rice (*L.-H.*). — [B1*a*] Some determinant expansions [Quelques développements de déterminants] (237-242).

Démonstration nouvelle et extension d'un théorème de Muir (*Mess. Math.*, vol. 48, 1918).

Lamson (*W.-K*). — [$\overline{\mathrm{D}}5e$] A general implicit fonction theorem with application to problems of relative minima [Un théorème général sur les fonctions implicites avec application aux problèmes de minima relatifs] (243-256).

Théorème d'existence, appartenant au domaine de la *General Analysis* de

E.-H. Moore, applicable tant aux fonctions qu'aux fonctionnelles implicites. Application au problème de Lagrange dans le calcul des variations.

Borden (*R.-F.*). — [H12] On the Laplace-Poisson mixed equation [Sur l'équation mixte de Laplace-Poisson] (257-277).

Théorie de l'équation introduite par Poisson (*Journ. Éc. Polyt.*, 6e cahier, 1808),

$$(1)\qquad f'(x+1)+p(x)f'(x)+q(x)f(x+1)+m(x)f(x)=0,$$

analogue à celle classique de Laplace

$$(2)\qquad S-ap+bq+cZ=0.$$

Théorie des invariants de (1) sous la transformation $f(x)=v(x)g(x)$, se rapprochant beaucoup de la théorie semblable pour (2) avec méthodes de traitement analogues.

Miller (*G.-A.*). — [J4d3] Characteristic subgroups of an abelian prime pouver group [Sous-groupes caractéristiques d'un groupe abélien d'ordre puissance d'un nombre premier] (278-286).

Continuation d'un travail antérieur (*American Journal*, 1905, p. 15-24).

Vol. 43, 1921.

Coble (*A.-B.*). — [B7] Multiple binary forms with the closure property [Formes binaires multiples avec la propriété de clôture] (1-19).

Soit la forme binaire d'ordre $(k, \varkappa)$

$$(1)\qquad F=(at)^k(b\tau)^\varkappa=0$$

satisfaite pour t_0, τ_0. A t_0 correspondent $\varkappa$ valeurs de τ soient $\tau_0, \tau_1, \ldots$, à chacune desquelles correspondent, outre t_0, $k-1$ autres valeurs $t_1, t_2, \ldots$. Chaque t_i détermine à son tour d'autres τ, etc.

Si après un nombre fini de répétitions on a n valeurs t et ν valeurs τ telles que chaque $t(\tau)$ détermine par (1) $\varkappa(k)$ valeurs $\tau(t)$ déjà comprises parmi les $\nu(n)$ valeurs de $\tau(t)$ on dira que F admet la configuration $\Delta_{n,\nu}^{k,\varkappa}$, $t_0, t_1, \ldots, t_{n-1}$; $\tau_0, \tau_1, \ldots, \tau_{\nu-1}$. Le nombre de paires d'éléments satisfaisant (1) est $n\varkappa$, ou bien νk, d'où $n\varkappa=\nu k$. S'il y a une infinité de Δ on dit que F est *poristique*, que chaque Δ est un *porisme*. A une configuration donnée en correspond une *complémentaire* $\Delta_{n,\nu}^{n-k,\nu-k}$, composée des paires (t, τ) de la première qui ne satisfont pas F.

Si F est poristique les éléments des configurations sont déterminables par deux équations

$$(\gamma t)^n + \lambda(\delta t)^n = 0, \qquad (c\tau)^\nu + \lambda(d\tau)^\nu = 0.$$

Par suite,

$$D_{n,\nu} = \begin{vmatrix} (\gamma t)^n & (\delta t)^n \\ (c\tau)^\nu & (d\tau)^\nu \end{vmatrix} = 0,$$

$D_{n,\nu}$ détermine des porismes $\Delta_{n,\nu}^{n\nu}$. Cette dernière configuration est dite *complète*. Elle a pour facteur F et le facteur complémentaire

$$F' = (\beta t)^{n-k}(b\tau)^{\nu-\varkappa}$$

aussi poristique. On a D = F, F'.

Discussion. Examens de certains porismes. Généralisations.

Kasner (*Edward*). — [T 1 *a*] Einstein's theory of gravitation. Determination of the field by light signals [Théorie de la gravitation d'Einstein : Détermination du champ par des signaux lumineux] (20-28).

Discussion de la détermination d'une variété à quatre dimensions

$$ds^2 = \sum_1^4{}^{i.k} g_{ik}\, dx_i\, dx_k$$

obéissant à la loi d'Einstein $G_{\mu\nu} = 0$, quand on connaît uniquement l'équation des rayons lumineux

$$\sum g_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0.$$

Autrement dit, on connaît les rapports des g et il s'agit de les déterminer de manière que $G_{\mu\nu} = 0$.

On arrive à montrer par exemple que le champ de gravitation solaire, ou tout autre ne différant que fort peu d'un champ galiléen ou plan, peut être complètement exploré par des signaux lumineux. Les rayons lumineux déterminent les orbites et réciproquement.

Morley (*F.*). — [T 1 *a*] Note on Einstein's equation of an orbit [Note sur l'équation d'Einstein pour une orbite] (29-32).

Discussion au moyen de fonctions elliptiques (*voir* EINSTEIN, *Berliner Sitzungsb.*, 1915, p. 831; — FORSYTH, *Royal Soc. Proc.*, sér. A, vol. 97, 1920).

Morse (*H.-M.*). — [O'5 *l*] A one to one representation of geodesics on a surface of negative curvature [Représentation biunivoque pour les géodésiques d'une surface à courbure négative] (33-51).

Étude des géodésiques sans points infinis à l'aide d'une classe spéciale de

courbes qui leur correspond biunivoquement (*voir* HADAMARD, *Journal de Math.*, 5e série, t. 4, 1898, p. 27).

Lane (*E.-P.*). — [O'3*n*] Conjugate systems with indeterminate axis curves [Systèmes conjugués à courbes axiales indéterminées] (52-68).

Notions introduites par Wilczynski (*Mém. de la classe des Sciences Acad. R. de Belgique*, 2e série, vol. 3, 1911; *Transactions Am. Math. Soc.*, vol. 16, p. 311-327) dont l'auteur poursuit l'étude.

Carmichael (*R.-D.*). — [H10*a*] Boundary value and expansion problems : Algebraic basis of the theory [Problèmes de conditions à la frontière et de développements en série : base algébrique de la théorie] (69-101).

Traitement de diverses questions algébriques qui, par un passage à un nombre infini continu ou discontinu de variables, doivent fournir la solution d'une classe très large de problèmes.

Dickson (*L.-E.*). — [B9] Algebraic theory of the expressibility of cubic forms as determinants, with application to diophantine analysis [Théorie algébrique de la possibilité d'exprimer des formes cubiques comme déterminants, avec application à l'analyse diophantine] (102-125).

Il s'agit de trouver des déterminants à éléments linéaires, égaux à une forme cubique donnée, ceci par des opérations purement rationnelles (*voir* DICKSON, *Transactions Am. Math. Soc.*, 1921).

Kasner (*Edward*). — [T1*a*] The impossibility of Einstein fields immersed in flat space of five dimensions [Impossibilité de champs d'Einstein plongés dans un espace ordinaire à 5 dimensions] (126-129).

La forme

$$ds^2 = \sum g_{ik}\, dx_i\, dx_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

peut être plongée *a priori* dans un S_n, $4 \leq n \leq 10$. $n = 4$ est trivial. L'auteur montre que $n = 5$ est incompatible avec les équations d'Einstein $G_{\mu\nu} = 0$. $n = 6$ est acceptable.

Kasner (*Edward*). — [T1*a*] Finite representation of the solar gravitational field in flat space of six dimensions [Représenta-

tion finie du champ de gravitation solaire, dans un espace ordinaire à 6 dimensions] (130-133).

Continuation du travail précédent. L'auteur donne les équations en termes finis de deux surfaces qui ensemble définissent la métrique du champ solaire. Une de ces surfaces est le paraboloïde de Flamm (*Physik. Zeitsch.*, vol. 25, 1916, p. 163).

Datta (*B.*). — [S2eα] On the motion of two spheroids in an infinite liquid along their common axis of revolution [Sur le mouvement de deux sphéroïdes dans un liquide indéfini le long de leur axe de rotation commun] (134-142).

Dans un travail précédent (*Bulletin Calcutta Math. Soc.*, vol. 7) l'auteur avait discuté la même question quand les excentricités sont faibles. Cette fois il traite le cas général.

Daniell (*P.-J.*). — [J2] Integral products and probability [Produits intégraux et probabilité] (143-162).

Emploi d'un produit intégral de Stieltjes pour l'étude de la dispersion.

Post (*E.-L.*). — [V1b] Introduction to a general theory of elementary propositions [Introduction à une théorie générale des propositions élémentaires] (163-185).

Berry (*Arthur*). — [F5bβ] Note on Schläfli's elliptic modular equations [Note sur les équations modulaires elliptiques de Schläfli] (186-188).

Complète un résultat d'un travail précédent (voir *American Journal*, vol. 30, p. 156-169).

Hazlett (*D.-C.*). — [B4k] Associated forms in the general theory of modular covariants [Formes associées dans la théorie générale des covariants modulaires] (189-198).

Extension des méthodes d'Hermite (*Journal de Crelle*, vol. 52, 1856) aux formes d'un corps de Galois GF(p^n).

Hollcroft (*T.-R.*). — [M²1g] On (2, 3) compound involutions [Sur les involutions (2, 3) composées] (199-212).

Ce travail complète la classification des correspondances (2, 3) entre deux plans (voir *American Journal*, vol. 41, 1919, p. 5-24).

Schouten (J.-A.) and *Struik (D.-J.)*. — [T 1 *a*] On some properties of general manifolds relating to Einstein's theory of gravitation [Sur quelques propriétés des multiplicités générales reliées à la théorie de gravitation d'Einstein] (213-216).

Démonstration nouvelle de certains théorèmes de M. Kasner (*American Journal*, vol. 43, 1921) sans avoir recours aux symboles à la Christoffel.
Extension aux lois de de Sitter pour un univers quasi sphérique.

Kasner (Edward). — [T 1 *a*] Geometrical theorems on Einstein's cosmological equations [Théorèmes géométriques sur les équations cosmologiques d'Einstein].

Extension des résultats de l'auteur (*American Journal*, vol. 43, 1921) aux nouvelles équations d'Einstein (équations cosmologiques) (*Berliner Berichte*, 1919)

$$G_{\mu\nu} - \lambda g_{\mu\nu} = 0, \qquad G_{\mu\nu} - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} G = 0.$$

Sparrow (C.-M.). — [Q 1 *a*] On the Fermat and Hessian points for the non euclidean triangle and their analogues for the tetrahedron [Sur les points de Fermat et de Hesse pour le triangle non euclidien avec leurs analogues pour le tétraèdre] (222-225).

Hart (W.-L.). — [H 2 *e* α] The Cauchy-Lipschitz method for an infinite system of differential equations [La méthode de Cauchy-Lipschitz pour un système infini d'équations différentielles] (226-231).

L'auteur a déjà traité le système

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots; t), \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

par les approximations successives. Une condition à la Lipschitz était alors nécessaire. Il s'en affranchit cette fois (voir *Transactions Am. Math. Soc.*, vol. 18, 1917).

Carmichael (R.-D.). — [H 10 *a*] Boundary value and expansion problems; formulation of various transcendental problems [Problèmes de conditions à la frontière et de développements

en série; formulation de divers problèmes transcendants] (232-270).

Continuation d'un Mémoire dans le même volume.

Whittemore (*J.-K.*). — [J3aβ] Reciprocity in a problem of relative maxima and minima [Réciprocité dans un problème de maxima et minima relatifs] (271-290).

Maximum ou minimum de $f(x, y)$ lorsque $\varphi(x, y) = \text{const.}$ Illustrations.

SALOMON LEFSCHETZ.

TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY.

Vol. 21, 1920.

Hoskins (*L. M.*). — [T2a] The strain of a gravitating sphere of variable density and elasticity [Déformation d'une sphère gravitante de densité et élasticité variables] (1-43).

[*Voir* : HOSKINS. *Transactions Am. Math. Soc.*, vol. 11, 1910); — LOVE, *Some problems of geodynamics*, 1911; *Phil. Transactions*, vol. 207, 1907; — HERGLOTZ, *Zeitsch. für Math. u. Physik*, vol. 52, 1905); — Lord RAYLEIGH, *Royal Soc Proc.*, vol. 77, 1906].

Équations sous forme générale puis cas spécial où le potentiel perturbant W est

$$W = \frac{cg}{2a^{i-1}} r^i S_i$$

(g constante de gravitation, c constante, a rayon de la sphère, r distance au centre, S_i sphéro-harmonique d'ordre i fonction harmonique simple du temps).

Soient V le potentiel initial dû à l'attraction, supposé fonction de r seule, U son accroissement, V′ le potentiel des forces internes On a $V' - V = W + U$. Or on peut exprimer U sous forme S_i fonction de r. Par suite en introduisant les déplacements u_r, u_θ, u_φ, relatifs aux variables r, θ, φ des coórdonnées polaires, et en faisant l'hypothèse que

$$u_r = u(r).S_i, \qquad u_\theta = v(r)\frac{\partial S_i}{\partial\theta}, \qquad u_\varphi = \frac{v(r)}{\sin\theta}\frac{\partial S_i}{\partial\varphi}$$

et en posant

$$y = \frac{1}{r^2}\frac{d(r^2u)}{dr} - i(i+1)\frac{v}{r}, \qquad z = \frac{1}{r}\left(\frac{d(rv)}{dr} - u\right)$$

on arrive aux deux relations

$$(1)\quad \begin{cases} (\lambda+2\mu)r\dfrac{dy}{dr}+i(i+1)\mu z+r\dfrac{d\lambda}{dr}y+2r\dfrac{d\mu}{dr}\dfrac{du}{dr} \\ \quad =\dfrac{g\rho a}{\rho_m}\left(r\dfrac{dR}{dr}-\dfrac{3y}{a^2 r}\displaystyle\int_0^r \rho r^2\,dr\right)-\rho p^2 ru. \\ (\lambda+2\mu)y+\mu\dfrac{d(rz)}{dr}+r\dfrac{d\mu}{dr}\left(\dfrac{u-v}{r}+\dfrac{dv}{dr}\right)-\rho p^2 rv. \end{cases}$$

Les nouvelles lettres ont le sens suivant : λ, μ comme d'ordinaire en Élasticité, ρ densité, ρ_m sa moyenne,

$$p=\sqrt{\frac{-1}{S_i}\frac{\partial^2 S_i}{\partial t^2}}=\text{const. (vu les hypothèses)},$$

$$R=\frac{\rho_m}{agS_i}\left(V-V-u_r\frac{dV}{dr}\right).$$

A (1) il faut adjoindre les conditions à la frontière pour $r=a$,

$$\lambda y+2\mu\frac{du}{dr}=0,\qquad \mu\left(\frac{dv}{dr}+\frac{u-v}{r}\right)=0.$$

L'auteur résout le système à l'aide de développements en séries d'abord avec λ, μ constants, ρ polynome en r puis avec λ, μ de même type aussi avec une certaine restriction. — Cas où ρ, λ, μ sont du type $a+br^2$; application à la terre.

Coolidge (*J. L.*). — [K² 13] Geometry of hermitian forms [Géométrie des formes hermitiennes] (44-51).

Étude analytique et géométrique du groupe des collinéations maintenant fixe la forme hermitienne

$$\sum x_i\,\overline{x}_i.$$

L'auteur donne l'expression générale d'une telle collinéation, des théorèmes sur les points fixes, le nombre de paramètres réels ou complexes, etc.

Sharpe (*F. R.*) *and Snyder* (*Virgil*). — [M² 1 *e*] Certain types of involutorial space transformations [Certains types de transformations involutoires de l'espace] (52-77).

Fait suite à l'article des *Transactions Amer. Math. Soc.*, vol. 20, 1919. Revient à l'étude d'un système linéaire ∞^3 de l'espace ordinaire dont trois surfaces quelconques se coupent en deux points variables. On se limite ici au cas où les surfaces sont d'ordre $\leqq 5$. Un cas intéressant rencontré est celui où les surfaces sont des quartiques passant par une C_8^2. Il y a alors deux involutions distinctes maintenant chacune invariante, au produit discontinu d'ordre infini. Ces surfaces sont distinctes des quartiques de Fano qui passent par une C_6^2.

Bliss (*G. A.*). — [H.11c] Differential equations containing arbitrary functions [Équations différentielles contenant des fonctions arbitraires] (78-92).

Étude des solutions du système

$$\frac{dx^{(i)}}{d\tau} = f^{(i)}(\tau, x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(p)})$$

en tant que fonctionnelles des f. En poussant l'étude des approximations successives il apparaît que ces fonctionnelles sont uniformément continues en un sens que l'auteur précise et ont aussi des dérivées partielles par rapport à τ et aux éléments initiaux aux propriétés semblables. Étude des différences et différentielles, ainsi que des fonctions implicites.

Bliss (*G. A.*). — [D1e] Functions of lines in ballistics [Fonctions de ligne en balistique] (93-106).

Application de l'article précédent aux problèmes de balistique. [Voir *Journal of the U. S. Artillery*, vol. 51, 1919.]

Moore (*C. N.*). — [D2b] On the summability of developments in Bessel's functions [Sur la sommabilité des développements en fonctions de Bessel] (107-156].

Établissement des conditions suffisantes pour la sommabilité (Cesàro) à l'origine et la sommabilité uniforme en son voisinage des séries de Bessel. [*Voir* les articles de l'auteur dans les *Transactions*, vol. 10, 1909; vol. 12, 1911; — Ford (W. B.), *Studies on divergent series and summability*, chap. V; — Young (W. H), *Proceedings of the London Math. Soc.*, 2e série, vol. 18, 1919-1920.]

Posons

$$f(x) - f(0) = \varphi(x):$$

1° Si pour $0 \leqq x \leqq 1$, $\varphi(x)$ a une intégrale de Lebesgue et si de plus

$$\left| \frac{\varphi(x)}{x^{\frac{1}{2}+\rho}} \right| < M, \qquad 0 < x \leqq c \leqq 1$$

(M, ρ, constantes positives), le développement de $f(x)$ en fonctions de Bessel d'ordre $\nu \gtreqless 0$ est sommable $\left(C\,\frac{1}{2}\right)$ à l'origine.

2° Supposons qu'en outre en posant

$$g(x) = \sqrt{x}.\varphi(x),$$

l'intégrale

$$\int_0^u \frac{g(x+2t) + g(x-2t) - 2g(x)}{t^2}\, dt$$

existe et $\to 0$ uniformément avec u, pour $0 \leqq x \leqq c$, que de plus

$$\int_0^u \frac{g(x+2t)-g(x-2t)}{t}\,dt$$

existe et qu'enfin la variation totale de

$$\frac{1}{u}\int_0^u \frac{g(x+2t)-g(x-2t)}{t}\,dt$$

dans l'intervalle $0 \leqq u \leqq \gamma$, $\to 0$ avec γ uniformément pour tout x tel que plus haut. Dans ces conditions le développement de $f(x)$ déjà défini est uniformément sommable $\left(C\,\frac{1}{2}\right)$ toujours dans le même intervalle $0 \leqq x \leqq c$ pourvu que $\nu = 0$, $f(0) = 0$.

Wilczynski (*E. J.*). — [O6s] One parameter families and nets of ruled surfaces and a new theory of congruences [Familles à un paramètre et réseaux de surfaces réglées et théorie nouvelle des congruences] (157-206).

Une congruence peut être définie comme le lieu des génératrices d'un système de ∞^1 surfaces réglées dépendant d'un paramètre v. Soient u le paramètre dont dépendent les génératrices de la surface (v); $y^{(k)}$, $z^{(k)}$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ les coordonnées homogènes de deux points de la génératrice (u). Suivant la méthode de l'auteur (*Projective differential geometry*. Leipzig, 1906, p. 133), on les considère comme déterminées par deux équations.

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{d^2y}{du^2} + p_{11}\frac{dy}{du} + p_{12}\frac{dz}{du} + q_{11}y + q_{12}z = 0,\\ &\frac{d^2z}{du^2} + p_{21}\frac{dy}{du} + p_{22}\frac{dz}{du} + q_{21}y + q_{22}z = 0,\end{aligned}\right.$$

où les coefficients sont ici des fonctions de u et v.

Les propriétés projectives de la surface (v) sont complètement déterminées par les invariants de (1), mais il n'en est naturellement plus ainsi pour celles de la congruence. D'abord si u est maintenu fixe on a une seconde famille ∞^1 dépendant de v semblable à la première. Les deux constituent ensemble le *réseau* (net). L'auteur détermine ses invariants projectifs. Il en déduit ceux de la famille dépendant de v puis ceux de la congruence.

Green (*G. M.*). — [O3] Nets of space curves [Réseaux de courbes gauches. Mémoire posthume] (207-236).

Soient $y^{(k)}$ les coordonnées projectives courantes avec

$$y^{(k)} = f^{(k)}(u, v) \qquad (k = 1, 2, 3, 4).$$

Ces fonctions satisfont à un certain système qu'une transformation projective ne change pas.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} = a \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + b \frac{\partial y}{\partial u} + c \frac{\partial y}{\partial v} + dy$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = a' \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + b' \frac{\partial y}{\partial u} + c' \frac{\partial y}{\partial v} + d'y$$

et qui est le point de départ. Étude des familles paramétriques $u =$ const., $v =$ const., en supposant toutefois que les y ne satisfont à aucune équation du type de Laplace

$$\alpha \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} + \beta \frac{\partial y}{\partial u} + \gamma \frac{\partial y}{\partial v} + \delta y = 0,$$

c'est-à-dire que les deux familles ne sont pas conjuguées.

Wiener (Norbert). — [V1*b*] A set of postulates for fields [Système de postulats pour les champs] (237-246).

Même travail pour l'algèbre ordinaire que celui accompli pour les algèbres à la Boole par H. M. Scheffer [*Transactions Amer. Math. Soc.*, vol. 14, 1913].

Hazlett (C. O.). — [B4*k*]. A theorem on modular covariants [Théorème sur les covariants modulaires] (247-254).

Démonstration de ce théorème : Les covariants modulaires d'un sytème S de formes binaires d'un corps de Galois GF[p^n] sont des polynomes formés avec ($yx^{p^n} - xy^{p^n}$) et les invariants du système obtenu en adjoignant une forme linéaire à S [*voir* Sanderson, *Transactions Am. Math. Soc.*, vol. 14, 1913].

Hardy (G.-H.). — [F8*d*γ] On the representation of a number as the sum of any number of squares, and in particular of five [Sur la représentation d'un nombre par une somme d'un nombre quelconque de carrés, et en particulier par une somme de cinq] (255-284).

[*Voir* Hardy, *Proceedings of the Nat. Acad.*, vol. 4, 1918, p. 189-193; — Hardy and Ramanujan, *Comptes rendus*, 1917; *Proceedings London Math. Soc.*, 2ᵉ série, vol. 17, 1918, p. 75-115; *Proceedings Royal Soc.* (A), vol. 95, 1918, p. 144-155; — Ramanujan, *Cambridge Phil. Transactions*, vol. 22, 1918, p. 259-276; — Hardy and Littlewood, *Quarterly Journal*, vol. 48, 1919, p. 272-293; *Cambridge Phil. Proceedings*, vol. 19, 1919, p. 245-254; *Göttinger Nachrichten*, 1920; *Mathem. Zeitschrift*, 1920.]

Soit s le nombre des carrés. L'auteur prend $s \geq 8$, avec en général $s = 5$

ou 8 cas types pour leur parité. Il construit la *série singulière*

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}s}\, n^{\frac{1}{2}s-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)} \sum_{1}^{\infty} A_k,$$

$$A_1 = 1, \qquad A_k = \frac{1}{k^s} \sum_h (S_{h,k})^s e^{-\frac{2nh\pi i}{k}};$$

où $S_{h,k}$ est la somme de Gauss

$$\sum_{1}^{k} {}_l\, e^{\frac{2l^2 h\pi i}{k}},$$

la sommation étant étendue pour h aux entiers positifs $< k$ et premiers avec lui. L'auteur montre que sauf pour $s = 2$ la série a pour somme le nombre de représentations cherchées pour n. En sommant la série pour $s = 8$ on a les résultats de Jacobi. L'auteur obtient aussi ceux de Eienstein, Smith, Minkowski pour $s = 5$. Remarques sur le cas $s > 8$.

Glenn (*O.-E.*). — [B 4 *k*] A memoir upon formal invariancy with regard to binary modular transformations. Invariants of relativity [Mémoire sur l'invariance formelle par rapport aux transformations modulaires binaires. Invariants de la relativité] (285-312).

Introduction à la théorie des covariants modulaires attachés à un corps de rationalité quelconque. Systèmes de covariants universels de certains groupes modulaires spéciaux. Théorie des semi-invariants avec application aux systèmes complets pour formes d'ordres 1, 2, 4, *moduli* 2 et 3. Systèmes complets de covariants pour ces modules de la quartique générale binaire d'ordre 4. Certaines questions d'invariance se présentant dans la relativité.

Miller (*G.-A.*). — [I 4 *d* β] Properties of the subgroups of an abelian prime power group which are conjugate under its group of isomorphisms [Propriétés des sous-groupes d'un groupe abélien, d'ordre puissance d'un nombre premier, conjugués par rapport au groupe de ses isomorphismes] (313-320).

Conditions d'existence. Théorème sur leur nombre pour les différents ordres qu'ils peuvent avoir.

Jackson (*Dunham*). — [D 6 *b* β] On the order of magnitude of the coefficients in trigonometric interpolation [Sur l'ordre de

grandeur des coefficients dans l'interpolation trigonométrique] (321-332).

Soit $f(x)$ une fonction à la période 2π

$$\frac{1}{2}a_1 + \sum a_n \cos nx + b_n \sin nx$$

sa série de Fourier,

$$\sigma_p(x) = \frac{1}{2}a_{0p} + \sum_1^p {}_n\, a_{np}\cos nx + b_{np}\sin nx$$

la somme trigonométrique d'ordre p qui prend les mêmes valeurs que $f(x)$ en $2p+1$ points équidistants de l'intervalle. Les coefficients sont donnés par

$$a_{np} = \frac{2}{2p+1}\sum_0^{2p} {}_k\, f(x_k)\cos nx_k, \qquad b_{np} = \frac{2}{2p+1}\sum_0^{2p} {}_k\, f(x_k)\sin nx_k.$$

On a $\lim a_{np} = a_n$, $\lim b_{np} = b_n$ quand $p \to \infty$.

En supposant $f(x)$ à variation bornée, l'auteur trouve, par des sommations partielles,

$$|a_{np}| \leq \frac{V}{n}, \qquad b_{np} = \frac{V}{n},$$

où V est la variation totale dans l'intervalle $0 - 2\pi$.

Si $f'(x)$ est à variation bornée avec une variation totale de V dans le même intervalle,

$$|a_{np}| \leq \frac{L}{n^2}, \qquad |b_{np}| \leq \frac{L}{n^2},$$

où L ne dépend pas de p. Par une première méthode l'auteur montre que l'on peut prendre $L = \frac{V\pi}{2}$ et par une seconde que l'on peut prendre la moitié de cette valeur. Extension aux dérivées d'un ordre quelconque.

Moore (*R.-L.*). — [J5*e*] Concerning simple continuous curves [Sur les courbes simples continues] (333-347).

Définition d'un arc simple. L'arc ainsi défini est de Jordan. Caractérisation des courbes fermées simples. Discussion de la définition des arcs continus simples. (*Voir* JANISZEWSKI (*Journal de l'Éc. Polyt.*, 2ᵉ série, vol. 16, 1911-1912, p. 79-170); — LENNES, *American Journal*, vol. 33, 1911, p. 308; *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 12, 1906, p. 284; — SIERPINSKI, *Annali di Mat.*, 3ᵉ série, vol. 26, 1916, p. 131-150; — KLINE. MOORE, *Proceedings Nat. Acad.*, vol. 4, 1918, p. 364-370; — HALLETT, *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 25, 1919, p. 325-326.)

Ritt (*J.-F.*). — [H11*d*] On the iteration of rational functions [Sur l'itération des fonctions rationnelles] (348-356).

Étude des itérées d'une fonction rationnelle basée sur un théorème de Boett-

cher [*Bull. Soc. math. de Kazan*, vol. 14, 1905, p. 176]. [*Voir* les Notes de MM. JULIA, FATOU, LATTÈS, RITT dans les *Comptes rendus* de 1917 et 1918; aussi JULIA, *Journal de Math.*, 1918; — FATOU, *Bull. Soc. math. de France*, 1919.]

Le Stourgeon (*E.*). — [D1*e*] Minima of functions of lines [Minima des fonctions de lignes] (375-383).

Soit $F[(\lambda_a^b(x)]$ une fonctionnelle. D'après Fréchet (*Transactions Am. Math. Soc.*, vol. 15, 1914, p. 139), $F[\lambda_0+\eta] - F[\lambda_0]$ peut être exprimée en terme des différentielles premières et secondes telles qu'il les a définies. Mais ses définitions exigent la continuité d'ordre zéro (variation tendant vers zéro avec le maximum de $|\eta(x)|$ sur ab). Cependant quand cette variation $\rightarrow 0$ seulement quand les maxima de $|\eta(x)|$ et de $|\eta'(x)|$ sur ab, $\rightarrow 0$ simultanément il y a continuité d'ordre un. C'est le cas particulier pour les intégrales du calcul des variations. L'auteur généralise les résultats de Riesz (*Comptes rendus*, vol. 149, p. 974-977; *Ann. Éc. Norm.*, vol. 31, 1914) pour la première différentielle qui est une fonctionnelle linéaire $L(\eta)$ et de Fréchet pour la seconde $B(\eta, \eta)$, par les relations

$$L(\eta) = \int_a^b \eta(x)\, du(x) + \int_a^b \eta'(x)\, du_1(x),$$

$$\begin{aligned} B(\eta, \eta) = & \int_a^b \int_a^b \eta(x)\, \eta(y)\, d_{xy}\, p(x, y) \\ & + 2 \int_a^b \int_a^b \eta'(x)\, \eta'(y)\, d_{xy}\, q(x, y) \\ & + \int_a^b \int_a^b \eta'(x)\, \eta'(y)\, d_{xy}\, r(x, y). \end{aligned}$$

Si F a un minimum en $\lambda_0(x)$ on doit avoir une relation

$$u_1(x) - \int_a^x u(x)\, dx = kx + l.$$

Sous certaines restrictions il a une condition nécessaire pour un minimum analogue à celle de Jacobi dans le calcul des variations. S. $F[\lambda_0]$ est un minimum, l'équation

$$\begin{aligned} & \int_a^b [u(y)\, d_y\, q(y, x) + u'(y)\, d_y\, r(x, y)] \\ & \quad - \int_a^x \int_a^b [u(y)\, d_y\, p(x, y) - u'(y)\, d_y\, q(x, y)]\, dx = kx + l, \end{aligned}$$

où $u(x)$ s'annule en a et en un point x', intérieur à ab, donne nécessairement $u(x) \equiv 0$.

Interprétation pour les intégrales du calcul des variations.

Simonds (*E.-F.*). — [C4*a*] Invariants of infinite groups in the plane [Invariants des groupes infinis dans le plan] (384-390).

Application aux groupes du point et des transformations de contact, des résultats d'un article précédent [*Transactions Am. Math. Soc.*, vol. 19, 1918, p. 223-250].

Shaw (*J.-B.*). — [$N^2$3*c*] On triply orthogonal congruences [Sur les congruences triplement orthogonales] (391-408).

Étude des champs de vecteurs triplement orthogonaux, de longueur égale à un. Méthode vectorielle, calcul à l'aide des quaternions.

Wilczynski (*E.-J.*). — [$O^1$7*a*β] A set of properties characteristic of a class of congruences connected with the theory of functions [Un ensemble de propriétés qui caractérisent une classe de congruences reliées à la théorie des fonctions] (409-445).

Soit F(z) une fonction non linéaire. Joignons par une ligne droite les deux points z, F(z) de la sphère de Neumann. On obtient ainsi une congruence déjà étudiée par l'auteur (*Transactions Amer. Math. Soc.*, vol. 20, 1919). Il y a obtenu toute une série de propriétés qu'il démontre cette fois caractéristiques. Traitement spécial quand F(z) est linéaire.

Alexander (*J.-W.*). — [S1*a*] On the equilibrium of a fluid mass at rest [Sur l'équilibre d'une masse fluide en repos] (446-450).

Réponse par la négative à la question suivante posée par Liapounoff [*Communications de la Soc. math de Kharkow*, 1887] et Poincaré [*Comptes rendus*, vol. 104, 1887] : — Une masse fluide incompressible soumise à la seule loi d'attraction de Newton et sans forces extérieures, peut-elle posséder d'autres positions d'équilibre que la sphère ?

Kline (*J.-R.*). — [J5*e*] Concerning the approachability of simple closed and open curves [Sur l'accessibilité des courbes ouvertes et fermées simples] (451-458).

Démonstration de ce théorème. — Soient K un ensemble ponctuel plan fermé, S l'ensemble de tous les points du plan, $S - K = S_1 + S_2$ où S_1, S_2 sont deux domaines mutuellement exclusifs tels que tout point de K soit frontière pour chacun d'eux. Pour que K soit une courbe simple fermée ou une courbe ouverte il faut et il suffit qu'il soit localement connexe. [*Voir* SCHOENFLIES, *Göttinger Nachr.*, 1902; — LENNES, *Amer. Journal*, vol. 33, 1911; — MOORE, *Transactions Ann. Math. Soc.*, vol. 17, 1916.] SALOMON LEFSCHETZ.

ANNALS OF MATHEMATICS.

Série II, vol. 22, 1920-1921.

Boutroux (Pierre). — [H 1 *g*] On multiform functions defined by differential equations of the first order [Sur les fonctions multiformes définies par des équations différentielles du premier ordre] (1-10).

L'auteur y fait l'étude de l'équation

$$y' - A_0 + A_1 y + A_2 y^2 + A_3 y^3 = 0,$$

où les A sont des polynomes en x la variable indépendante. Il fait de suite le changement de variable $y = \frac{1}{z}$, l'équation devenant alors

$$zz' = A_0 z^3 - A_1 z^2 + A_2 z - A_3$$

qu'il classifie, trouvant comme cas le plus simple

$$zz' = A_2 z + A_3.$$

Soit m_i le degré de A_i. On a trois cas différents suivant que $m_3 >, =$ ou $< 2m_2 + 1$ et dans cet article l'auteur s'attache à l'exemple simple suivant du premier

(1) $$zz' = 3mz + 2(x^3 - 1)$$

se proposant de traiter toute la question en détail dans les *Annales de l'École Normale.*

Les solutions de (1) que l'auteur se propose d'étudier sont finies à distance finie et ne possèdent en général que des points critiques algébriques à distance finie permutant deux branches. Pour des solutions spéciales il y a cependant comme points transcendants les affixes des racines cubiques de l'unité. Le point ∞ est toujours une singularité transcendante. En exprimant la solution de (1) à l'aide d'un certain paramètre, l'auteur arrive à en étudier le groupe qui est infini mais composé avec six substitutions fondamentales dont trois sont les inverses des trois autres.

Coolidge (J. L.). — [Q] Hermitian metrics [Métriques hermitiennes] (11-28).

Il s'agit de la Géométrie où la distance d de deux points aux coordonnées homogènes x_i, y_i est définie en terme de la forme hermitienne (à indéterminées conjuguées)

(1) $$\sum a_{ij} x_i \overline{x}_j, \qquad \overline{a_{ij}} = a_{ji}.$$

par la relation

$$d = k \text{ arc cos} \sqrt{\frac{\sum a_{ij} x_i \overline{y}_j \sum a_{ij} y_i \overline{x}_j}{\sum a_{ij} x_i \overline{x}_j \sum a_{ij} y_i \overline{y}_j}}.$$

(*Voir* FUBINI, *Atti del Reale Istituto Veneto*, vol. 63, 1903-1904; — STUDY, *Math. Ann.*, vol. 60, 1905.)

Si (1) est définie on a la géométrie *elliptique*.

Enfin en remplaçant d et x_0, y_0, par $\frac{d}{k}$, kx_0, ky_0, et prenant comme définition de la distance $\lim\limits_{k \to \infty} d$, on a la géométrie *parabolique*. Avec (1) sous la forme canonique

$$\sum x_i \overline{x}_i,$$

on aura alors

$$d = \sqrt{\frac{\sum (x_i y_0 - x_0 y_i)(\overline{x_i y_0} - \overline{x_0 y_i})}{\sum x_0 \overline{x}_0 \sum y_0 \overline{y}_0}}.$$

Métrique de la droite. Trigonométrie plane. Hyperconiques. Formules différentielles.

Carmichael (*R.-D.*). — [D6*i*] On the expansion of certain analytic functions in series [Sur les développements en série de certaines fonctions analytiques] (29-35).

Soient ρ une constante positive, $g(x)$ une fonction au développement asymptotique

$$g(x) \sim x^{\mu - \rho x} e^{\alpha + \beta x}\left(1 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x_2} + \ldots\right)$$

valide dans un secteur V contenant la partie positive de l'axe réel et l'autre axe tout entier.

On suppose de plus $g(x)$ analytique en tout point de V où $|x| > \gamma$ constante donnée. Les séries

$$S(x) = \sum_0^\infty k\, c_k \frac{g(x+k)}{g(x)}$$

ont déjà été étudiées par l'auteur (*Transactions Amer. Math. Soc.* vol. 17, 1916; *Bull. Am. Math. Soc.*, vol. 23, 1917; *American Journal*, vol. 39, 1917; vol. 40, 1918). Ici il s'agit des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une fonction soit représentable par une série $S(x+a)$, où a est une constante dépendant de la fonction.

Morley (*F.-V.*). — [K'8*b*] Notes on the Cyclic quadrilateral [Notes sur le quadrilatère inscrit] (35-43).

Étude des configurations obtenues en considérant les triangles formés avec

les sommets d'un quadrilatère inscrit. Traitement analytique surtout par le calcul vectoriel.

Morley (*F.*). — [K'8*b*] Note on the preceding paper [Note sur l'article précédent] (43).

Gronwall (*T.-H.*). — [S6] Qualitative properties of the ballistic trajectory [Propriétés qualitatives de la trajectoire balistique] (44-65).

Les équations différentielles du mouvement d'un projectile rapporté à deux axes rectangulaires du plan où il se meut (on le considère comme un point) sont

$$x'' = -\mathrm{E}x', \qquad y'' = -\mathrm{E}y' - g; \qquad \mathrm{E} = \frac{\text{résistance}}{\text{vitesse}}.$$

La fonction E dépend de x, y, x', y', t. Dans le vide $\mathrm{E} = 0$ et l'intégration conduit aux relations classiques du mouvement parabolique. L'auteur remplace ces relations par des inégalités en se servant uniquement d'abord de l'hypothèse $\mathrm{E} > 0$, et trouve ensuite d'autres inégalités en admettant que E ne dépend que de y et de v, que la résistance augmente ou est stationnaire quand y croît, enfin qu'elle augmente plus rapidement que v quand v croît. Certaines de ces inégalités remontent à P. de Saint-Robert (*Torino Memorie*, 2e série, vol. 16, 1855) et Zaboudsky (*Balistique extérieure*, Saint-Pétersbourg, 1895).

Wiener (*Norbert*). — [D1*a*] The mean of a functional of arbitrary elements [Moyenne d'une fonctionnelle d'éléments arbitraires] (66-72).

Daniell a indiqué (*Annals of Math.*, vol. 19, 1918; vol. 20, 1919) comment une fois définie la notion d'intégration pour une classe restreinte de fonctions d'éléments quelconques on peut de suite l'étendre à une classe plus large. Il ne détermine toutefois pas la manière d'établir l'intégration pour la classe primitive. Cette lacune est comblée ici jusqu'à un certain point.

Trevor (*J.-E.*). — [B1] On certain determinants associated with transformations employed in thermodynamics [Sur certains déterminants associés à des transformations employées en thermodynamique] (73-85).

Un certain problème d'équilibre d'un mélange de deux fluides conduit à une règle pour le signe de certains déterminants. Généralisation.

Eisenhart (*L.-P.*). — [T1*a*] The permanent gravitational field

in the Einstein theory [Le champ gravitationel permanent dans la théorie d'Einstein] (86-94).

Sous les hypothèses suivantes l'auteur obtient les ds^2 de plusieurs auteurs (Einstein, Schwarzschild, Levi-Civita, Weyl, Kottler) :

I.

$$ds^2 = V^2\,dt^2 - ds_0^2; \qquad ds_0^2 = \sum_1^3{}_{i,k}\, a_{ik}\, dx_i\, dx_k,$$

où V et les a_{ik} sont indépendantes de t.

II. V est une solution de $\Delta_2\theta = 0$, où $\Delta_2\theta$ est le paramètre différentiel de Beltrami relatif à ds_0^2. Cette hypothèse est équivalente à $G_{44} = 0$.

III. Les surfaces $V =$ const. forment partie d'un système triplement orthogonal de l'espace des x.

IV. Leurs trajectoires orthogonales correspondent aux trajectoires des particules dans l'espace $x_1 x_2 x_3 t$.

V. La forme ds_0^2 est euclidienne en première approximation.

Zeldin (*S.-D.*). — [J4*f*] On the structure of continuous groups with a finite number of exceptional infinitesimal transformations [Sur la structure des groupes continus à nombre fini de transformations infinitésimales exceptionnelles] (95-101).

Dans sa thèse (Clark University 1917) l'auteur a discuté les conditions à imposer à un groupe à transformation exceptionnelle unique pour qu'il soit possible de simplifier certaines des constantes de structure. Même discussion ici pour le cas de plusieurs transformations exceptionnelles.

Gronwall (*T.-H.*). — [$\overline{\text{D}}$4] Conformal mapping of a family of real conics upon another [Représentation conforme d'une famille de coniques réelles sur une autre] (102-127).

Détermination de *toutes* les fonctions qui conduisent à la représentation conforme d'au moins une famille de coniques sur une autre (la famille doit dépendre d'au moins un paramètre réel).

L'auteur écrit d'abord l'équation générale des coniques en termes des variables conjuguées z, $\bar{z}$, discute la condition générale pour que deux familles à un paramètre se correspondent dans une représentation conforme et l'applique au cas particulier qu'il étudie.

Walsh (*J.-L.*). — [A3*e*] On the location of the roots of the derivative of a polynomial [Sur la location des racines de la dérivée d'un polynome] (128-144).

Quelques résultats géométriques reliés au théorème de Gauss sur la position

des racines de la dérivée d'un polynome et à ce théorème de Jensen dont l'auteur fournit la première démonstration :

Soit $f(z)$ un polynome réel. Les racines imaginaires de sa dérivée ne sont pas extérieures aux cercles ayant pour diamètres les lignes allant de chaque racine imaginaire de $f(z)$ à sa conjuguée.

Murray (*F.-H.*). — [H5$j\alpha$] The asymptotic expansion of the Sturm-Liouville functions [Développement asymptotique des fonctions de Sturm-Liouville] (145-156).

Développement détaillé de la représentation asymptotique des fonctions de Sturm-Liouville relatives au système

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + [\rho^2 - g(x)]y = 0; \qquad y(0) = y(1) = 0,$$

dont M. Birkhoff s'est servi pour démontrer directement que l'ensemble de ces fonctions est clos (*Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 3, p. 656-659). L'auteur se sert explicitement de l'équation de Volterra de deuxième espèce dont d'autres dans des questions semblables n'ont fait usage que plus ou moins implicitement.

Ritt (*J.-F.*). — [$\overline{\text{D}}$4a] On the conformal mapping of a region into a part of itself [Représentation conforme d'une région sur une partie d'elle-même] (157-161).

Extension à un domaine de connexion quelconque du théorème préliminaire relatif aux régions simplement connexes démontré par M. Julia dans son deuxième Mémoire couronné (*Journ. de Math.*, 1918). Application :

Il est impossible d'effectuer la représentation conforme d'un domaine annulaire sur un autre qui lui est intérieur.

Eisenhart (*L.-P.*). — [O'5n] Conjugate nets R and their transformations [Réseaux conjugués R et leurs transformations] (162-181).

Une congruence W est définie par la condition que les lignes asymptotiques sur les deux surfaces se correspondent. Quand les tangentes aux courbes de chaque famille d'un systéme conjugué de courbes sur une surface forment un tel système on a affaire à un réseau R. Il y a deux types de transformations d'un tel réseau en un autre, transformations W et transformations T. Celles du second type ont déjà été rencontrées ailleurs (*Transactions Am. Math. Soc.*, vol. 18, 1917).

Fry (*T.-C.*). — [C2] The application of modern theories of integration to the solution of differential equations [Application

des théories modernes d'intégration à la solution des équations différentielles] (182-211).

Méthode pour appliquer les théories modernes sur les intégrales divergentes et de Stieltjes à l'étude de certaines intégrales reliées à l'identité de Fourier. Application aux équations différentielles. Il en résulte un sens pour une grande catégorie d'intégrales nouvelles ainsi que la possibilité de l'emploi des opérations ordinaires avec elles.

Hayashi (*Tsurnichi*). — [O'2] An analytical solution of Biot's problem [Solution analytique du problème de Biot] (213-216).

Solution analytique de ce problème :

Trouver une courbe plane telle que les rayons lumineux partant d'un point fixe y retournent après deux réflexions sur la courbe. Solution incorrecte dans le *Traité d'Analyse* de Laurent, t. 5, 1890, p. 110. Première solution correcte due à M. Fujiwara (*Tohoku Math. Journal*, vol. 2, 1912, p. 149).

Whittemore (*J.-K.*). — [O'6h] Minimal surfaces containing straight lines [Surfaces minima contenant des lignes droites] (217-225).

Dans les équations d'Enneper-Weierstrass d'une surface minima réelle il entre une certaine fonction arbitraire. L'auteur la détermine de manière que la surface contienne des segments de ligne droite, ceci par deux méthodes différentes. Les surfaces obtenues ont certaines connections avec les surfaces minima doubles.

Van Vleck (*E.-B.*). — [$\overline{\mathrm{D}}\,4c\alpha$] An extension of Green's lemma to the case of a rectifiable boundary [Extension du lemme de Green au cas d'une frontière rectifiable] (226-237).

L'auteur démontre la relation

$$\int\int_{\mathrm{K}} \frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\mathrm{C}} \mathrm{P}.dy$$

sous les seules hypothèses que C est rectifiable, $\mathrm{P}(x, y)$ est continue dans K et $\dfrac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}$ y est intégrable.

Hammond (*E.-S.*). — [O'5n] Periodic conjugate nets [Réseaux conjugués périodiques] (238-262).

n fonctions de u, v, $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}$, solutions d'une équation de Laplace

$$(1)\qquad \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v} = \frac{\partial \log a}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \log b}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + cx,$$

quand on les considère comme coordonnées homogènes de point dans un espace à $n-1$ dimensions, y définissent une certaine surface. On dit que les courbes paramétriques y forment un *réseau conjugué* (conjugate net), N. Les fonctions x_1, x_{-1}

$$(2) \qquad x_1 = \frac{\partial x}{\partial v} - \frac{\partial \log a}{\partial v} x, \qquad x_{-1} = \frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial \log b}{\partial u} x$$

en définissent deux autres N_1, N^{-1} (DARBOUX, *Théorie générale des surfaces*, 2e édition, vol. 2, Chap. II), *transformés de Laplace d'ordres un et moins un de* N, etc. On a ainsi les suites $N_{-s} \ldots N \ldots N_s$. L'auteur en étudie les propriétés et en particulier les conditions pour qu'elles soient périodiques. En particulier il montre que s'il correspond à (1) une suite périodique il lui en correspond une infinité d'autres. Il étudie ensuite d'autres suites analogues, notamment une suite correspondant à une transformation définie par Lévy (*Journal de l'École Polytechnique*, vol. 56, 1886, p. 67).

Walsh (J.-L.). — [J5d] On the transformation of convex point sets [Sur la transformation des ensembles convexes] (262-266).

L'auteur démontre ceci :

1° Toute transformation ponctuelle biunivoque transformant tout ensemble convexe en un autre est une collinéation.

2° Si toute transformation circulaire du plan transforme une courbe régulière donnée en une courbe convexe, la courbe est un cercle ou un arc de cercle. Extension à l'espace ordinaire.

SALOMON LEFSCHETZ.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE.

Tome XXXVI (1919) (1).

Delassus (Étienne). — Étude de la stabilité de l'équilibre des paramètres principaux et secondaires d'un système dans le cas régulier d'intégration par quadratures (1-36).

M. Delassus trouve, pour la stabilité du paramètre principal, des conditions analogues à celles de Lagrange. Quant aux paramètres secondaires, il parvient à un type dans lequel tous les équilibres paramétriques sont stables, tandis que dans tous les autres cas, tous ces équilibres sont instables; il n'est cependant pas démontré qu'il n'arrive pas, pour des systèmes matériels correspondant à des indéterminations paramétriques, que l'équilibre correspondant de ces systèmes soit stable.

(1) Voir *Bulletin*, t. XLVI, 1922, 2e Partie, p. 41.

Pérès (Joseph). — Sur certaines transformations fonctionnelles et leur application à la théorie des fonctions permutables (37-50).

Un *corps* de fonctions permutables se compose, comme l'a montré M. Volterra, des fonctions

$$\Omega(\lambda) = \lambda(y-x) + \int_0^{y-x} \lambda(\xi)\,\Phi(\xi, x, y)\,d\xi,$$

où λ est une fonction arbitraire et Φ une fonction fixe satisfaisant à une certaine équation fonctionnelle. Φ n'est d'ailleurs pas déterminé par ces conditions pour un corps donné. M. Pérès le détermine de façon que si

$$\varphi(x, y) = \Omega(\lambda), \qquad \psi(x, y) = \Omega(\mu),$$

on ait

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{\psi}(x, y) = \Omega(\overset{*}{\lambda}\overset{*}{\mu}).$$

Il trouve d'abord la forme générale des fonctions Φ, puis représente au moyen de l'une d'elles un corps déterminé, enfin étend à l'aide de ces résultats certaines propositions de M. Volterra sur la représentation des fonctions permutables à une fonction donnée et retrouve la définition donnée par M. Volterra de $\overset{*}{f}{}^{z}$ où z est irrationnel.

Godeaux (Lucien). — Mémoire sur les involutions appartenant à une surface de genres 1 (deuxième Partie) (51-70).

La première Partie est parue dans le Tome XXXI, 1914, du même recueil. L'auteur détermine ici les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une surface de genres 1 soit l'image d'une involution appartenant à une surface de genres 1. En outre il détermine les involutions composées de deux ou plusieurs involutions n'ayant pas de point de coïncidence en commun. Ce Mémoire est encore *à suivre.*

Borel (Émile). — Sur l'intégration des fonctions non bornées, et sur les définitions constructives (71-91).

Réponse au Mémoire de M. Lebesgue paru dans le Tome précédent. M. Borel défend sa définition de l'intégrale des fonctions non bornées, et examine les questions de priorité.

Julia (Gaston). — Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes (premier Mémoire) (93-125).

M. Julia étudie la façon dont se comporte une fonction dans un angle arbitraire ayant pour sommet une singularité essentielle isolée, au point de vue notamment de la répartition des valeurs exceptionnelles. Il obtient ainsi des renseignements nouveaux sur les arguments des racines de l'équation $f(z) = a$,

quel que soit a. Ces renseignements sont valables pour les fonctions qui ont une valeur asymptotique, mais, pour les autres fonctions, on obtient d'autres résultats. La méthode consiste à étudier l'allure de la fonction quand on approche du point singulier en suivant une courbe *continue* quelconque; l'auteur se propose d'étudier plus tard l'approximation par un mode *discontinu*.

Cotton (*Émile*). — Sur la notion de nombre caractéristique de M. Liapounoff (127-185).

M. Cotton relie la notion de nombre caractéristique (borne supérieure des nombres réels λ tels que $e^{\lambda t}f(t)$ tende vers zéro quand t tend vers $+\infty$) à celle d'ordre parenthèse (p, q) de M. Borel, qui lui permet de définir aussi, par analogie, un *nombre caractéristique supérieur*. Ces notions sont encore généralisées, en introduisant des fonctions de comparaison autres que la fonction exponentielle. L'auteur en donne différentes applications, notamment à l'existence de la frontière du domaine de convergence de certaines intégrales (extension des fonctions déterminantes de Laplace), rayon de convergence d'un système de n séries de Taylor, quand on connaît un système d'équations linéaires de récurrence déterminant les coefficients de rang $i+1$ en fonction de ceux de rang i; différentes notions introduites par M. Liapounoff pour les systèmes différentiels sont étendues aux systèmes linéaires de récurrence. Enfin, M. Cotton applique les nombres caractéristiques à l'étude de systèmes de récurrence non linéaires.

Giraud (*Georges*). — Sur les fonctions automorphes d'un nombre quelconque de variables (187-233).

Ce travail traite le même sujet que les *Leçons sur les fonctions automorphes* (¹) du même auteur, mais d'une façon un peu moins complète, sauf en ce qui concerne l'influence du choix du domaine principal sur les singularités des fonctions, influence qui est ici mieux mise en lumière. Les groupes quadratiques considérés dans la seconde section de la seconde Partie ont déjà été signalés par M. Fubini dans son *Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe*.

Stoïlow (*S.*). — Sur les singularités mobiles des intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles, et sur leur intégrale générale (235-262).

Ce Mémoire concerne l'équation linéaire la plus générale d'ordre n à deux variables indépendantes, en se plaçant dans le domaine complexe. Généralisant un théorème de la Thèse de l'auteur (²), il étudie le cas où les fonctions initiales ont des singularités entièrement arbitraires, sous la seule restriction d'être holomorphes en un même point. Il donne ensuite une expression de

(¹) Voir *Bulletin*, Tome XLV, 1ᵉ Partie, p. 186.
(²) Voir *Bulletin*, Tome XLI, 1ᵉ Partie, p. 114.

l'intégrale générale, valable dans un domaine assez petit, mais indépendant des fonctions arbitraires, domaine ne contenant aucune singularité fixe, mais contenant autant de singularités mobiles que l'on veut. L'expression de cette intégrale générale contient un nombre fini ou infini de fonctions attachées à l'équation, selon que l'équation caractéristique a ou non toutes ses racines simples. Dans le cas où ces racines sont simples, l'auteur retrouve l'expression de l'intégrale générale due à M. Le Roux.

Gambier (*Bertrand*). — Sur les courbes à torsion constante (263-409) (*à suivre*).

Ce travail ne diffère que par quelques remaniements et additions de celui qui a été couronné par l'Académie des Sciences en 1916. Il contient tous les exemples déjà connus, réels ou imaginaires, de courbes algébriques à torsion constante, et une grande variété d'exemples nouveaux, de genre et de degré arbitraires.

Après une brève introduction, le Chapitre I a pour titre : Rappel de quelques résultats antérieurs. M. Gambier y rattache de plusieurs manières les courbes à torsion constante aux surfaces minima ; notamment, à toute courbe à torsion constante correspond une surface minimum inscrite à une sphère, et surface et courbe sont à la fois algébriques ou à la fois transcendantes. On peut aussi faire correspondre à ces courbes des surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution, mais l'auteur en renvoie l'étude à un Mémoire du *Bulletin de la Société mathématique*.

Chapitre II. — Étude spéciale des courbes algébriques. L'auteur est amené à exprimer que certaines intégrales abéliennes sont des fonctions algébriques, d'où une discussion analytique intéressante. Signalons, parmi les résultats, que toute courbe algébrique à torsion constante a tous ses points à l'infini sur le cercle de l'infini, et avec un plan osculateur isotrope ; si la courbe est réelle, elle est donc de degré pair et fermée.

Chapitre III. — Exemples divers de courbes algébriques, unicursales, imaginaires et réelles. Ce Chapitre contient plusieurs exemples numériques, dont le dernier montre des courbes unicursales de degré 14, avec un cône directeur des binormales de degré 8.

Chapitre IV. — Symétries, rotations ; exemples de courbes unicursales admettant un nombre arbitraire de points à l'infini ; indicatrices des torsions non unicursales.

Georges Giraud.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

Tome 172, 1er semestre 1921.

Picard (E.). — Sur certaines fonctions se rattachant à des surfaces fermées (20-23).

Cette Note résume les résultats les plus importants obtenus dans divers Mémoires de l'auteur, et dont il serait désirable d'approfondir l'étude. Il s'agit des intégrales de l'équation

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{G\dfrac{\partial V}{\partial u}-F\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-F\dfrac{\partial V}{\partial u}+E\dfrac{\partial V}{\partial v}}{\sqrt{EG-F^2}}\right)=\lambda\sqrt{EG-F^2}.V$$

qui correspond à un problème d'équilibre calorifique sur une surface fermée ($ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$). Il y a une infinité de valeurs *singulières* de λ pour lesquelles il existe des intégrales uniformes et partout continues sur la surface; pour la sphère, ce sont les fonctions Y_n de Laplace; l'auteur examine aussi le cas du tore. Si λ n'a pas une valeur singulière, il existe une solution uniforme sur la surface ayant un infini logarithmique en un seul point.

Angelesco. — Sur certaines équations différentielles linéaires complètement intégrables (40-41).

L'auteur donne l'intégrale générale de l'équation

$$\sum_{i=0}^{i=q}(-1)^i\,\frac{(p-i)(p-i-1)\ldots(p-q+1)}{1.2\ldots(q-i)}\,\frac{d^{q-i}Q}{dx^{q-i}}\,\frac{d^iy}{dx^i}=0,$$

où Q est un polynome de degré q et p un nombre quelconque supérieur à q.

Petot (A.). — Sur les chocs dans les engrenages de changement de vitesses des automobiles (42-44).

En négligeant les frottements, l'auteur obtient les formules qui donnent, de proche en proche, les valeurs des percussions dans les trains d'engrenages. Il en fait l'application aux engrenages à développante de cercle utilisés dans les boîtes de vitesses des automobiles.

Liénard. — Potentiels scalaires et vecteurs dus au mouvement de charges électriques (51-54).

L'auteur indique l'origine de la divergence entre les formules données par

lui et celles obtenues par M. Anderson : celui-ci a admis implicitement une hypothèse qui n'est pas vérifiée en général.

Guichard (*C.*). — Sur les couples de deux congruences O_1, polaires réciproques par rapport à un complexe linéaire (141-143).

En appelant O_1 la congruence formée par les tangentes à la première série des lignes de courbure d'une surface, l'auteur ramène la recherche des couples de l'énoncé à celle d'une congruence plane dont les réseaux focaux sont des réseaux 2O; ce dernier problème se résout facilement si l'on connaît deux surfaces à courbure totale constante rapportées à leurs lignes asymptotiques.

Varopoulos (*Th.*). — Sur les fonctions ayant un nombre fini ou infini de branches (144-146).

L'auteur démontre qu'une transcendante algébroïde $u = \varphi(z)$, à ν branches, satisfaisant à l'équation

$$u^{\nu} + A_1(z)\,u^{\nu-1} + \ldots + A_{\nu-1}(z)\,u + A_{\nu}(z) = 0$$

(où les $A_i(z)$ sont des fonctions entières linéairement indépendantes), prend dans le domaine de l'infini toutes les valeurs, sauf peut-être $\nu+1$, l'infini compris. Ce théorème s'étend à des fonctions plus générales; on en tire aussi des conséquences intéressantes pour la fonction inverse $z = \Psi(u)$.

Villat (*H.*). — Sur l'écoulement initial d'un liquide par un orifice brusquement ouvert (148-150).

Dans un article du *Bulletin des Sciences mathématiques* (1920), M. Vergne a montré, sur un cas particulier, que, lors de l'ouverture brusque d'un orifice dans un vase contenant un liquide au repos, tout le débit est fourni, au début de l'écoulement, par les bords de l'orifice.

L'auteur discute ici le problème d'une manière générale, au moyen des formules qu'il a données antérieurement, et précise les conditions sous lesquelles ce résultat reste exact.

Gouy (*G.*). — Sur un théorème d'optique géométrique et son application aux systèmes de prismes (196-201).

Dans les systèmes optiques on trouve d'ordinaire aisément la marche des rayons et des ondes pour un certain faisceau privilégié; le problème est plus difficile pour les autres faisceaux; l'auteur indique une construction très simple pour déduire de la connaissance du faisceau privilégié les propriétés d'un faisceau peu différent.

Andrade (*J.*). — Les déplacements élastiques transverses du

centre de gravité du spiral cylindrique et des doublets (202-205).

Les formules données à ce sujet par Caspari sont inexactes, sans cependant compromettre les résultats essentiels de son Mémoire; l'auteur établit ici les formules rectifiées, donnant les coordonnées du centre de gravité.

Fubini (*G.*). — Sur les fonctions automorphes (265).

L'auteur indique que l'énoncé de son théorème, qui a été justement critiqué par M. Giraud (*voir* t. 171, 1920, p. 1365), doit être en effet complété par une condition qui est supposée implicitement remplie dans la démonstration, et qui a été omise par distraction.

Varopoulos (*Th.*). — Sur une classe de fonctions multiformes (265-267).

Soit la fonction $u = \varphi(z)$ tirée de l'équation

$$A_0(z) + A_1(z)\,u + \ldots + A_n(z)\,u^n + \ldots = 0$$

où $A_1, \ldots, A_n, \ldots$ sont des fonctions entières en nombre infini; l'auteur étend à ces fonctions quelques propriétés indiquées dans des Notes antérieures (t. 171, p. 991, 1200 et 1368). Il démontre en particulier que, sous certaines conditions, le nombre total de valeurs exceptionnelles de $\varphi(z)$ ne surpasse jamais $(\nu + 2)$, l'infini compris.

Véronnet (*A.*). — Variation d'une trajectoire conique sous l'action d'une résistance de milieu (267-269).

La variation du grand axe est toujours de même sens que celle de la vitesse v; l'excentricité d'une orbite elliptique ne varie pas si la résistance est proportionnelle à v, ou inverse de la distance d; elle tend vers celle d'un cercle si la résistance est proportionnelle à une puissance de v ou de $\frac{1}{d}$ supérieure à l'unité; dans le cas contraire l'excentricité augmente. La variation de la longitude du périhélie est proportionnelle à e^3.

Birkeland (*R.*). — Résolution de l'équation algébrique générale par des fonctions hypergéométriques de plusieurs variables (309-311).

Dans une Note antérieure (t. 171, p. 1370), l'auteur a établi que les racines d'une équation algébrique de degré n peuvent s'exprimer par une somme de fonctions hypergéométriques de $(n-1)$ variables; il précise ici ce résultat en indiquant la manière de conduire le calcul pour former effectivement ces fonctions.

Jouguet (*E.*). — Sur le cas de Poincaré dans la théorie de l'élasticité (311-314).

Voigt et Duhem ont étudié les propriétés thermodynamiques des solides élastiques, en utilisant les formules de Poincaré pour les déformations à partir d'un état initial où les tensions ne sont pas toutes nulles; mais ils ont supposé que ces tensions étaient petites.

L'auteur veut s'affranchir de ces restrictions en supposant l'état initial quelconque mais homogène, et la déformation infiniment petite et pure; il obtient ainsi des formules qui généralisent celles de nombreux auteurs.

Lecornu (*L.*). — Sur le mouvement varié des fluides (350-353).

Dans le mouvement non permanent d'un fluide, on peut à chaque instant considérer : la trajectoire (C_1) d'une molécule, la file de molécules (C_2) et la ligne de courant (C_3) qui passent en un point A. L'étude de la position relative de ces courbes au voisinage de A donne d'intéressants renseignements sur les accélérations et permet de mettre en évidence un système de variables indépendantes plus commodes que celles de Lagrange.

Giraud (*G.*). — Sur les fonctions automorphes (354-355).

L'auteur donne quelques précisions sur le différend qui s'est élevé entre M. Fubini et lui (*voir* ci-dessus).

Varopoulos (*Th.*). — Sur quelques points de la théorie des nombres (355-356).

Soit un polynome $\varphi(x)$, à coefficients non tous algébriques; appelons (E) l'ensemble des valeurs algébriques de x pour lesquelles $\varphi(x)$ est un nombre algébrique; (E') celui pour lequel $\varphi(x)$ est de la forme Ae^{α}, (A, α, algébriques); parmi ces derniers nombres, ceux pour lesquels le quotient $\varphi(x_1) : \varphi(x_2)$ est algébrique seront dits équivalents; soit (E_1) l'ensemble des valeurs de (E') non équivalentes; l'auteur démontre que l'ensemble (E), (E_1) ne surpasse pas n; le nombre des valeurs équivalentes ne surpasse pas ($n-1$).

Axel Egnell. — Sur la détermination des congruences de droites dont le plan moyen est donné (356-359).

Le problème revient à trouver, dans un plan tangent (Π) à une surface (S), un point P qui soit centre de la congruence sur la droite D passant par P et perpendiculaire à (Π). En désignant par H et K les courbures moyenne et totale de (S), par E, F, G les coefficients de Gauss, la détermination de P dépend de celle de α et β par l'équation

$$\frac{\partial}{\partial u}(\alpha K \omega) + \frac{\partial}{\partial v}(\beta K \omega) + H\omega = 0, \qquad \omega = \sqrt{EG - F^2}.$$

On peut se donner α ou β; l'auteur en tire de nombreuses conséquences.

Villat (*H.*). — Sur les mouvements cycliques d'un fluide limité par un mur et contenant un solide (359-361).

Soit D un domaine plan illimité, compris entre un solide S et un mur plan ou courbe R; un courant fluide, provenant de l'infini, occupe ce domaine. L'étude des mouvements se fait par une représentation de D sur une couronne plane, suivant une méthode générale due à l'auteur; par exemple, dans le cas où le profil de S est circulaire et R rectiligne, la pression s'obtient par une intégrale définie d'une fonction elliptique; l'auteur en donne l'expression sous forme finie, bien qu'on ne puisse obtenir l'intégrale indéfinie.

Ravigneaux (*P.*). — Méthode graphique pour l'étude des trains épicycloïdaux (361-363).

On peut représenter trois membres quelconques P, Q, R d'un train épicycloïdal par trois points figuratifs, sur une même droite, et tels que chacun d'eux divise le segment limité par les deux autres proportionnellement aux vitesses que possèdent les membres correspondants quand le troisième est fixe.

L'auteur a basé sur ce principe une représentation graphique qui met en évidence les vitesses des divers membres et facilite l'étude de ces systèmes.

Gambier (*B.*). — Sur les systèmes articulés déformables ou transformables (363-366).

Soit un mécanisme à $m+p$ nœuds d'articulation, formé par mp tiges qui relient m points A_i à p points B_j. Moyennant certaines conditions de compatibilité évidentes, on peut former, avec les mêmes tiges, plusieurs mécanismes différents, dits *transformables*, ou même une infinité dépendant d'un paramètre arbitraire (systèmes *déformables*). Imaginons que m et p grandissent indéfiniment, les points A et B étant répartis sur deux courbes ou surfaces (A) et (B); il existe alors un seul mécanisme transformable, non déformable : il se compose de deux quadriques. Pour qu'un mécanisme soit déformable, il faut et il suffit qu'il comprenne comme première courbe une conique ou une droite, ou bien qu'il se compose de deux courbes situées dans deux plans rectangulaires.

Gouy (*G.*). — Sur l'aplanétisme et la condition des sinus (419-423).

Les diverses démonstrations données depuis Abbe montrent que la condition des sinus est nécessaire pour l'aplanétisme, mais ne prouvent pas qu'elle soit suffisante; l'auteur en donne une démonstration correcte, en utilisant les résultats de sa Note précédente (*voir* ci-dessus).

Guichard (*C.*). — Sur certains réseaux qui se présentent dans

l'étude des congruences qui appartiennent à un complexe linéaire (423-425).

L'auteur poursuit l'étude des congruences commencée dans sa Note précédente (*voir* ci-dessus); il obtient en particulier les résultats suivants :

Pour que les plans osculateurs aux lignes de courbure d'une surface se coupent suivant une horizontale, il faut et il suffit que la représentation sphérique de ces lignes soit la même que celle d'un hélicoïde d'axe vertical. Pour que ces droites d'intersection appartiennent au complexe, il faut et il suffit que le réseau O formé par les lignes de courbure soit harmonique à une congruence C du complexe.

Sparre (*de*). — Calcul du coup de bélier dans une conduite alimentant une turbine à forte réaction (425-427).

Dans une Note antérieure (t. 171, 1920), l'auteur a montré que, dans les conditions indiquées et pour une loi de fermeture donnée, le coup de bélier peut dépasser de beaucoup celui qui se produirait si la turbine était sans réaction; il donne ici les formules permettant de calculer effectivement le coup de bélier maximum.

Wavre (*R.*). — Sur une équation de Fredholm dans le domaine complexe et son application à la théorie des systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues (432-434).

Soit l'équation

$$\varphi(x) = \frac{\lambda}{2\pi i}\int_\Gamma \varphi(z)\,\mathrm{N}\left(x, \frac{1}{z}\right)\frac{dz}{z} + f(x).$$

Sous certaines hypothèses, en posant

$$\mathrm{N} = \Sigma\Sigma a_{pn}\frac{x^p}{z^n}, \qquad f(x) = \Sigma c_n x^n$$

et en prenant pour Γ un cercle de centre O, les coefficients de la série de Taylor pour $\varphi(x)$ seront les solutions du système

$$x_p - \lambda\Sigma a_{pn}x_n = c_p.$$

L'auteur en déduit quelques propriétés des solutions de ce système (les sommes s'étendent de zéro à l'infini).

Delaunay (*B.*). — Résolution de l'équation indéterminée

$$q\mathrm{X}^3 - p\mathrm{X}^2\mathrm{Y} + n\mathrm{X}\mathrm{Y}^2 + \mathrm{Y}^3 = 1$$

(434-436).

Soient α la racine réelle de l'équation $\alpha^3 = n\alpha^2 + p\alpha + q$, et $\varepsilon_0 = a\alpha^2 + b\alpha + c$ l'unité fondamentale de l'anneau $\mathrm{O}(\alpha)$, laquelle se calcule par la méthode de

Voronoï; on peut faire en sorte qu'il n'existe pas de nombre λ tel que a soit divisible par λ^2 et b par λ. Les solutions (X, Y) cherchées sont les puissances entières ε_0'''' ou ε_0''' qui sont de la forme $P\alpha + Q$. L'auteur montre que ces puissances ne peuvent exister si a et b ont un diviseur premier impair; il en tire quelques remarques qui abrègent les calculs.

Bouligand (*G.*). — Sur certains modes de détermination des solutions de $\Delta u = \omega^2 u$ (437-439).

Soit un domaine D, de frontière S non singulière à distance finie, et possédant un nombre limité de branches infinies de genre fini; l'auteur indique une condition générale pour qu'une solution analytique dans D et nulle sur S soit nulle en tout point de D; les hypothèses qu'on pourrait faire sur la nature des points à l'infini de D ne permettent guère de préciser davantage les résultats du cas général, lorsque $\omega \neq 0$, ainsi qu'on le voit sur divers exemples; il en va tout autrement pour l'équation de Laplace.

Humbert (*G.*). — Sur les formes d'Hermite ternaires dans un corps quadratique imaginaire (champs $\sqrt{-1}$ et $\sqrt{-2}$) (497-511).

Soit la forme d'Hermite

$$f(x, y, z) = axx_0 + b_0''xy_0 + b''x_0y + a'yy_0 + b_0yz_0 \\ + bzy_0 + a''zz_0 + b_0'zx_0 + b'z_0x,$$

où a, a', a'' sont des entiers réels, b, b_0, ..., x, x_0, ... des entiers conjugués du corps quadratique $\sqrt{-1}$ ou $\sqrt{-2}$; l'auteur rappelle d'abord les définitions essentielles qui interviennent dans la théorie des formes; soient D le déterminant de la forme et Δ le plus grand commun diviseur des coefficients de l'adjointe ($D = \Omega^2\Delta$); dans le champ $\sqrt{-1}$, il obtient l'expression de la mesure du nombre des représentations, propres ou non, d'un nombre positif, premier à $2\Omega\Delta$, par les formes proprement primitives de l'ordre (Ω, Δ). Dans le cas où $\Delta\Omega$ est impair, l'application à la forme $xx_0 + yy_0 + zz_0$ donne le nombre de décompositions d'un nombre impair en une somme de 6 carrés; si $\Delta\Omega$ est pair, on obtient un grand nombre de résultats énoncés par Liouville. L'auteur fait la même étude pour le champ $\sqrt{-2}$, qui donne lieu à de nombreuses applications.

Cerf (*G.*). — Sur certains systèmes d'équations de Pfaff et les transformations des équations aux dérivées partielles (518-520).

L'auteur expose les premiers éléments de la généralisation au troisième ordre des méthodes employées par M. Goursat dans l'étude des transformations des équations du second ordre, par le moyen des systèmes de Pfaff.

Riabouchinski (D.). — Mouvement initial d'un liquide en contact avec un obstacle à arêtes vives (521-522).

On suppose le problème plan et le liquide incompressible; on met en mouvement brusque un obstacle limité par un arc de cercle concave et un segment rectiligne normal au courant relatif; il apparaît une cavitation derrière l'obstacle et l'auteur donne l'équation de la courbe de décollement.

Lippmann (G.). — Détermination de l'axe de rotation, de la vitesse de rotation d'un corps solide et réalisation d'un solide sans rotation (557-561).

Étant donné un corps isolé dans l'espace, le calcul de la gravité, fait en trois endroits différents, permet de mettre en évidence, sans repère extérieur, la position de l'axe et la vitesse de rotation du corps : on peut alors facilement construire un mécanisme permettant de donner à un solide une vitesse de rotation nulle.

Sparre (de). — Sur le rendement maximum des turbines (561-564).

Le calcul montre qu'il n'est pas toujours avantageux de se placer dans les conditions de rendement maximum, lequel ne s'obtient qu'au détriment de la vitesse de la turbine : dans les turbines à réaction, un sacrifice de 1 à 2 pour 100 sur le rendement fait gagner 11 à 25 pour 100 sur la vitesse.

Julia (G.). — Variation de la fonction qui fournit la représentation conforme d'une aire sur un cercle, lorsque le contour de l'aire varie (568-570).

Soit C le contour de l'aire, qui est une courbe analytique fermée, A un point intérieur; la transformation $Z = f_A(z)$ change C en un cercle; on considère la variation de $f_A(B)$ pour une variation du contour définie par un déplacement normal δ_n en chaque point, l'auteur établit l'équation aux dérivées fonctionnelles à laquelle satisfait $f_A(B)$.

Gambier (B.). — Systèmes articulés déformables et couples de surfaces qui s'en déduisent (570-573).

L'auteur termine l'énumération des systèmes déformables composés de deux courbes, commencée à la fin de sa Note précédente (*voir* ci-dessus); le problème présente de grandes analogies avec la recherche de deux surfaces S et S_1 admettant deux familles conjuguées formées de courbes de contact de cylindres et de cônes, et applicables l'une sur l'autre. On voit, en passant, comment on peut déduire, de la résolution de l'équation générale du troisième degré, une famille de surfaces S et S_1 algébriques.

Picard (*E.*). — Sur la détermination de l'axe de rotation et de la vitesse de rotation d'un corps solide (629-630).

L'auteur montre que le problème traité par M. Lippmann (*voir* ci-dessus) peut être résolu par l'utilisation de n'importe quel phénomène où intervient la rotation : gyroscope, pendule de Foucault, etc.

Gouy (*G.*). — Sur l'aplanétisme imparfait et le calcul du coma (632-636).

L'étude préalable de l'aberration suivant l'axe permet de calculer les aberrations au voisinage de l'axe d'un instrument d'optique; l'auteur en donne ici la solution en utilisant les résultats indiqués dans ses deux précédentes Notes (*voir* ci-dessus).

Dikson (*L.-E.*). — La composition des polynomes (636-640).

Considérons les triples de polynomes homogènes à n variables, f, Φ, F, qui admettent un théorème de composition $f(x)\,\Phi(\xi) = F(X)$, où $X_1, \ldots, X_n$ sont des fonctions bilinéaires de $x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n$. Pour les déterminer, on est ramené à trouver ceux qui ont un théorème de multiplication

$$f(x)\,f(\xi) = f(X),$$

qui ont déjà été étudiés par l'auteur; il fait le calcul pour $n = 3$.

Rémoundos (*G.-J.*). — Sur les couples de fonctions algébroïdes d'une variable correspondant aux points d'une courbe algébrique de genre supérieur à l'unité (645-646).

Soit $f(x, y) = 0$ la courbe; l'auteur généralise un théorème de M. E. Picard en démontrant que si, dans cette équation, on remplace x par une fonction $a(z)$, algébroïde dans le voisinage de $z = 0$, on en tire une autre fonction $y = b(z)$ algébroïde dans le voisinage de $z = 0$. L'une des fonctions a et b admet au moins un point singulier, autre que l'origine, dans un certain cercle de centre O.

Traynard (*C.-E.*). — Sur les fonctions hyperelliptiques singulières (647-649).

Toute relation singulière, de diviseur n, d'invariant Δ et de type k, entre les périodes d'une fonction abélienne, est équivalente à la relation réduite

$$ng + kh - mg' = 0, \qquad \Delta = k^2 + 4mn.$$

L'auteur applique les méthodes de G. Humbert à l'étude des fonctions intermédiaires relatives à ces relations et en déduit quelques applications aux surfaces hyperelliptiques singulières.

Abramesco (*N.*). — Sur les développements en série suivant les inverses de polynomes donnés (649-651).

Soient $\varphi(z)$ une fonction régulière à l'intérieur du cercle de centre O et de rayon R, et $Q_n(z)$ une suite de polynomes dont toutes les racines sont extérieures au cercle; l'auteur forme un cercle à l'intérieur duquel le développement $\varphi(z) = \sum \frac{B_n z^n}{Q_n(z)}$ est certainement valable; si la fonction est régulière dans une couronne, on peut obtenir un développement analogue valable dans une couronne.

Varopoulos (*Th.*). — Sur quelques points de la théorie des fonctions et de la théorie des nombres (651-653).

Soit $F(z, x)$ un polynome de degré n en x, dont les coefficients $A_i(z)$ sont des fonctions entières d'ordre au plus égal à ρ; x_0 sera *exceptionnel* si

$$F(z, x_0) = P_0(z) + Q_0(z)\, e^{H_0(z)},$$

H_0, P_0, Q_0 désignant des polynomes, le premier de degré $\leqq \rho$. Soient (E_1) l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles $F(z, x)$ est un polynome, (E_2) celui pour lesquelles aucune des différences $H_i(z) - H_j(z)$ n'est constante : l'auteur démontre que l'ensemble (E_1), (E_2) ne surpasse jamais $(n+1)$; il en tire une application à une catégorie d'équations algébriques.

Denjoy (*A.*). — Sur un calcul de totalisation à deux degrés (653-655).

Dans un Mémoire antérieur, l'auteur a introduit les notions de *fonction continue résoluble* et de *fonction totalisable*, la seconde étant la *dérivée approximative* de la première. Il définit ici une opération de totalisation symétrique à 2 degrés (T_2, s), sorte d'intégration à trois limites, dont il étudie quelques propriétés.

Carleman (*T.*). — Sur une classe d'équations intégrales à noyau asymétrique (655-658).

L'auteur étudie les noyaux satisfaisant à la condition

$$\int_a^b k(x, t)\, k(y, t)\, dt = \int_a^b k(t, x)\, k(t, y)\, dt.$$

Toutes les fonctions principales de $k(x, y)$ sont alors des fonctions fondamentales et les pôles de la résolvante sont tous simples; beaucoup de propriétés des noyaux symétriques s'étendent au cas actuel.

Mellin (*H.*). — Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma (658-661).

Toute équation algébrique peut se ramener à la forme

$$z^n + x_1 z^{n_1} + \ldots + x_p z^{n_p} - 1 = 0,$$

où les exposants sont des entiers positifs décroissants. L'équation est résolue dès que l'on connaît la *solution principale*, qui se réduit à l'unité pour

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_p = 0.$$

L'auteur a publié en 1915 des formules qui donnent cette solution au moyen d'intégrales multiples portant sur des fonctions Γ; elles peuvent aussi s'exprimer par des séries hypergéométriques et se relient ainsi aux résultats de M. Birkeland.

Walsh (J.-L.). — Sur la position des racines des dérivées d'un polynome (662-664).

Soit $f(z)$ un polynome qui a toutes ses racines à l'intérieur de l'un ou l'autre de deux cercles C_1 et C_2; l'auteur construit m cercles qui contiendront toutes les racines d'une dérivée déterminée $f^{(k)}_{(z)}$.

Julia (G.). — Deux conséquences de l'équation aux dérivées fonctionnelles qu'on tire de la représentation conforme (738-741).

La fonction $f_A(B)$, étudiée par l'auteur dans sa dernière Note (*voir* ci-dessus), peut s'écrire sous la forme $g(A, B) + i\gamma(A, B)$; γ est une fonction harmonique de B, conjuguée de g relativement à B. L'auteur tire d'abord, de l'équation aux dérivées fonctionnelles, relative à $f_A(B)$, une équation qui donne la variation de γ; il montre ensuite qu'on peut en déduire deux solutions conjuguées de l'équation de M. Hadamard

$$\delta\Phi(U, V) = \int_C \Phi(U, M)\,\Phi(M, V)\,\delta n\,ds.$$

Valiron (G.). — Sur les zéros des fonctions entières d'ordre infini (741-744).

Soient $F(z)$ une fonction entière d'ordre infini $\mu(R)$, et K_1 un nombre fixe supérieur à l'unité; l'auteur démontre qu'il existe au moins un angle, d'ouverture donnée, tel que l'ordre des zéros de $F(z) - a$ qui lui sont intérieurs, ne puisse être inférieur à $\mu\left(\frac{R}{K_1}\right)$ que pour une seule valeur de a.

Hamy (M.). — Sur l'approximation des fonctions de grands nombres (785-790).

L'auteur résume ses recherches sur les intégrales de la forme

$$\int f(z)\, e^{\pm inz}\, dz,$$

où n désigne un nombre positif élevé; moyennant des hypothèses très géné-

rales sur $f(z)$ et sur le contour, il donne un développement asymptotique de ces intégrales, dont les termes s'expriment très simplement au moyen d'exponentielles et de la fonction Γ.

Traynard (*C.-E.*). — Sur certaines surfaces hyperelliptiques singulières (797-798).

Comme suite à sa Note précédente (*voir* ci-dessus), l'auteur indique quelques exemples de surfaces hyperelliptiques singulières, ayant des droites, des points doubles, des sections coniques, etc., et qui correspondent aux cas où Δ a pour valeur 12, 8 et 9.

Le Rolland (*P.*). — Sur le mouvement du pendule à suspension élastique (800-802).

L'auteur étudie le phénomène au moyen des formules de l'élasticité : les conséquences auxquelles on aboutit ainsi ne sont pas d'accord avec les expériences auxquelles il a procédé lui-même.

Gouy (*G.*). — Sur le calcul du coma (827-828).

Pour compléter sa Note précédente (*voir* ci-dessus), l'auteur montre que la correction qu'il faut apporter à l'expression du coma, quand l'aberration suivant l'axe n'est pas nulle, est négligeable.

Julia (*G.*). — Sur une équation aux dérivées fonctionnelles analogue à l'équation de M. Hadamard (831-833).

Au moyen de diverses transformations, l'auteur montre que l'équation à laquelle satisfait la fonction $f_A(B)$ (*voir* ci-dessus deux Notes du même auteur) peut se ramener à l'équation de M. Hadamard, ce qui explique les analogies constatées dans la deuxième Note.

Denjoy (*A.*). — Sur la détermination des fonctions présentant certain caractère complexe de résolubilité (833-835).

En adoptant la terminologie exposée dans sa dernière Note (*voir* ci-dessus), l'auteur démontre que si deux fonctions résolubles (2, s) admettent sur une épaisseur pleine la même dérivée seconde ordinaire-approximative, leur différence est linéaire.

Varopoulos (*Th.*). — Le théorème de M. Landau et les fonctions multiformes (835-838).

L'auteur utilise le théorème de M. Landau pour l'étude des fonctions $U = \varphi(x$ définies par l'équation

$$A_0(x) + A_1(x)\,U + \ldots + A_{n-1}(x)\,U^{n-1} + P(x, U) = 0,$$

avec la seule hypothèse : $P(x, 0) = P(x, 1)$. Il montre ainsi, sous certaines conditions, l'existence d'un cercle à l'intérieur duquel la fonction $\varphi(x)$ prend au moins une fois l'une des valeurs 0 ou 1.

Carlson (*F.*). — Sur les séries de Dirichlet (838-840).

Soit la série $f(s) = \Sigma a_n e^{-\lambda_n s}$, où les quantités λ_n croissent indéfiniment; supposons la sommable en un point fini s et d'un ordre fini; supposons enfin $f(s)$ régulière et bornée pour $\sigma > 0$. L'auteur montre alors, en posant $|f(s)| \leq M$, qu'on a $\Sigma |a_n|^2 \leq M^2$ et $|a_1| + \ldots + |a_n| = M\sqrt{n}$; il indique en outre une égalité portant sur deux séries analogues, qui complète le théorème de la moyenne de M. Hadamard.

Appell (*P.*). — Sur le mouvement périodique d'un fluide (885-886).

Dans ce mouvement, les quantités u, v, w, p, ρ (notations d'Euler) sont développables en série de Fourier et l'auteur montre qu'on peut ainsi étudier simplement ces mouvements; il donne en particulier la relation qui remplace ici le théorème de Bernoulli.

Sparre (*de*). — Sur le maximum de rendement des turbines à libre déviation (896-899).

L'auteur répète les calculs de sa Note précédente (*voir* ci-dessus), mais pour les turbines à libre déviation; les résultats sont très différents : il n'y a ici aucun intérêt à faire de sacrifice sur le rendement en vue d'augmenter la vitesse de la turbine.

Humbert (*P.*). — Les polynomes $\mathfrak{P}$ d'Hermite-Didon et les fonctions de Laplace dans l'hyperespace (901-903).

L'auteur applique la méthode de changement de variables qu'il a indiquée dans des Notes antérieures (t. 171, 1920, p. 1116), pour obtenir, dans l'hyperespace, des fonctions de Laplace qui s'expriment au moyen des polynomes d'Hermite généralisés par Didon.

Denjoy (*A.*). — Caractère de certaines fonctions intégrables et opérations correspondantes (903-906).

L'auteur poursuit sa théorie des opérations, qui généralisent celles de dérivation et d'intégration, commencée dans ses deux Notes précédentes (*voir* ci-dessus). Il précise les caractères des fonctions intégrables $T_{2,s}$ ainsi que le calcul effectif des intégrales.

Boussinesq (*J.*). — Aplatissement suivant l'axe polaire, par la

tension superficielle, d'une goutte liquide, de révolution et sans pesanteur, possédant une vitesse angulaire donnée ω de rotation autour de cet axe (941-946).

On peut calculer la forme de la méridienne et l'on en déduit, en particulier, le rayon de courbure au pôle et à l'équateur.

Gambier (*B.*). — Courbes algébriques non unicursales à torsion constante (953-956).

Le problème revient à tracer sur une sphère une courbe algébrique le long de laquelle trois certaines intégrales sont algébriques; le calcul est en général compliqué: l'auteur indique un procédé de récurrence qui permet de le simplifier et qui donne même la solution complète dans certains cas.

Guichard (*C.*). — Sur les systèmes triplement indéterminés de droites et leurs conjugués par rapport à un complexe linéaire (1005-1009).

Soient D une droite qui dépend de trois paramètres et qui décrit une développable lorsque chaque paramètre varie seul; soit Δ sa conjuguée par rapport à un complexe linéaire. L'auteur étudie les conditions pour que le système D, Δ soit identique au complexe.

Boussinesq (*J.*). — Rectification et complément à une Note du 18 avril sur l'aplatissement d'une goutte liquide animée de rotation (1085-1086).

Bonnesen (*T.*). — Sur une amélioration de l'inégalité isopérimétrique du cercle et la démonstration d'une inégalité de Minkowski (1087-1089).

Soit une courbe (C), simple, fermée, convexe, de périmètre p et d'aire f; soient R le rayon du plus petit cercle enfermant (C) et r le rayon du plus grand cercle contenu dans (C); l'auteur démontre la formule : $\frac{p^2}{4\pi} - f \leqq \frac{\pi}{4}(\mathrm{R} - r)^2$. Il en déduit une formule analogue pour les intégrales de contour des surfaces fermées convexes : dans le cas de la sphère on a l'inégalité de Minkowski.

Alayrac. — Mouvement du centre de gravité d'un solide symétrique par rapport à un plan vertical se déplaçant dans un milieu résistant (1089-1092).

Ce problème est celui d'un avion à commandes bloquées; l'auteur étudie le

mouvement du centre de gravité et classe les divers types de trajectoires; il en déduit les conditions de stabilité du mouvement rectiligne.

Vaney (*F.*). — Sur les polynomes de Laguerre (1151-1153).

L'auteur étudie les propriétés des polynomes $P_n(a, x)$ définis par

$$\frac{1}{1-ah} e^{\frac{hx}{1-ah}} = \sum_{n=0}^{\infty} h^n P_n(a, x);$$

ils satisfont à des identités diverses; ils appartiennent d'ailleurs à une classe de polynomes étudiée par M. Appell et se réduisent à ceux de Laguerre pour $a = 1$.

Angelesco (*A.*). — Sur une représentation des polynomes par des intégrales (1153-1155).

Soient $K(u)$ une fonction de signe constant pour $a \leq u \leq b$, $P_n(x)$ et $\Pi_n(u)$ deux polynomes de degré n vérifiant

$$P_n(x) = \int_a^b K(u)(x-u)^n \Pi_n(u)\, du;$$

l'identification permet de calculer les coefficients de Π_n en fonction de ceux de P_n. L'auteur montre que si l'équation $P_n(x) = 0$ a p racines réelles et distinctes entre a et b, l'équation $\Pi_n(x) = 0$ aura p racines réelles dans cet intervalle. Ces polynomes Π possèdent d'autres propriétés, en rapport avec les polynomes orthogonaux et ceux de M. Appell.

Birkeland (*R.*). — Sur la convergence des développements qui expriment les racines de l'équation algébrique générale par une somme de fonctions hypergéométriques de plusieurs variables (1155-1158).

L'auteur généralise les développements donnés dans une Note antérieure (t. 171, 1920, p. 1370) et indique des conditions suffisantes de convergence qui évitent d'avoir recours aux règles de M. Horn.

Gambier (*B.*). — Courbes algébriques réelles, non unicursales, à torsion constante (1158-1161).

Les courbes obtenues par l'auteur sont de degré et de genre arbitrairement grands et correspondent birationnellement aux courbes planes :

$$y^n(1+ax)^m = x^m + a$$

Denjoy (*A.*). — Calcul des coefficients d'une série trigonomé-

trique convergente quelconque dont la somme est donnée (1218-1221).

Poursuivant l'étude des opérations de dérivation et d'intégration généralisées, commencée dans ses Notes précédentes (*voir* ci-dessus), l'auteur démontre que si $F(\theta)$ possède une dérivée seconde généralisée $f(\theta)$, elle est résoluble (2. s) et a pour dérivée seconde ordinaire-approximative $f(\theta)$; il en déduit le calcul des coefficients d'une série trigonométrique de somme $f(\theta)$.

Dumas (*G.*). — Sur les contours d'encadrement (1221-1223).

L'auteur indique un procédé pour obtenir ces contours, qui transforment une surface de Riemann fermée quelconque en une surface simplement connexe. Sa méthode repose sur la transformation préalable de la sûrface en un polyèdre.

Bratu. — Sur les séries dont le terme général tend vers zéro (1223-1226).

Représentons le terme général u_n par son affixe M_n dans un plan d'origine O, et faisons la somme des vecteurs $\overline{OM_1} + \overline{OM_2} + \ldots + \overline{OM_n} = \overline{OS_n}$.

L'auteur étudie l'ensemble (E) formé par les points S_n; si u_n tend vers zéro, l'ensemble dérivé (E') est, ou bien composé d'un seul élément (série convergente si cet élément est à distance finie), ou bien a la puissance du continu.

Valiron (*G.*). — Sur les fonctions entières d'ordre fini (1226-1227).

Soient : une telle fonction $f(z) = \Sigma c_n z^n$, d'ordre ρ, r_n le module du $n^{\text{ième}}$ zéro, $M(r)$ le maximum du module de f pour $|z| = r$ et R_n le rapport rectifié de $|c_n|$ à $|c_{n-1}|$. Si ρ n'est pas entier, les séries $\sum \frac{1}{R_n^\rho}$, $\sum \frac{1}{r_n^\rho}$ et l'intégrale

$$\int_\alpha^\infty \frac{\log M(x)}{x^{\rho+1}}\,dx$$

convergent, ou non, en même temps; ce résultat subsiste, sauf pour la deuxième série dans le cas de divergence, si ρ est entier.

Le Roux (*J.*). — Sur la théorie de la relativité et le mouvement séculaire du périhélie de Mercure (1227-1230).

L'auteur donne une intégration simple des équations d'Einstein, pour le cas du champ de gravitation engendré par une particule; il remarque que la relativité elle-même n'intervient en rien dans cette question où d'ailleurs le temps n'est pas la même chose qu'en mécanique ordinaire. La loi de gravitation qui explique l'anomalie de Mercure a donc été obtenue à propos de la théorie de la relativité, mais n'en est pas une conséquence.

Guichard (*C.*). — Sur les systèmes 31 dont toutes les droites appartiennent à un complexe linéaire (1275-1277).

La détermination de ces systèmes revient à celle d'un point M qui décrit un système triple orthogonal connu.

Julia (*G.*). — Sur les discontinuités des solutions de certaines équations de Fredholm (1279-1281).

Soit une équation de Fredholm pour laquelle le noyau N est le quotient de deux fonctions $G(x, z)$ et $H(x, z)$, holomorphes dans un domaine R qui contient le chemin d'intégration C, mais la fonction H ne s'annulant pas dans le voisinage de ce contour. Soit alors Γ la courbe que doit décrire x, à l'intérieur de R, pour que la variable z tirée de $H(x, z) = 0$ décrive le contour C; l'auteur démontre que Γ est une ligne de discontinuité artificielle, du type introduit par Hermite.

Humbert (*P.*). — Sur les polynomes hypergéométriques (1282-1283).

Les polynomes $x^n F\left(-n, \beta, \gamma, \frac{\lambda}{x}\right)$, où F est la fonction de Gauss, sont de la classe de M. Appell : or les polynomes $P_n(a, x)$ de M. Vaney (*voir* ci-dessus) interviennent comme cas particuliers limites des précédents : cela éclaire les résultats obtenus par M. Vaney.

Lévy (*P.*). — Sur quelques questions de calcul fonctionnel (1283-1285).

L'auteur indique une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonctionnelle soit représentable dans un domaine par une série uniformément convergente de polynomes fonctionnels normaux de classe p; il énonce à ce sujet diverses propositions sur la moyenne d'une fonctionnelle dans un volume.

Jekhowsky (*B.*). — Sur les fonctions de Bessel à deux variables (1331-1332).

L'auteur donne de ces fonctions une expression sous forme de séries entières à deux variables, et en déduit quelques propriétés.

Kogbetliantz (*E.*). — Sur les développements de Jacobi (1333-1334).

Soit une fonction sommable $f(x)$ et son développement en série de polynomes hypergéométriques de Jacobi $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$; l'auteur indique les conditions sous lesquelles cette série sera sommable $(C, \delta > 1 - \alpha - \beta)$, avec la somme

$$\frac{1}{2}[f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)].$$

Delassus (*E.*). — Sur une conséquence des lois du frottement (1335-1337).

La loi de frottement $F = \varphi(v) + N f(v)$ conduit à des absurdités qui tiennent uniquement à la notion de continuité et qui ne peuvent donc être écartées; l'auteur montre que cela ne prouve pas que la loi soit à rejeter, mais plutôt que certaines hypothèses, considérées comme évidentes dans la théorie du frottement, doivent en réalité être fausses.

Pincherle (*S.*). — Sur une équation intégrale dans le domaine complexe (1395-1397).

A propos de la Note ci-dessus de M. Wavre, l'auteur rappelle qu'il a exprimé des idées analogues dans un travail paru en 1916; il rappelle quelques-uns de ses résultats.

Gambier (*B.*). — Sur les surfaces applicables et l'équation de Laplace (1397-1400).

Soit C un réseau conjugué sur la surface S; on peut obtenir une infinité de surfaces S_1 correspondant à S par plans tangents parallèles; C se transforme sur S_1 en un réseau C_1 également conjugué. On démontre facilement qu'il existe 0, 1 ou une infinité de surfaces S′ applicables sur S avec conservation de la qualité du réseau C; l'auteur montre qu'il en existera le même nombre pour S_1 et en déduit un moyen pour trouver de nouveaux couples de surfaces applicables. Il est à remarquer que la plupart des exemples connus de déformation peuvent s'obtenir par ce moyen.

Auric. — Sur la théorie des nombres algébriques idéaux (1400-1402).

Soit une équation algébrique irréductible dont les coefficients a_i appartiennent à un corps algébrique A, holoïde complet; soit L le corps normal de Galois correspondant à cette équation. L'auteur montre l'intérêt qu'il y aurait à ce que L soit holoïde complet et à établir une correspondance univoque entre L et A.

Il suffirait pour cela de postuler l'existence, *réelle* ou *idéale*, de certains nombres de L; la théorie des idéaux serait ainsi à modifier; il y aurait un plus grand nombre d'idéaux premiers, mais cela entraînerait un progrès analogue à celui que l'introduction des nombres complexes a amené dans l'étude des racines *réelles* des équations.

Bertrand (*G.*). — Équations de Fredholm à intégrales principales au sens de Cauchy (1458-1461).

Poincaré a rencontré dans divers problèmes des équations intégrales dans lesquelles les intégrales ordinaires sont remplacées par leur valeur principale au sens de Cauchy; l'auteur étudie ces équations; une première formule ramène

les intégrales de Cauchy aux intégrales ordinaires; une autre permet d'itérer les noyaux singuliers; une dernière est relative à l'interversion de l'ordre des intégrations dans une intégrale double avec valeurs principales; il applique ces résultats à la théorie des marées et à celle des équations de première espèce.

Mineur (*H.*). — Sur les fonctions qui admettent un théorème d'addition algébrique (1461-1463).

L'auteur introduit la notion de fonction *indéfiniment symétrique* $\varphi(x, y)$; l'équation fonctionnelle $f(x+y) = \varphi[f(x), f(y)]$ admet alors des solutions holomorphes dans le voisinage de O. Dans le cas où $z = \varphi(x, y)$ est une branche de fonction algébrique, on en déduit que les fonctions $f(u)$ admettent un théorème d'addition algébrique.

Kampé de Fériet (*J.*). — Sur les fonctions hypercylindriques (1464-1466).

Ces fonctions ont été introduites par M. P. Humbert pour jouer dans l'hyperespace le rôle que jouent les fonctions de Bessel, dans l'espace à trois dimensions, pour l'expression des fonctions harmoniques.

L'auteur montre que les fonctions harmoniques de l'hyperespace s'expriment simplement et symétriquement au moyen des fonctions de Bessel et des fonctions hypersphériques.

Le Roux (*J.*). — La loi de gravitation et ses conséquences (1467-1469).

L'auteur note que l'emploi de la forme quadratique différentielle fondamentale de Schwarzchild implique l'existence d'axes privilégiés; en outre la théorie d'Einstein contient une confusion, tenant au langage géométrique employé, au sujet de la mesure des longueurs, et qui conduit à deux valeurs différentes pour la différentielle du rayon vecteur.

Andoyer (*H.*). — Démonstration directe d'un théorème de Tisserand relatif au développement de la fonction perturbatrice (1545-1548).

Soit $\cos H = \alpha \cos A + \beta \cos B$, avec $\alpha + \beta = 1$; on cherche le développement de $\cos nH$ en fonction linéaire des cosinus des sommes de multiples de A et B; l'auteur montre, par un calcul direct, que les coefficients de ce développement s'expriment simplement par des fonctions hypergéométriques.

Sparre (*de*). — Sur le rendement des turbines qui travaillent sous une hauteur de chute variable (1561-1564).

Les hypothèses admises par l'auteur, notamment sur la valeur de la force

vive perdue dans la turbine, le conduisent à une formule qui montre que le rendement dépend assez peu des variations de la hauteur de chute.

Gambier (B.). — Déformation des surfaces et équation de Laplace (1568-1570).

En appliquant à la surface d'Enneper la méthode exposée dans sa Note précédente (*voir* ci-dessus), l'auteur forme les équations d'une famille à un paramètre de surfaces applicables. Il indique divers autres exemples.

Riquier. — Sur les familles complètes de figures intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre (1629-1633).

L'auteur indique les opérations à faire pour avoir toutes les intégrales d'un système d'équations complètement intégrable, par un moyen analogue à celui qui se déduit de la connaissance d'une intégrale complète, dans le cas d'une seule équation.

Kampé de Fériet (J.). — Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques les plus générales (1634-1637).

Soit une fonction hypergéométrique généralisée $F(x, y) = \Sigma a_{m,n} x^m y^n$, caractérisée par la condition que les rapports $\frac{a_{m+1,n}}{a_{m,n}}$, $\frac{a_{m,n+1}}{a_{m,n}}$, soient des fonctions rationnelles de m et n, soumises à certaines restrictions.

L'auteur forme un système de deux équations aux dérivées partielles vérifiées par F.

Janet (M.). — Sur les systèmes aux dérivées partielles comprenant autant d'équations que d'inconnues (1637-1639).

L'auteur indique un moyen simple pour reconnaître le degré de généralité de la solution; en prenant comme exemple le cas de trois équations à trois fonctions inconnues de n variables, on voit que la solution dépend, suivant les cas, de 0, 1 ou 2 fonctions de $(n-1)$ variables.

Varopoulos (Th.). — Sur une classe de fonctions transcendantes (1639-1640).

Soit la transcendante $u = \varphi(x)$ définie par

$$u^n + A_1(x)\, u^{n-1} + \ldots + A_{n-1}(x)\, u + A_n(x) = 0,$$

les $A_i(x)$ étant des fonctions entières; si celles-ci ont au moins une racine commune et si $(n-r)$ d'entre elles ont une autre racine commune, l'ensemble des valeurs exceptionnelles de $\varphi(x)$ ne surpasse pas $(n+1)$.

Ocagne (*M. d'*). — Sur les lignes de courbure des quadriques (1640-1642).

L'auteur remarque que les huit génératrices isotropes d'une quadrique constituent une solution singulière de l'équation différentielle des lignes de courbure, et par suite forment l'enveloppe de ces lignes. Il en tire d'intéressantes propriétés géométriques des projections des lignes de courbure sur un plan principal de la quadrique.

Juvet. — Les formules de Frenet pour un espace de M. Weyl (1647-1650).

L'auteur obtient ces formules en utilisant les méthodes de calcul employées par M. Blaschke pour le cas de l'espace de Riemann.

E. Gau.

FUNDAMENTA MATHEMATICÆ.

T. III (1922) (¹).

Les 29 Notes et Mémoires que contient ce volume peuvent être divisés en trois groupes, certains d'entre eux traitant d'ailleurs des questions se rattachant à plusieurs de ces groupes.

I. — *Analysis situs et ensembles de points.*

M. Sierpinski (7) (²) montre que tout ensemble frontière (c'est-à-dire sans points intérieurs) de l'espace E_n est homéomorphe avec un ensemble non dense dans E_n. Il en résulte qu'il n'y a que deux types de dimensions pour les ensembles linéaires non dénombrables mesurables (B) : celui du continu linéaire et celui des ensembles parfaits non denses. (Il y en a χ_1 pour les ensembles linéaires mesurables (B) et $2^{\aleph_0}$ pour les ensembles mesurables (B) d'un espace ayant au moins deux dimensions.)

M. Kuratowski (59) appelle rayon un ensemble homéomorphe avec une demi-droite, le sommet du rayon étant l'homologue du sommet de la demi-droite. Il étend quelques théorèmes relatifs aux lignes de Jordan généralisées de M. Mazurkiewicz, c'est-à-dire aux ensembles dont tous les points sont du premier genre (*cf.* t. I, p. 166). Tout point d'une telle ligne non bornée est le sommet d'un rayon situé sur elle. Il donne de deux façons différentes la condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemblé soit un rayon.

(¹) Les tomes I et II ont été analysés par M. Lebesgue en 1922. Voir *Bulletin des sciences mathématiques*, t. XLVI, 1ʳᵉ partie, p. 35.

(²) Lire : page 7.

Le même auteur (14) répond à une question posée par M. Knaster. Soit E un ensemble homogène au sens de l'*Analysis situs*, c'est-à-dire tel qu'à tout couple (a, b) de points de E correspond une transformation topologique de E en lui-même qui amène a en b. Existe-t-il une de ces transformations amenant en même temps b en a? Non, en général. Oui, si E est linéaire, ou si E n'est connexe nulle part, c'est-à-dire si à tout couple (x, y) de points de E correspond une décomposition de E en deux ensembles séparés dont l'un contient x et l'autre y (deux ensembles sont dits séparés si chacun d'eux ne contient pas de points de l'autre ni du dérivé de l'autre).

Soit F un ensemble plan fermé. On sait que son complémentaire est la somme d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable de domaines connexes sans point commun deux à deux. Le théorème de Phragmen-Brouwer dit que, si F est un continu borné, la frontière de chacun de ces domaines est un continu. M. Mazurkiewicz (20) montre qu'on peut supprimer le mot borné dans cet énoncé.

J'explique ici quelques notations utilisées très souvent par les auteurs de ce Journal. F représente un ensemble fermé, F_σ la somme (réunion) d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés, F_δ le produit (partie commune) d'une infinité dénombrable d'ensembles fermés. Les mêmes notations s'appliquent à la lettre G, celle-ci représentant un ensemble ouvert (complémentaire d'un ensemble fermé). Il peut y avoir plusieurs indices; ainsi $F_{\sigma\delta}$ représente le produit d'une infinité dénombrable d'ensembles F_σ. Les ensembles qu'on peut ainsi représenter sont les ensembles de Borel. On utilise aussi l'indice ρ indiquant la différence de deux ensembles. M. Sierpinski (119) montre que certains des ensembles qu'on peut ainsi noter sont des invariants d'*Analysis situs*, c'est-à-dire que toute transformation topologique en fait des ensembles pouvant être représentés par les mêmes symboles. Voici quelques-uns de ces ensembles, l'invariance de certains ayant été démontrée antérieurement par d'autres auteurs : F_σ, G_δ, $F_{\sigma\delta}$, $G_{\delta\sigma}$, F_ρ, $F_{\rho\rho}$, $F_{\sigma\rho}$, $F_{\sigma\rho\rho}$. Certaines de ces notations représentent des ensembles identiques; ainsi un $F_{\sigma\rho\sigma}$ est un $G_{\delta\sigma}$, un $F_{\rho\rho}$ est aussi la somme de deux F_ρ mais il y a des $F_{\rho\rho}$ qui ne sont pas des F_ρ, par exemple, l'intérieur d'un cercle plus un point de la circonférence.

MM. Mazurkiewicz et Sierpinski ont donné chacun une décomposition du plan en deux ensembles punctiformes connexes sans points communs (un ensemble est punctiforme s'il ne contient aucune partie continue; un ensemble est connexe s'il est impossible de le décomposer en deux ensembles séparés). M. Mazurkiewicz (65) cherche à faire cette décomposition au moyen d'ensembles de Borel. Il montre que l'une des parties ne peut pas être un F_σ (et par suite l'autre un G_δ) parce que tout F_σ punctiforme est homéomorphe avec un ensemble linéaire et qu'aucun ensemble punctiforme linéaire n'est connexe. La décomposition peut au contraire être réalisée au moyen d'un $F_{\sigma\delta}$ et d'un $G_{\delta\sigma}$. MM. Kuratowski et Sierpinski (303) donnent une autre décomposition dans laquelle l'un des ensembles est du type $F_\sigma + G_\delta$ et l'autre du type $F_\sigma \times G_\delta$; c'est la plus simple possible, quand on fait appel aux seuls ensembles de Borel.

M. Kuratowski (41) démontre que toute infinité bien ordonnée d'ensembles clairsemés croissants (ou décroissants) est dénombrable (un ensemble est dit clairsemé s'il ne contient aucune partie dense en soi). M. Zalcwasser (44) remplace dans cet énoncé « ensembles clairsemés » par « ensembles qui sont à la fois F_σ et G_δ ». C'est en particulier le cas des ensembles clairsemés (théo-

rème de M. Kuratowski) des ensembles fermés et des ensembles ouverts. M. Sierpinski (46) généralise autrement ce théorème : toute infinité d'ensembles clairsemés croissants (c'est-à-dire telle que de deux quelconques de ces ensembles l'un contienne l'autre) est dénombrable; il peut y avoir une infinité non dénombrable de ces ensembles, tous distincts, mais leur somme est un ensemble dénombrable. Il signale (109) une autre singularité de même nature : il existe une classe de sous-ensembles croissants du continu, tous distincts, ayant une puissance supérieure à celle du continu. Il existe même de telles classes ayant une puissance donnée quelconque $\leq 2^{2^{\aleph_0}}$ si l'on admet que $2^{\aleph_0} = \aleph_1$. Cette Note répond à une question posée de deux manières différentes par MM. Knaster et Kurastowski.

Dans un Volume précédent, MM. Knaster et Kuratowski ont montré qu'un ensemble connexe E pouvait contenir un point spécial P appartenant nécessairement à toute partie connexe de E. M. Kline (238) montre que, si un tel point P existe, il est unique et que, si l'on retranche de E un point quelconque autre que P, l'ensemble restant est encore connexe.

M. Moore (232) étudie la connexité locale. Un ensemble E est localement connexe au point x si, à tout nombre ε, on peut faire correspondre η tel que, y étant un point quelconque de E distant de x de moins de η, x et y appartiennent à un même sous-ensemble connexe de E de diamètre inférieur à ε. La connexité locale est uniforme si l'on peut choisir η fonction de ε seul et non de x. L'auteur montre que, si la connexité locale est uniforme, l'ensemble est la somme d'un nombre fini d'ensembles connexes dont chacun a un diamètre inférieur à δ, et ceci pour toutes les valeurs positives de δ. La réciproque est inexacte. Pour qu'un domaine plan simplement connexe borné ait pour frontière une courbe continue, il faut et il suffit que cette décomposition à l'aide d'ensembles connexes en nombre fini soit possible pour toutes les valeurs positives de δ.

M. Knaster (247) étudie les continus plans dont tout sous-continu est indécomposable; appelons-les K. (Un continu est indécomposable s'il n'est pas la somme de deux continus différents de lui.) K est lui-même indécomposable. La classe des sous-continus de K, qui contiennent un point donné, est formée d'ensembles croissants; son type d'ordre est celui du continu linéaire. Chaque élément de cette classe est un continu de condensation pour tous ceux qui le suivent. L'auteur donne un exemple d'un continu K, ensemble des points communs à une infinité de domaines polygonaux emboîtés, en forme de grecques. Il montre aussi qu'il existe dans le plan une classe, ayant la puissance du continu, dont tous les eléments sont des continus K disjoints.

M. Kuratowski (181) montre qu'à partir d'un ensemble donné A on peut construire 13 nouveaux ensembles, et pas plus, au moyen de l'opération A qui consiste à ajouter à A son dévivé, et de l'opération A[1] qui consite à prendre le complémentaire de A. Certains des ensembles obtenus portent un nom : bord, frontière, intérieur, résidu, etc. de A. Si certains de ces ensembles sont égaux ou nuls, A est un ensemble de nature particulière (ensemble frontière, domaine, etc.). Les résultats de cette Note sont ensuite appliqués à une théorie des continus irréductibles entre deux points (200). Soit C un continu irréductible entre les points a et b (c'est-à-dire dont aucun sous-continu ne peut contenir à la fois a et b). On dira que D est un domaine relativement à C si chaque point de D est le centre d'une sphère non nulle à l'intérieur de laquelle D et C coïncident. M. Kuratowski appelle sous-continu régulier de C, tout continu qui est

le dérivé d'un domaine relativement à C. Il étudie en particulier la classe des sous-continus réguliers de C qui contiennent le point a. Elle est formée d'ensembles croissants et il y a correspondance biunivoque entre les sauts de cette classe et les sous-continus indécomposables de C qui ne sont pas de condensation. L'auteur généralise aux continus non bornés deux théorèmes de MM. Mazurkiewicz et Sierpinski et il donne des exemples de singularités déduits principalement de la considération de l'ensemble parfait discontinu de Cantor. Les résultats de ces deux Notes sont valables non seulement pour les ensembles de points, mais aussi pour des ensembles satisfaisant à certains axiomes, ensembles qui sont plus généraux que les classes (L) de M. Fréchet.

II. — *Théorie des fonctions.*

M. Sierpinski (314) démontre de façon simple et naturelle quelques théorèmes fondamentaux, dus à MM. Borel, Fréchet, Vitali et Lusin, sur les fonctions mesurables. Il prouve aussi la propriété nouvelle suivante, de même nature : pour toute fonction mesurable $f(x)$, presque partout finie, il existe deux fonctions semi-continues supérieurement et presque partout finies, dont la différence est presque partout égale à f.

M. Sierpinski (123) montre que les quatre dérivés, au sens de Dini, d'une fonction mesurable B sont aussi mesurables B. Si la fonction est de classe $\leq \alpha$ ses dérivées sont de classe $\leq \alpha + 2$, mais β étant donné quelconque, il existe des fonctions dérivées dont la classe est $\geq \beta$. M. Banach (128) montre que les dérivées d'une fonction mesurable L sont mesurables L.

M. Rajchman (113) généralise ainsi un théorème qu'il avait publié dans le Tome II : une série de fonctions non décroissantes, convergente dans un intervalle, peut être presque partout dérivée terme à terme. Après la publication de cette Note, l'auteur a appris que ses résultats avaient déjà été obtenus par MM. Tonelli et Fubini.

MM. Kuratowski el Sierpinski (303) donnent la condition moyennant laquelle l'image d'une fonction de classe 1 est un ensemble punctiforme connexe et ils citent un exemple d'une telle fonction dont l'image est un ensemble G_δ punctiforme connexe : c'est un nouvel exemple d'un ensemble G_δ punctiforme qui n'est homéomorphe avec aucun ensemble linéaire (*cf.* Mazurkiewicz, t. I, p. 61). Ils déduisent aussi de cette fonction la décomposition du plan, citée plus haut, en deux ensembles punctiformes connexes.

Un théorème de M. Lebesgue dit que, si une fonction de Baire prend une fois et une seule toutes les valeurs, la fonction inverse est aussi une fonction de Baire. M. Mazurkiewicz avait montré que si, dans ces conditions, la fonction est de classe 1, la fonction inverse n'est pas nécessairement de cette classe, M. Sierpinski (26) montre qu'il n'y a pas de relation nette entre les classes de ces deux fonctions; en particulier, α étant donné quelconque, l'une de ces fonctions peut être de classe supérieure à α et l'autre de classe 1.

Voici un problème qui se rattache à celui de l'unicité du développement trigonométrique : que doit être l'ensemble E pour qu'une série trigonométrique, convergente vers zéro en dehors de E, ait tous ses coefficients nuls? M. de la Vallée Poussin a donné des résultats pour les ensembles qui ne contiennent aucun ensemble parfait. M. Rajchman (287) définit une classe (H) d'ensembles fermés (contenant des ensembles parfaits) de mesure nulle satisfaisant à la con-

dition du problème. Ce sont des ensembles dont MM. Hardy, Littlewood et Steinhaus se sont déjà occupés; l'ensemble parfait discontinu de Cantor en est un. La sommation de la série peut d'ailleurs être entendue au sens de Riemann, ou de Poisson, ou par la méthode des moyennes, mais il faut alors ajouter l'hypothèse supplémentaire que le coefficient général tend vers zéro. Cette restriction n'est pas utile si l'on fait la sommation ordinaire. Dans le Tome IV, l'auteur rectifie quelques erreurs qui s'étaient glissées dans cette Note et il signale que Mlle Bary a prouvé récemment, au Séminaire de M. Lusin, à Moscou, que tout ensemble somme d'une infinité dénombrable d'ensembles du type (H) satisfait aussi aux conditions du problème.

Sur le cercle C $|z| = 1$ du plan de la variable complexe z, considérons un ensemble fermé quelconque F. M. Mazurkiewicz (52) prouve qu'il existe : 1° une série entière convergente sur F, divergente sur le reste de C; 2° une série entière divergente sur F, convergente sur le reste de C. M. Rajchman avait déjà établi pour les séries trigonométriques un énoncé analogue au premier.

M. Sierpinski (240) étudie les fonctions d'ensembles, additives et continues; une telle fonction $f(E)$ étant déterminée et finie pour tout sous-ensemble E mesurable, d'un ensemble de points, borné, E_0. Cette fonction est uniformément continue et l'ensemble de toutes ses valeurs est un intervalle fini. En particulier, si elle prend deux valeurs, elle prend toutes les valeurs intermédiaires, mais ceci n'est pas caractéristique des fonctions continues. Si la fonction possède l'additivité complète, l'intervalle dont il est question est fermé; on ne sait pas si cette propriété subsiste quand la fonction ne possède que l'additivité restreinte. L'additivité est d'ailleurs complète quand la fonction est absolument continue, c'est-à-dire quand $f(E)$ tend vers zéro avec la mesure de E [la continuité exige seulement que $f(E)$ tende vers zéro si le diamètre de E tend vers zéro].

III. — *Ensembles abstraits.*

M. Banach (133) étudie quelques opérations sur certaines classes d'ensembles abstraits. Il en résulte des propriétés (principalement des propriétés asymptotiques) pour l'intégrale $\int_a^b K(s, t)\, X(t)\, dt$ quand la fonction $K(s, t)$ est mesurable et que la fonction $X(t)$ est continue, ou sommable, ou à $r^{\text{ième}}$ puissance sommable, ou la dérivée de sa primitive, etc.

Deux Notes sont relatives aux classes (L). Dans l'une, M. Kuratowski (41) complète une Note publiée par M. Sierpinski dans le Tome II. Dans l'autre (35) MM. Knaster et Sierpinski montrent qu'il existe une classe (L), de puissance non supérieure à celle du continu, dont chaque élément est un élément limite de chaque sous-ensemble non dénombrable.

M. Sierpinski (1) résout un problème en relation avec le théorème de M. Bernstein d'après lequel l'égalité $2m = 2n$ pour les nombres cardinaux entraîne $m = n$: connaissant trois correspondances biunivoques, une entre les ensembles M et N, une entre les ensembles P et Q, une entre les ensembles M + N et P + Q, en trouver une entre les ensembles M et P.

M. Sierpinski (50) remarque que la définition de l'isomorphisme des ensembles donnée par M. Mirimanoff implique certains théorèmes d'existence dont la démonstration serait difficile; il lui substitue une autre définition ne présentant pas cet inconvénient.

M. Kuratowski (76) donne une méthode d'élimination des nombres transfinis de certains raisonnements. Il envisage le cas où ces nombres s'introduisent par la construction, à partir d'un ensemble A et à l'aide de certains procédés, d'une classe transfinie $\mathcal{A}(A)$, comme cela a lieu par exemple dans la démonstration du théorème de Cantor-Bendixson où la classe $\mathcal{A}(A)$ est celle de tous les dérivés de l'ensemble fermé A. Dans tous ces cas, il substitue à la classe $\mathcal{A}(A)$ une autre classe M(A), construite sans l'aide du transfini, à peu près comme les chaines de Dedekind. Le succès de la méthode tient à ce que les classes $\mathcal{A}(A)$ et M(A) sont identiques. Cette méthode est appliquée à un certain nombre de questions, dont la première solution faisait intervenir les nombres transfinis et qui ont été presque toutes résolues depuis sans l'emploi de ces nombres, par des procédés différents de celui de l'Auteur. Je signalerai seulement la solution du problème de Baire : étant donnée une fonction f, ponctuellement discontinue sur tout ensemble parfait, trouver une suite de fonctions continues ayant f pour limite. C'est la première solution de ce problème qui ne fasse pas appel aux nombres transfinis.

L. Antoine.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES, publiés par MM. les SECRÉTAIRES PERPÉTUELS.

Tome 173, 2e semestre 1921.

Gambier (*B.*). — Surfaces imaginaires applicables sur une surface de révolution ou une surface moulure réelle; systèmes cycliques réels correspondants (22-25).

Les équations de ces surfaces sont données explicitement; elles dépendent de deux fonctions arbitraires; à chaque surface correspondent, suivant une méthode indiquée par Darboux, un système cyclique et un système triple orthogonal faciles à obtenir.

Riabouchinski (*D*). — Mouvement cyclique d'un liquide autour d'un solide qui se meut parallèlement à une paroi rectiligne (25-26).

On suppose le mouvement plan; l'auteur calcule la pression exercée sur le solide dans le cas où celui-ci est un cercle.

Belot (*E.*). — La loi de rotation du Soleil expliquée par l'évolution et l'aplatissement du protosoleil (27-30).

L'auteur montre que la loi de rotation du Soleil est celle qui résulte de la

condensation sphérique suivant la loi des aires d'un ellipsoïde d'aplatissement $e = 0{,}377$, ayant une rotation uniforme et, à la latitude 30°, un parallèle commun avec la sphère équivolume. Il explique ainsi divers phénomènes et en particulier pourquoi les taches s'arrètent le plus souvent à la latitude 30°.

Brillouin (*M.*). — Atome de Bohr. Fonction de Lagrange circumnucléaire (30-32).

L'auteur donne l'expression de la fonction de Lagrange la plus générale qui fournisse des orbites privilégiées possédant les caractères essentiels des orbites de Bohr-Sommerfeld; cette fonction met en évidence certaines *actions* dont il reste à interpréter la provenance, en relation avec les propriétés de l'atome.

Carrus (*S.*). — Recherche des systèmes triples orthogonaux (69-72).

En écrivant les équations sous une forme nouvelle, l'auteur ramène le problème à l'intégration d'un système de trois équations du premier ordre (linéaires par rapport aux dérivées partielles, chacune d'elles ne renfermant que les dérivées par rapport à une seule variable) et à des quadratures.

Alayrac. — Mouvement d'un solide dans un milieu résistant (72).

L'auteur signale que quelques résultats de sa Note précédente (t. 172, p. 1089) avaient été obtenus antérieurement par M. Dulac.

Janet (*M.*). — Sur les caractéristiques de certains systèmes aux dérivées partielles comprenant autant d'équations que de fonctions inconnues (124-126).

L'auteur étudie un système de trois équations à trois fonctions inconnues de n variables, de forme particulière; il obtient, suivant les cas, les surfaces caractéristiques (au sens Beudon-Hadamard) ou les courbes caractéristiques (analogues à celles des équations du premier ordre).

Denjoy (*A.*). — Sur un mode d'intégration progressif et les caractères d'intégrabilité correspondants (127-129).

Suite de l'étude d'une nouvelle opération d'intégration $T_{2\varepsilon}$ (*voir* t. 172, 1921, p. 653, 833 et 903).

Karasinski (*L. de*). — Résistance des matériaux (132-134).

L'auteur forme les équations d'équilibre en partant du principe des travaux virtuels; ces équations permettent la discussion des cas correspondant aux charges critiques (flambage, etc.); il obtient des formules donnant la mesure de fatigue et la tension critique d'une barre, s'accordant avec les expériences de Karman.

Borel (*E.*). — Sur les hypothèses fondamentales de la Physique et de la Géométrie (189-191).

Les hypothèses fondamentales, de nature physique, qui sont impliquées dans toutes les théories par lesquelles on a essayé une synthèse de la Géométrie et de la Physique, sont au nombre de trois : 1° la possibilité de définir dans l'espace un réseau de coordonnées à trois dimensions u, v, w (c'est au fond une hypothèse de continuité); 2° le ds^2 de l'espace est de la forme $\lambda^2\varphi\ (du, dv, dw)$, où φ est une forme quadratique dont les coefficients, ainsi que λ, sont fonctions de u, v, w; 3° ces coefficients sont continus. Il peut être commode d'y ajouter une quatrième hypothèse, faisant correspondre un certain espace géométrique à l'espace réel.

Humbert (*P.*). — Formule de multiplication pour la fonction de Kummer $\Phi(\alpha, \gamma, x)$ (217-219).

Cette formule donne $\psi(\alpha, \gamma, nx)$, où n est entier; elle conduit naturellement à des formules particulières pour les polynomes qui sont des cas particuliers de Φ.

Carrus (*S.*). — Sur les systèmes triples orthogonaux (219-222).

En appliquant les méthodes indiquées dans sa Note précédente (*voir* ci-dessus), au cas où l'une des coordonnées est somme de trois fonctions ne dépendant chacune que d'un seul paramètre, l'auteur obtient l'intégration du problème; il trouve en particulier un système formé de paraboloïdes.

Antoine (*L.*). — Sur les ensembles parfaits partout discontinus (284-285).

Soient P et p deux ensembles plans, parfaits, discontinus; l'auteur a déjà montré (t. 171, p. 661) qu'il existe une homéomorphie de ces plans dans laquelle P et p se correspondent : cette Note a pour but de généraliser en partie cette propriété à un espace quelconque. La généralisation complète est impossible, et cela explique pourquoi les méthodes qui ont permis de démontrer le théorème de Jordan sur les courbes planes fermées n'ont pu être généralisées à un espace quelconque.

Kampé de Fériet (*J.*). — Sur certains systèmes associés d'équations aux différences finies et d'équations aux dérivées partielles linéaires (285-288).

Soit $F(x, y) = \Sigma a_{m,n} x^m y^n$; si les coefficients $a_{m,n}$ vérifient un système de deux équations aux différences finies, linéaires d'ordre quelconque, on peut former deux équations aux dérivées partielles vérifiées par $F(x, y)$; on suit la méthode indiquée déjà par l'auteur pour le cas où F est une fonction hypergéométrique généralisée (t. 172, p. 1634).

Demoulin (*A.*). — Sur les surfaces cerclées (341-344).

On peut associer à chaque cercle de la surface un groupe de cinq sphères, qui se définissent très simplement et servent de base à des coordonnées pentasphériques; l'auteur établit ainsi des formules susceptibles de nombreuses applications géométriques.

Fatou (*P.*). — Sur les domaines d'existence de certaines fonctions uniformes (344-346).

La notion de *point inaccessible* de la frontière d'un domaine, restée jusqu'ici sans application, s'introduit tout naturellement dans l'itération des fonctions entières; l'auteur le montre sur l'exemple simple $z_1 = z + 1 + e^{-z}$.

Potron. — Sur une représentation du groupe des 27 droites en groupe de collinéations quaternaires (346-348).

M. Bagnera a établi qu'il ne peut exister qu'un seul groupe de collinéations quaternaires primitif, d'ordre fini, et contenant des homologies d'ordre > 2; l'auteur forme les équations de ce groupe et retrouve ainsi, par un procédé direct, les résultats de M. Witting, relatifs au groupe des 27 droites.

Ogura (*K.*). — Sur le mouvement d'une particule dans le champ d'un noyau chargé (348-350).

Le noyau est la seule singularité du champ de gravitation et d'électricité; en partant des équations du mouvement, établies par M. Jeffery, l'auteur montre que l'on peut étendre les équations de Lagrange et le principe d'Hamilton, dans la théorie de la relativité restreinte, en remplaçant T par $T\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

Kampé de Fériet (*J.*). — Les fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur, à deux variables (401-404).

Ces fonctions sont une généralisation directe des quatre fonctions de M. Appell et présentent des analogies avec celles que l'on connaît déjà dans le cas d'une variable; en utilisant des résultats antérieurs (t. 172, p. 1634), l'auteur obtient deux équations aux dérivées partielles vérifiées par ces fonctions.

Ogura (*K.*). — Sur le mouvement d'une particule dans le champ d'un noyau chargé (407-408).

Comme suite à sa Note précédente (*voir* ci-dessus), l'auteur montre qu'en prenant comme masse la quantité $[m] = m\left(1-\frac{v^2}{c^3}\right)^{-\frac{1}{2}}$, les équations du

mouvement prennent une forme analogue à celle de la mécanique classique; il fait une application de ses formules à la théorie des quanta et obtient une formule un peu différente de celle de M. Sommerfeld.

Séguier (*de*). — Sur le groupe quaternaire primitif de collinéations d'ordre 25 920 et le groupe hessien (433-435).

L'existence de ce groupe, démontrée ci-dessus par M. Potron, est une conséquence directe des équations du groupe hermitien $\mathcal{H}(n, \pi)$, données antérieurement par l'auteur.

Chazy (J.). — Sur les courbes définies par les équations différentielles du second ordre (435-436).

L'auteur énonce quatre propositions relatives aux courbes définies par un système différentiel du second ordre, et qui généralisent des résultats connus pour le cas du premier ordre, en particulier le théorème de M. Picard : à un col n'aboutissent pas d'autres caractéristiques que les deux caractéristiques holomorphes.

Carrus (*S.*). — Sur les systèmes triples orthogonaux (437-438).

Comme application de la méthode exposée dans ses deux dernières Notes (*voir* ci-dessus), l'auteur traite le cas où l'une des coordonnées est indépendante de l'un des paramètres.

Bertrand (*G.*). — La loi de Newton et la formule d'Einstein pour le périhélie des planètes (438-440).

L'auteur montre que l'on peut, d'une infinité de façons, modifier la loi de gravitation de Newton, de manière à la mettre d'accord avec les phénomènes observés et en particulier avec la rotation du périhélie.

Banach (*S.*). — Sur les ensembles de points où la dérivée est infinie (457-459).

L'auteur démontre que, pour toute fonction $F(x)$ d'une variable réelle, l'ensemble des points x où la dérivée à droite $F'_+(x) = +\infty$ est de mesure nulle.

Grialou (*J.*). — Sur le mouvement irrotationnel et permanent d'un liquide, les trajectoires étant planes et verticales et le régime permanent (459-461).

L'auteur détermine spécialement la vitesse, sous forme finie, ainsi que ses composantes; il en déduit l'équation différentielle des trajectoires et la pression en chaque point.

Kampé de Fériet (*J.*). — Quelques propriétés des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur à deux variables (489-491).

Ces fonctions ont été définies par l'auteur dans sa Note précédente (*voir* ci-dessus); il en établit une classification au moyen des notions d'*ordre* et de *classe* et il en donne quelques propriétés générales; en particulier : une telle fonction se met sous forme d'une série simple dont les éléments sont des fonctions de même nature à une seule variable.

Casteels (*L.*). — Sur un type de génération quadratique doublement continue d'une cubique plane donnée par neuf points simples (512-515).

L'auteur donne, pour construire par points une cubique plane dont on connaît neuf points, une méthode qui ne demande que des constructions linéaires et qui n'exige la connaissance préalable d'aucun point fixe particulier.

Varopoulos (*Th.*). — Sur quelques propriétés des fonctions croissantes (515-516).

En essayant de généraliser le théorème de M. Borel sur les fonctions croissantes, l'auteur a obtenu le résultat suivant : Si la fonction croissante positive $m(x)$ rend convergente la série $\sum_{x_0}^{\infty} \frac{1}{m(x)}$, toute fonction $\varphi(x)$, croissante, continue, vérifie l'inégalité

$$\varphi\left[x + \frac{1}{m(x)}\right] < [\varphi(x)]^{\theta} \qquad (\theta > 1 \text{ quelconque})$$

partout, sauf peut-être dans des intervalles exceptionnels d'étendue totale finie.

Chazy (*J.*). — Sur la stabilité à la Poisson dans le problème des trois corps (517-519).

Poincaré a considéré le prolongement analytique du mouvement au delà de la valeur infinie du temps; l'auteur reprend cette question, en utilisant quelques résultats de M. E. Picard, et il constate que les mouvements stables ainsi obtenus impliquent des valeurs imaginaires du temps. En fait, les trajectoires non exceptionnelles possèdent la stabilité à la Poisson sans être prolongées au delà de la valeur infinie du temps, ou bien elles ne sont pas susceptibles d'être prolongées par des trajectoires réelles.

Ogura (*K.*). — Sur le champ statique de gravitation dans l'espace vide (521-523).

Soit l'élément linéaire d'un tel espace

$$ds^2 = f^2 dt^2 - H_1^2\, dx_1^2 - H_2^2\, dx_2^2 - H_3^2\, dx_3^2;$$

l'auteur détermine la fonction f, dans le cas particulier où les tenseurs $P_{2,3}$, $P_{3,1}$ et $P_{1,2}$ sont nuls.

Giraud (*G.*). — Sur les équations non linéaires aux dérivées partielles du second ordre du type elliptique (543-546).

Soient $f = 0$ une telle équation, $x_1, \ldots, x_n$ les variables et u la fonction inconnue; on suppose que l'équation admet la solution $u = 0$ et satisfait en outre à certaines conditions d'holomorphie à l'intérieur d'un domaine réel D qui contient $u = 0$. L'auteur démontre qu'il existe une hypersphère S, intérieure à D, telle que si l'on se donne une suite analytique de valeurs $t\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$ (où t est un paramètre et $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ les coordonnées d'un point d'un contour C intérieur à S), l'équation admet, dès que t est petit, une solution unique holomorphe sur C et à son intérieur et prenant sur C les valeurs $t\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ Cette solution se forme par une méthode d'approximations successives.

Drouin. — Contribution à une étude générale des algorithmes illimités (546-548).

Cette Note résume les idées générales développées dans un Mémoire que l'auteur présente à l'Académie, et qui est une étude générale de la représentation des fonctions, dont les séries de Taylor, de Fourier, etc. sont des cas particuliers.

Varopoulos (*Th.*). — Sur les fonctions croissantes (569-570).

L'auteur démontre que pour toutes les fonctions $\varphi(x)$ satisfaisant à l'inégalité $\varphi(x) > x^{\rho}$, $(\rho > 0)$, l'addition à x de toute fonction $m(x) > e^{x}$ altère l'ordre de la croissance de $\varphi(x)$.

Fatou (*P.*). — Sur les fonctions qui admettent plusieurs théorèmes de multiplication (571-573).

Il s'agit des fonctions telles que $\varphi(ku) = R[\varphi(u)]$, où R est une fraction rationnelle; il y a deux théorèmes de multiplication distincts si l'identité précédente a lieu pour deux valeurs k et k' telles que $k^n \neq k'^p$ (n, p, entiers); l'auteur démontre alors que si $u = 0$ est un point ordinaire ou un pôle, $\varphi(u)$ ne peut être que méromorphe ou entière; dans ce dernier cas elle se ramène à u, e^u, $\cos u$ ou $\sin u$, par les substitutions $(u \mid au^m)$ et $(\varphi \mid A\varphi + B)$.

Valiron (*G.*). — Le théorème de Picard-Borel dans la théorie des fonctions entières (573-576).

Par une méthode nouvelle l'auteur démontre un théorème plus général que celui de Picard-Borel et plus précis; on en déduit par exemple une limite inférieure du nombre des zéros du produit $[f(z) - a]\,[f(z) - b]$, $(a \neq b)$.

Chazy (*J.*). — Sur la stabilité dans le problème des trois corps (576-578).

Les mouvements possibles se divisent en plusieurs catégories (*voir* t. 170, p. 1560), suivant l'ordre de grandeur des distances mutuelles lorsque le temps devient infini; l'auteur étudie ici la stabilité à la Poisson dans les divers cas et obtient deux théorèmes sur la mesure des ensembles formés par les points des trajectoires, dans l'espace à 12 dimensions.

Brillouin (*M.*). — Atome de Bohr. Fonction de Lagrange circumnucléaire (639-641).

En partant de la fonction de Lagrange obtenue dans sa dernière Note (*voir* ci-dessus), l'auteur montre que les équations du mouvement de l'électron admettent deux intégrales premières, d'où l'on déduit immédiatement les ellipses privilégiées de Bohr-Sommerfeld. L'intégration peut s'achever par quadratures et dépend de la résolution d'une équation du troisième degré.

Ogura (*K.*). — Sur la courbure des rayons lumineux dans le champ de gravitation (641-644).

En utilisant les résultats de sa Note précédente (*voir* ci-dessus), l'auteur calcule cette courbure et étudie divers problèmes relatifs à sa variation.

Painlevé (*P.*). — La Mécanique classique et la théorie de la relativité (677-680).

La mécanique classique repose entièrement sur un axiome de causalité, qui se traduit par l'existence d'un repérage espace-temps privilégié; l'auteur montre par divers exemples que les doctrines d'Einstein impliquent des hypothèses qui présupposent aussi cet axiome; le choix du ds^2 par exemple est assez arbitraire et l'on peut en trouver d'autres, répondant à toutes les conditions einsteiniennes et qui conduisent à des conclusions très différentes.

Picard (*E.*). — Quelques remarques sur la théorie de la relativité (680-682).

Observations générales, faites à propos de la Note précédente, sur les hypothèses plus ou moins mal formulées que comportent les théories relativistes.

Julia (*G.*). — Sur la permutabilité des substitutions rationnelles (690-693).

Deux substitutions rationnelles $[z | R_1(z)]$ et $[z | R_2(z)]$ sont dites *permutables* si $R_1[R_2(z)] = R_2[R_1(z)]$. L'auteur étudie d'abord leurs propriétés générales, au moyen des ensembles formés par les points critiques des itérées de R_1 et de leurs inverses, par les points des cycles attractifs ou indiffé-

rents, etc. Il détermine ensuite les R_1, de degré > 1, permutables à une R_2 du premier degré, ce qui donne en particulier toutes les fonctions entières ayant deux théorèmes distincts de multiplication.

Varopoulos (*Th.*). — Sur les fonctions croissantes (693).

Comme complément à la Note précédente (*voir* plus haut), l'auteur étudie ici, en utilisant les mêmes méthodes, les fonctions qui croissent comme $\log_k x$.

Fatou (*P.*). — Sur un groupe de substitutions algébriques (694-696).

Soient $R_n(x)$ la $n^{\text{ième}}$ itérée d'une fraction rationnelle $R(x)$, de degré > 1, et G le groupe des substitutions définies par les équations $R_n(x) = R_p(y)$; ce groupe contient un sous-groupe invariant G′ défini par $R_n(x) = R_n(y)$, pour lequel le groupe dérivé d'un nombre fini quelconque d'éléments est toujours fini; l'auteur étudie G′ et examine particulièrement un cas de discontinuité propre qui a lieu lorsque $[x \mid R(x)]$ possède un point fixe, de multiplicateur s compris entre -1 et $+1$.

Riabouchinski. — Équations du mouvement d'un fluide rapporté à des axes mobiles (698-701).

L'auteur établit les équations générales et montre ensuite les simplifications qui s'introduisent dans le cas du mouvement permanent.

Eydoux (*D.*). — Sur la nécessité de l'existence du vecteur tourbillon dans les mouvements des liquides, lorsqu'il y a variation d'énergie le long des trajectoires des diverses particules (701-703).

En supposant le liquide parfait et les forces extérieures dérivant d'un potentiel, l'auteur établit que pour une particule l'énergie reste constante; en outre, si le tourbillon est nul à un instant quelconque, il reste nul tout le long de la trajectoire. L'existence de forces ne dérivant pas d'un potentiel, et par suite du vecteur tourbillon, est donc nécessaire pour obtenir une variation de l'énergie d'un filet fluide en mouvement.

Riquier. — Sur les familles complètes de figures intégrales d'un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre, et sur l'application de leurs propriétés à la théorie des systèmes différentiels quelconques (754-755).

On peut démontrer qu'un système différentiel non impossible, de forme et d'ordre quelconques, est toujours réductible à un système complètement intégrable d'ordre 1; or, pour ces derniers, dès que l'on connaît une famille complète

de figures intégrales, on peut former toutes les figures intégrales ordinaires par des opérations très simples.

Gevrey (*M.*). — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles admettant une seule famille de caractéristiques imaginaires (761-763).

Le procédé donné par l'auteur, pour la solution des problèmes aux limites relatifs aux équations linéaires du second ordre à n variables (*voir* t. 171, p. 610, 859), s'étend aux équations d'ordre $2p$ à caractéristiques imaginaires; en particulier l'auteur forme ici une intégrale dont les valeurs, ainsi que celles de ses dérivées des $(2p-1)$ premiers ordres, satisfont, en tout point d'un contour fermé donné, à p relations linéaires.

Gambier (*B.*). — Correspondance conforme entre deux surfaces avec conservation des lignes de courbure et de la valeur absolue du rapport des rayons de courbure principaux (763-766).

L'auteur donne la solution de ce problème, constituée par deux sphères, une sphère et une surface minima, deux surfaces de révolution, etc.

Ogura (*K.*). — Extension d'un théorème de Liouville au champ de gravitation (766-768).

L'auteur établit d'abord la forme que doit avoir la fonction f, pour que l'intervalle élémentaire d'un champ de gravitation (espace vide) puisse être mis sous la forme $ds^2 = f^2(t, x_1, x_2, x_3)\,[dt^2 - dx_1^2 - dx_2^2 - dx_3^2]$.

Il en déduit que si toutes les lignes d'intersection des surfaces appartenant aux trois familles d'un système triple orthogonal dans l'espace sont des rayons lumineux, cet espace est euclidien.

Julia (*G.*). — Sur une classe d'équations fonctionnelles (813-816).

Soient $R_1(z)$ et $R_2(z)$ deux fonctions rationnelles; l'auteur se propose d'obtenir une fonction analytique $G(z)$ telle que $G[R_1(z)] = [R_2[G(z)]$; on peut d'ailleurs toujours supposer que R_1 a un point double répulsif à l'origine, et que G y est holomorphe; on voit alors que G aura en général des points critiques algébriques et transcendants : l'auteur étudie particulièrement les fonctions G uniformes dans tout le plan.

Villat (*H.*). — Sur certaines équations intégrales possédant une infinité de solutions avec un nombre illimité de paramètres arbitraires (816-818).

A propos d'un problème d'hydrodynamique l'auteur signale une catégorie d'équations intégrales possédant une infinité de solutions dépendant d'une infi-

nité de paramètres; il en donne un exemple sur lequel on voit la manière de former les solutions.

Popoff (*K.*). — Sur le développement d'une fonction arbitraire en série suivant une suite de fonctions données (818-820).

Soit une suite de fonctions continues, orthogonales et normales dans un intervalle $V_1(x)$, $V_2(x)$, ...; l'auteur cherche sous quelles conditions une fonction $F(x)$, développable suivant les fonctions $V_i(x)$, sera développable suivant une autre suite donnée de fonctions quelconques. Il montre, comme conséquence, que toute fonction qui admet une dérivée est développable en série suivant la suite des polynomes formés par les premiers termes du développement de Taylor pour $\sin ix$ et $\cos ix$.

Boutroux (*P.*). — Sur les fonctions associées à un groupe « autogène » de substitutions (821-823).

L'auteur nomme *autogène* un groupe formé de substitutions correspondant aux branches d'une fonction multiforme, et qui sont toutes engendrées par multiplication de certaines substitutions fondamentales. Cela le conduit à la notion de fonction *pseudo-algébrique, pseudo-uniforme, pseudo-périodique*, etc; il montre en particulier que deux fonctions pseudo-elliptiques ayant les mêmes périodes sont fonction pseudo-algébrique l'une de l'autre.

Riabouchinski. — Équations générales du mouvement de corps solides dans un fluide parfait incompressible (824-826).

Soient n corps solides qui se meuvent dans un fluide incompressible limité par une surface fermée; leur forme est arbitraire, ils peuvent être transpercés; l'auteur étend à ce système les équations de M. Thomson, sous la seule réserve que le déplacement des solides ne diminue pas l'ordre de connexité du volume du fluide, et ne modifie pas l'étendue des surfaces en contact avec le fluide.

Buhl (*A.*). — Sur le rôle des symétries analytiques dans les théories relativistes (829-830).

Dans ses travaux antérieurs sur la généralisation de la formule de Stokes, l'auteur a montré comment on était conduit aux équations de Maxwell-Lorentz par des raisons de symétrie; ces mêmes formules permettent d'obtenir, par des considérations de symétrie analytique, les crochets de Christoffel et les diverses formules de la gravifique einsteinienne.

Langevin (*P.*). — Sur la théorie de relativité et l'expérience de M. Sagnac (831-834).

En réponse aux objections présentées par MM. Painlevé et Picard (*voir* ci-dessus), l'auteur rappelle que la théorie de relativité est la seule qui permette

actuellement de représenter l'ensemble des faits expérimentaux connus; en particulier il fait le calcul détaillé qui explique le résultat de M. Sagnac; celui-ci n'intéresse d'ailleurs que des termes du premier ordre : il pourrait donc être prévu par toute autre théorie, mais la relativité l'explique d'une manière remarquablement simple.

Painlevé (*P.*). — La gravitation dans la mécanique de Newton et dans la mécanique d'Einstein (873-887).

Cette Note a pour but de préciser les concordances et les divergences des deux théories; pour cela l'auteur expose les axiomes et postulats de la théorie newtonienne (auxquels il faut ajouter l'axiome de Fresnel), et les confronte à ceux de la théorie d'Einstein, ce qui permet de les classer en deux catégories selon qu'ils concordent ou non. Il discute enfin les raisons qui ont guidé les relativistes dans le choix des fonctions qui interviennent dans leurs formules.

Déirmendjian (*B.*). — Sur une nouvelle démonstration d'un théorème de M. Picard et sur quelques généralisations de ce théorème (897-899).

La démonstration du théorème sur les valeurs que prend une fonction autour d'un point essentiel isolé, se fait en utilisant une autre proposition de M. E. Picard, d'après laquelle toute relation pouvant exister entre deux fonctions uniformes dans le domaine d'un point essentiel isolé commun, est de genre $\geqq 1$; cette méthode permet d'obtenir des résultats plus généraux.

Kampé de Fériet (*J.*). — Sur l'intégrale des systèmes d'équations aux dérivées partielles des fonctions hypergéométriques d'ordre supérieur (900-902).

Les fonctions hypergéométriques généralisées d'ordre ω, étudiées précédemment par l'auteur (*voir* t. 172 et 173), satisfont à deux équations aux dérivées partielles linéaires, d'ordre $\omega+1$; l'auteur montre que, sous certaines conditions, pour avoir l'intégrale générale de ce système, il suffit d'en connaître $(\omega+1)^2$ intégrales particulières; il indique un moyen d'obtenir celles-ci.

Lévy (*A.*). — Sur les séries récurrentes et sur des formes homogènes qui s'y rattachent (902-903).

Extrait d'un Mémoire présenté à l'Académie; l'auteur utilise, pour étudier les récurrences linéaires, des déterminants formés avec les termes de la suite, qui constituent ainsi des formes homogènes par rapport à ces termes.

Gosse (*R.*). — Sur deux nouveaux types d'équations aux dérivées partielles du second ordre et de la première classe (903-905).

L'auteur étudie les équations de la forme $r+f(x, y, z, t)=0$, qui admettent

un ou deux invariants du second ordre pour les caractéristiques d'un même système; il obtient ainsi, en particulier, deux types d'équations intégrables qui n'avaient pas encore été signalées.

Chazy (*J.*). — Sur les fonctions arbitraires figurant dans le ds^2 de la gravitation einsteinienne (905-907).

M. Painlevé a montré que la théorie de relativité conduit, non pas seulement au ds^2 d'Einstein, mais à une forme plus générale dépendant de deux fonctions arbitraires; l'auteur montre que le choix de ces fonctions peut être fait d'une infinité de manières, tout en respectant l'ensemble des données expérimentales.

Ogura (*K.*). — Sur la théorie de la gravitation dans l'espace à deux dimensions (909-911).

L'auteur démontre qu'on peut déduire le ds^2 de Schwarzchild-Eddington, indépendamment de la loi de gravitation d'Einstein, des trois conditions suivantes : 1° la courbure scalaire de l'espace-temps à trois dimensions est nulle; 2° cet espace-temps est euclidien à l'infini; 3° le rapport de la courbure totale de l'espace à deux dimensions $[d\sigma^2 = \lambda^2(x_1)\, dx_1^2 + x_1^2\, dx_2^2]$ avec la courbure géodésique du rayon lumineux, est constant.

Varopoulos (*Th.*). — Sur quelques propriétés des fonctions croissantes (963-964).

L'auteur établit plusieurs propositions; en particulier : toute fonction $\mu(x)$ croissante vérifie l'inégalité

$$\mu\left[x + \frac{1}{\mu(x)}\right] < (1+\varepsilon)\,\mu(x) \qquad (\varepsilon > 0 \text{ quelconque}),$$

sauf peut-être dans des intervalles exceptionnels d'étendue totale finie.

Julia (*G.*). — Sur les fonctions entières ou méromorphes (964-967).

Soit $f(z)$ une fonction entière; l'auteur considére les itérations $f_n(z) = f(z^{k^n})$ (k entier > 1), et $f_n(z) = f[\mathrm{P}(z)]$ où P est un polynome; il étudie spécialement, dans ces deux cas, l'ensemble des points où la famille des f_n n'est pas normale.

Riabouchinski. — Sur la résistance des fluides visqueux (967-969).

Application aux fluides visqueux des théorèmes des projections et des quantités de mouvement.

Mittag-Leffler (*G.*). — Le théorème de Cauchy sur l'intégrale d'une fonction entre des limites imaginaires (1041-1045).

En utilisant les travaux de M. Borel, l'auteur démontre un théorème plus général que celui de Cauchy, relatif à l'intégrale, le long d'un contour, d'une fonction soumise à des conditions beaucoup moins restrictives que celles de Cauchy.

Sparre (*M. de*). — Sur le rendement des turbines à réaction qui travaillent sous une charge variable (1045-1049).

Les turbines sont ordinairement établies pour obtenir un rendement maximum dans le voisinage de la pleine charge; mais alors toute réduction notable de la charge entraîne une diminution très importante du rendement; l'auteur calcule le rendement sous charge réduite et montre qu'on peut établir une turbine travaillant sous charge variable avec rendement presque constant.

Cerf (*G.*). — Sur les systèmes de Pfaff et les transformations des équations aux dérivées partielles (1053-1056).

L'auteur montre que les méthodes de M. Goursat permettent d'obtenir plus simplement des résultats qu'il a déjà publiés sur les transformations des équations du troisième ordre possédant une ou plusieurs familles de caractéristiques du deuxième ordre.

Wolff (*J.*). — Sur les séries $\sum \frac{A_k}{z - \alpha_k}$ (1056-1057).

L'auteur montre, sur un exemple très simple, qu'une telle série peut être holomorphe aux points α_k, bien que la série $\Sigma \mid A_k \mid$ soit convergente; ces points ne sont donc, dans ce cas, que des pôles apparents.

Borel (*E.*). — Remarques sur la Note de M. J. Wolff (1057-1059).

La Note précédente montre bien que la convergence de la série $\Sigma \mid A_n \mid$ ne suffit pas pour que la fonction $f(z) = \sum \frac{A_n}{z - a_n}$ admette les points a_n comme pôles véritables; la condition suffisante trouvée antérieurement par M. Borel pour qu'il en soit ainsi, qui fait intervenir la rapidité de la convergence de $\Sigma \mid A_n \mid$, est donc nécessaire. On en déduit diverses remarques qui montrent l'intérêt que présenterait une étude approfondie de la classification des ensembles de mesure nulle.

Valiron (*G.*). — Sur les fonctions entières et leurs fonctions inverses (1059-1061).

$F(z)$ étant une fonction entière, l'auteur signale diverses propositions relatives aux zéros de $F(z) - x$; il démontre ensuite un théorème qui contient le

suivant, dû en partie à M. Fatou : L'équation $F(z) = Z$ admet des racines de module inférieur à $|Z|^{\varepsilon}$ (ε positif quelconque), dès que $|Z|$ est suffisamment grand.

Eydoux (*D.*). — Sur la variation d'énergie autour d'un point d'une machine hydraulique rotative (1063-1066).

Précédemment l'auteur a montré la nécessité du vecteur tourbillon pour qu'il y ait variation d'énergie le long d'un filet liquide; il calcule ici cette variation dans le cas d'une machine rotative; il montre ainsi, en particulier, que si tous les filets possèdent la même énergie à l'entrée dans la roue, leur énergie restante sera la même sur la trace d'une aube dans un plan méridien.

Fontené (*G.*). — Sur les deux coefficients d'inertie de Lorentz pour les mouvements à grandes vitesses (1066-1069).

En utilisant la notion de *masse dynamique* (fonction de la vitesse) de Poincaré, l'auteur montre qu'on peut obtenir les deux masses, longitudinale et transversale, de Lorentz à partir d'une formule vectorielle où ne figure qu'un seul coefficient d'inertie.

Le Roux (*J.*). — Le temps dans la mécanique classique et dans la théorie de relativité (1074-1077)

L'auteur fait remarquer que le paramètre t, dans la théorie de relativité, diffère en réalité du temps vulgaire et qu'on n'a pas le droit d'appliquer à l'un ce qui se rapporte à l'autre; il montre d'ailleurs que dans tous les phénomènes de propagation par ondes dans un milieu isotrope, on peut remplacer le temps par un paramètre analogue à ce pseudo-temps d'Einstein, et qui est soumis aux mêmes formules de transformation.

Guichard (*C.*). — Sur la géométrie infinitésimale du complexe linéaire (1145-1147).

Considérons l'ensemble des congruences appartenant à un complexe linéaire; effectuons sur ces éléments les opérations focales, conjuguées, harmoniques; on obtient ainsi un ensemble d'éléments que l'auteur étudie sous le nom de *groupe du complexe linéaire*.

Julia (*G.*). — Sur les solutions méromorphes de certaines équations fonctionnelles (1149-1152).

Il s'agit de l'équation déjà étudiée dans l'avant-dernière Note du même auteur (*voir* ci-dessus); la fonction $G(z)$ cherchée ne peut être méromorphe dans tout le plan, sauf un ou deux points essentiels, que si $R(z)$ est de la forme z^k (k entier positif), ou bien est un polynome en z, conditions d'ailleurs insuffisantes et que l'auteur étudie de près.

Borel (*E.*). — La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique (1304-1308).

L'auteur examine la probabilité du gain dans le cas de deux joueurs et d'un jeu symétrique; beaucoup de ces problèmes se ramènent à l'étude d'équations intégrales à noyau symétrique gauche.

Lagrange (*R.*). — Sur le calcul différentiel absolu (1325-1326).

On généralise le calcul différentiel ordinaire en prenant comme variables indépendantes des intégrales curvilignes $\omega_i = \int_{x_1^0 \ldots x_n^0}^{x_1 \ldots x_n} \Sigma_k a_{ik}\, dx_k$; le rôle des dx_i est rempli par les formes de Pfaff $d\omega_i$. L'auteur montre comment on peut développer sur ces bases le calcul absolu et en indique une application à l'étude des invariants et des covariants d'une variété.

Wolff (.). — Sur les séries $\sum \frac{A_k}{z - \alpha_k}$ (1327-1328).

Démonstration du théorème suivant : Toute fonction, holomorphe dans un domaine borné quelconque D, est dans tout domaine D_1 (qui est contenu avec sa frontière dans D) représentable par une série de la forme indiquée, les α_k étant dans D et la série $\Sigma | A_k |$ étant convergente.

Denjoy (*A.*). — Sur les fonctions quasi analytiques de variable réelle (1329-1331).

Il s'agit des fonctions, découvertes par M. Borel, non développables en série de Taylor et cependant déterminées par leur valeur et celle de toutes leurs dérivées en un point. L'auteur démontre le théorème suivant, qui permet de former de telles fonctions : Si $f(x)$ est une fonction de variable réelle, définie sur le segment *ab* et y possédant des dérivées de tous ordres, et si, M_n étant le maximum de $|f^{(n)}(x)|$ sur *ab*, la série $M_n^{-\frac{1}{n}}$ est divergente, $f(x)$ est entièrement déterminée sur tout le segment *ab* par sa valeur et celle de toutes ses dérivées en un seul point du segment.

Delassus (*E.*). — Sur les chaînes articulées fermées (1331-1333).

Après avoir rappelé ce que l'on désigne par fermeture ordinaire et fermeture singulière d'une telle chaîne, l'auteur cherche à déterminer toutes les chaînes n'ayant que des fermetures singulières; il résout complètement la question pour les chaînes à quatre membres.

Esclangon (*E.*). — Sur la relativité du temps (1340-1343).

Beaucoup de resultats, paradoxaux en apparence, tiennent à la définition physique adoptée pour le temps; l'auteur fait ici une étude critique des diverses

définitions physiques, ainsi que d'autres qui pourraient l'être; en particulier, même en accordant aux relativistes que la vitesse d'un corps *matériel* ne peut dépasser celle de la lumière, on peut fort bien concevoir la réalisation de phénomènes de déplacement (d'une tache lumineuse par exemple) avec une vitesse illimitée, et arriver ainsi à la notion de simultanéité absolue.

Le Roux (*J.*). — Interférence et réflexion dans un système mobile (1343-1344).

L'auteur montre que lorsque le système de référence S est mobile dans le milieu considéré, tout se passe comme si S était au repos à condition de remplacer la surface de l'onde sphérique par un certain *ellipsoïde d'interférence* et le temps par un *paramètre de rayonnement*.

Borel (*E.*). — Les fonctions quasi analytiques de variables réelles (1431-1434).

Comme suite à la Note ci-dessus de M. Denjoy, l'auteur en indique des conséquence très importantes, relatives aux fonctions quasi analytiques de deux variables, aux équations différentielles, etc.; ces propriétés établissent une analogie très étroite entre ces fonctions et les fonctions analytiques; elles se démontrent d'ailleurs par les mêmes moyens (fonctions majorantes).

Gevrey (*M.*). — Sur la détermination des intégrales des équations aux dérivées partielles d'ordre $2p$ à m variables admettant une famille multiple de caractéristiques d'ordre p (1445-1447).

Ce problème se ramène à la détermination de la fonction de Green pour une équation de type spécial : cette fonction dépend de la solution d'une équation de Fredholm, de seconde espèce, d'un type classique.

Bertrand (*G.*). — L'équation de Fredholm et les marées statiques de la première sorte (1448-1449).

En partant des équations de Poincaré l'auteur ramène la détermination de la marée statique à une équation de Fredholm; il étudie cette équation et indique une méthode pratique de calcul qui permettrait d'évaluer numériquement l'influence du bourrelet liquide, sur laquelle les auteurs ne s'accordent pas.

E. Gau.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XLVII.

TABLES ALPHABÉTIQUES

DU

TOME XLVII, 2e SÉRIE (LVIIIe DE LA COLLECTION) : 1923

DEUXIÈME PARTIE.

1° TABLE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES ANALYSÉES

(Le nom du rédacteur de l'analyse est indiqué en italique.)

2° TABLE DES AUTEURS DONT LES NOTES OU MÉMOIRES SONT ANALYSÉES.

3° TABLE DES AUTEURS D'ANALYSES.

FIN DES TABLES DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XLVII.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS ET Cie,
69300 Quai des Grands-Augustins, 55.

